Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours : Homogénéisation stochastique

Le cours de cette année a été consacré à une brève introduction à l'homogénéisation stochastique. De manière très générale et un peu vague, la théorie de l'homogénéisation a pour objectif de modéliser et d'analyser mathématiquement des milieux fortement hétérogènes de par la présence de « micro-structures », en tentant d'obtenir une représentation macroscopique « moyenne ». Les applications possibles sont nombreuses et vont des matériaux complexes (matériaux composites par exemple) aux milieux géologiques (milieux poreux par exemple). Bien sûr, une telle approche ne peut aboutir sans hypothèse sur l'organisation (ou la répartition) spatiale de ces « micro-structures ». Mathématiquement, la situation la plus étudiée correspond à une organisation périodique voire presque périodique. En revanche, il est plus réaliste de supposer que la répartition est aléatoire et stationnaire (c'est-à-dire que « la loi de probabilité » est invariante par translation...). De plus, le cas périodique (ou presque périodique) est un cas (très) particulier du cas stochastique. Et nous verrons que, dans ce cas, subsistent de très nombreuses questions ouvertes.

1. Homogénéisation périodique

En rappelant que l'homogénéisation déterministe peut également être abordée sans hypothèse sur l'organisation des micro-structures (voir les travaux de F. Murat, L. Tartar ou de l'école italienne de E. De Giorgi pour le calcul des variations et la théorie de la Γ-convergence), l'essentiel de l'homogénéisation périodique est obtenu à partir de développements asymptotiques formels mais justifiables, à double échelle. À titre d'exemple, considérons le cas suivant :

$$- \partial_i \{a_{ij} (\tfrac{x}{\varepsilon}) \partial_j u^\varepsilon\} - \frac{1}{\varepsilon} b_i (\tfrac{x}{\varepsilon}) \partial_i u^\varepsilon = f \text{ dans } \mathcal{O},\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}$$

où a_{ij}, $b_i \in L^\infty$, $(a_{ij}) \geq \nu\ (\delta_{ij})$ p.p. avec $\nu > 0$, $f \in L^2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 1$) et a_{ij}, b_i sont supposées être périodiques en x_k de période $T_k > 0$ pour $1 \leq k \leq N$. Le (petit) paramètre ε correspond à l'échelle caractéristique des micro-structures. Et il s'agit de déterminer le comportement de u^ε quand ε tend vers 0. Pour ce faire, on introduit naturellement le développement asymptotique à double échelle suivant

$$u^0(x) + \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \ldots$$

où $u^1(x, y)$, $u^2(x, y)$... sont périodiques en y de moyenne nulle (pour tout $x \in \mathcal{O}$). En reportant dans l'équation, on en « déduit »

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)(\partial_j u^0(x) + \frac{\partial}{\partial y_j}u^1)\right) - b_i(y)(\partial_i u^0(x) + \frac{\partial}{\partial y_i}u^1) = 0$$

et

$$\begin{cases} -\partial_i\left(a_{ij}(y)(\partial_j u^0 + \frac{\partial}{\partial y_j}u^1)\right) - b_i(y)(\partial_i u^1 - \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}u^2\right) \\ - b_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}u^2 = f. \end{cases}$$

On introduit alors la mesure invariante m associée à l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial y_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} - b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ c'est-à-dire l'unique solution périodique $m \in C(\mathbf{R}^N)$

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ji}\frac{\partial m}{\partial y_j} - b_i m) = 0, \ \mathrm{m} > 0, \ \int_Q m\, dy = 1$$

où $Q = \prod_{i=0}^{N}[0, T_i]$. En notant $< \varphi > = \int_Q \varphi dm$, on déduit de la deuxième équation ci-dessus

$$-\partial_i\left\{<a_{ij}>\partial_j u^0 + <a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}u^1>\right\} - \partial_i <b_i u^1> = 0,$$

équation qui devrait caractériser u^0 à condition toutefois que la première équation caractérise u^1 i.e. que, pour tout $p \in \mathbf{R}^N$, l'on puisse résoudre le problème suivant (dit du correcteur)

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)(p_j + \frac{\partial}{\partial y_j}\upsilon)\right) - b_i(y)(p_i + \frac{\partial}{\partial y_i}\upsilon) = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^N$$

avec υ périodique et (par exemple) $<\upsilon> = 0$. Et ce n'est le cas que si (et seulement si) la condition de compatibilité suivante est vérifiée : $<\frac{\partial}{\partial y_j}a_{ji} + b_i> = 0$ $(\forall i)$.

Cette condition est effectivement vérifiée dans les cas importants suivants :

i) $b_i \equiv 0$ $(\forall i)$ car $m \equiv 1$,

ii) $b_i = -\frac{\partial}{\partial y_j}a_{ji}$ (opérateur non sous forme divergence),

iii) $\operatorname{div} b = 0$ (auquel cas $m \equiv 1$) et $< b_i > = 0$ ce cas étant le cadre naturel d'application à la mécanique des fluides,

iv) (le cas potentiel) $b_i = a_{ji}\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Phi$ avec Φ périodique, de sorte que $m = e^{\Phi}$ (mesure de Gibbs).

On peut alors démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME : *Sous la condition de compatibilité, u^ε converge faiblement dans $H_0^1(\mathcal{O})$* vers u^e.

L'exemple précécent est caractéristique de l'homogénéisation périodique en tout cas pour des problèmes linéaires (voir pour plus de détails l'ouvrage d'A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou) avec un « découplage des échelles » i.e. un problème macroscopique effectif dont les coefficients sont déterminés par des problèmes « microscopiques » (réécrits dans $\mathbf{R}^N$ par changement d'échelle), dont la résolution est reliée à des questions d'**ergodicité**. Même pour des équations linéaires, il subsiste des questions ouvertes comme, par exemple, le cas de conditions aux limites de type Neumann ou dérivée oblique. Pour des équations non linéaires la situation est encore plus complexe, signalons les travaux sur l'homogénéisation :

i) dans le cadre des solutions de viscosité, d'équations d'Hamilton Jacobi du premier ordre par G. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan et l'auteur et de problèmes non linéaires reliés par L.C. Evans, O. Alvarez, M. Bardi... Le cas d'équations d'Hamilton Jacobi est naturel pour des applications à la propagation de rayons dans un milieu hétérogène ou aux grandes déviations. De plus, un lien étroit existe avec la théorie KAM en systèmes dynamiques et plus précisément la théorie d'Aubry-Mather (voir les travaux de J. Moser, A. Fathi, L.C. Evans, W.E). Enfin, le problème des correcteurs est également le problème essentiel de la théorie du contrôle ergodique (déterministe ou stochastique, voir par exemple les travaux de M. Arisawa et l'auteur) ;

ii) de flots dans des milieux hétérogènes (milieux poreux), voir les travaux en cours de N. Masmoudi et l'auteur pour les équations d'Euler ou de Navier-Stokes.

2. Le formalisme stochastique

Le cadre naturel est celui des processus stationnaires ergodiques que l'on peut, par exemple, présenter de la façon suivante : on considère un espace de probabilité (Ω, F, P) muni d'un groupe τ_x $(x \in \mathbf{R}^N)$ de transformations préservant la mesure P induisant un groupe fortement continu, toujours noté τ_x, de transformations unitaires de $L^p(\Omega)$ $(\forall 1 \le p < \infty)$. L'ergodicité est assurée par l'hypothèse suivante : $\tau_x F = F (F \in L^1(\Omega))$ si et seulement si F est constante (p.s.). Si $F \in L^1(\Omega)$ (ou $L^2(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$...), on obtient une fonction stationnaire sur $\mathbf{R}^N$ en considérant $f(x, \omega) = F(\tau_x\omega)$ de sorte que $f(x + h, \omega) = f(x, \tau_h\omega)$. Ce formalisme contient comme cas particulier le cas périodique où $\Omega = Q$ (en fait, le tore), P est la mesure de Lebesque sur Q (normalisée, i.e. divisée par $\prod_{i=1}^{N} T_i$) et $\tau_x\omega = \omega + x$. Le cas presque périodique est également contenu dans ce formalisme (Ω est alors le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}^N$, P la mesure de Haar associée et

$\tau_x\omega = \omega + x$). Le théorème ergodique assure que si $F \in L^p(\Omega)$ $(p > 1)$, $f_{B_R} f(x, \omega)dx$ converge p.s. (et dans $L^p(\Omega)$), quand R tend vers $+\infty$, vers $E[F] = E[f(x, \omega)]$ $(\forall x \in \mathbf{R}^N)$, où on note B_R la boule de rayon R.Si. Signalons les deux faits élémentaires suivants :

LEMME 1 : *Si* $F \in L^\infty(\Omega)$, *alors p.s.* $f(\frac{x}{\varepsilon}, \omega) \underset{\varepsilon}{\rightharpoonup} E[F]$ *dans* $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *faible*$*$.

LEMME 2 : *Si* $\nabla_x u(x, \omega) \in L^\infty(\mathbf{R}^N \times \Omega)$ *est stationnaire et si* $E[\nabla_x u(x)] = 0$ $(\forall x \in R^N)$, *alors* $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{|u(x)|}{1 + |x|} = 0$ *p.s.*

Enfin, on rappelle qu'aux dérivées dans l'espace physique correspondent des dérivées abstraites dans Ω i.e.

$$D_i F(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \omega) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \tau_{-x}\omega).$$

3. Homogénéisation stochastique : le cas linéaire ou faiblement non linéaire

Exactement comme dans le cas périodique, la résolution des problèmes des correcteurs permettrait d'étendre la théorie esquissée en 1. au cas stochastique. Nous allons voir que si cela est possible pour des problèmes linéaires (ou faiblement non linéaires) grâce à l'approche de G. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan, il n'en est rien pour des problèmes non linéaires ! La raison essentielle de cette difficulté est le manque de compacité (en ω) et surtout le fait que les correcteurs, comme on le verra en 4., n'existent pas toujours ! Pour des problèmes linéaires (ou quasi-linéaires) la difficulté est contournée par simple utilisation de la convergence faible. Ainsi, par exemple, si on considère le problème suivant

$$-\partial_i \left(a_i\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \nabla_x u^\varepsilon\right)\right) = 0 \text{ dans } \mathcal{O},\ u^\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O})$$

où $a(y, \omega, q) = A(\tau_y\omega, \mathrm{q})$, $A \in L^\infty(\Omega \times B_R)(\forall R < \infty)$, $\mathrm{A}(\omega, \mathrm{q})$ continue en q p.s., $B_R = \{\mathrm{q} \in \mathbf{R}^N / |q| \le R\}$, A vérifie pour tous $\omega \in \Omega$, q, q_1, $q_2 \in \mathbf{R}^N$

$$\begin{cases} |A(\omega, q)| \le C(1 + |q|) \\ (A(\omega, q_1) - A(\omega, q_2), q_1 - q_2) \ge \nu |q_1 - q_2|^2 \end{cases}$$

avec C, $\nu > 0$. Le problème des correcteurs devient alors pour $p \in \mathbf{R}^N$

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_i(y, \omega, p + \nabla_y \upsilon)\right) = 0$$

L'exemple linéaire en dimension 1 ($a(x, p) = a(x)p$) montre que l'on ne peut attendre que υ soit stationnaire, mais seulement que $\nabla\upsilon$ le soit. Pour construire un tel υ, on peut, par exemple, résoudre pour $\alpha > 0$.

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_i(y, \omega, p + \nabla_y \upsilon_\alpha)\right) + \alpha\upsilon_\alpha = 0$$

avec $\upsilon_\alpha(y, \omega) = V_\alpha(\tau_y\omega)$, de sorte que V_α résout

$$-D_i A_i(\omega, p + DV_\alpha) + \alpha V_\alpha = 0 \text{ dans } \Omega.$$

On vérifie aisément que $\alpha E[V_\alpha^2]$ et $E[|DV_\alpha|^2]$ sont bornés indépendamment de α. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $D_i V_\alpha$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers T_i vérifiant $E[T_i] = 0$, $D_j T_i = D_i T_j$ $(\forall i, j)$. Comme de plus $\alpha V_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} 0$ dans $L^2(\Omega)$, on déduit grâce à l'argument de monotonie de Minty que l'on a

$- D_i A_i\ (\omega, p + T_i) = 0$ dans Ω

Et on peut alors reconstruire $v(y, \omega)$ tel que $v(0, \omega) = 0$ p.s., $\partial_i v(x, \omega) = T_i(\tau_x \omega)$; et v est solution du problème des correcteurs (unique avec les propriétés ci-dessus). Cela permet d'obtenir le résultat suivant

Théorème : $u^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon]{} u^0$ *faiblement dans* $H_0^1(\mathcal{O})$ *p.s., où* u^ε *est la solution de*

$-\partial_i \bar{a}(\nabla u^0) = 0$ dans $\mathcal{O}$, $u^0 \in H_0^1\ (\mathcal{O})$;

et $\bar{a}(p) = E[A(\omega, p + T)]$.

4. Homogénéisation stochastique : exemples non linéaires

On considère les problèmes suivants (définis par la théorie des solutions de viscosité) dans $\mathbf{R}^N \times [0, \infty[$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \nabla_x u^\varepsilon\right) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega\right)\partial_{ij} u^\varepsilon + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, \nabla_x u^\varepsilon\right) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + F\left(\frac{x}{\varepsilon}, \omega, D_x^2 u^\varepsilon\right) = 0.$$

On suppose que H, a_{ij}, F sont stationnaires en (y, ω), $H(y, \omega, q) \to +\infty$ si $|q| \to +\infty$ uniformément en y (p.s.), H est uniformément continu en y, uniformément pour q borné (p.s.), a_{ij} est Lipschitz en y (p.s.) et F vérifie p.s., pour tous y, y_1, y_2, A, $B \geq 0$

$$|F(y_1, \omega, A) - F(y_2, \omega, A)| \leq C\ |y_1 - y_2|\ (1 + |A|)$$

$$F(y, \omega, A) - \mu Tr(B) \leq F(y, \omega, A + B) \leq F(y, \omega, A) - \nu Tr(B)$$

avec C, μ, $\nu > 0$. Enfin, on adjoint aux équations ci-dessus des conditions initiales suivantes

$u^\varepsilon\ |_{t=0} = u_0$ dans $\mathbf{R}^N$

où $u_0 \varepsilon\ B\ U\ C(\mathbf{R}^N)$. En supposant de plus que H est convexe en q, le comportement asymptotique de u^ε i.e. la convergence uniforme de u^ε vers la solution u^0 d'un problème effectif homogénéisé (avec les mêmes conditions initiales) du type suivant

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + \bar{H}\ (\nabla u^0) = 0,$$

dans les deux premiers cas, ou dans le troisième cas

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + \bar{F}\,(D^2 u^0) = 0,$$

a été établie.

Le premier cas a été résolu par P.E. Souganidis, et les deux derniers cas sont respectivement traités dans des travaux non encore publiés de P.E. Souganidis et l'auteur, L. Caffarelli, P.E. Souganidis et Wang. Il est important de noter que les problèmes effectifs sont obtenus par utilisation du théorème ergodique sous-additif, sans résoudre le problème des correcteurs. Et les arguments ne donnent que des correcteurs approchés.

Les problèmes des correcteurs sont respectivement

$$H(y,\ \omega,\ p + \nabla_y v) = \bar{H}(p),\ \nabla_y v \text{ stationnaire, } E[\nabla_y v] = 0,$$

ou

$$\begin{cases} -\,a_{ij}(y,\ \omega)\,\dfrac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} v + H(y,\ \omega,\ p + \nabla_y v) = \bar{H}\,(p),\ \nabla_y v \text{ stationnaire,} \\ E[\nabla_y v] = 0 \end{cases}$$

ou

$$F(y,\ \omega,\ A + D_y^2 v) = \bar{F}(A),\ D_y^2 v \text{ stationnaire, } E[D_y^2 v] = 0.$$

De nombreux problèmes ouverts subsistent comme, par exemple, le cas où H n'est pas supposé convexe en q.

L'existence de correcteurs c'est-à-dire de solutions des problèmes précédents est assez mal comprise. P.E. Souganidis et l'auteur ont montré qu'en général de tels correcteurs n'existent pas dans les deux premiers cas! On peut conjecturer qu'il existe un correcteur pour tout p correspondant à un point extrêmal de l'épigraphe de $\bar{H}$ ($\bar{H}$ est convexe), conjecture que nous n'avons vérifiée que dans des cas très particuliers.

Pour le troisième cas (situation uniformément elliptique), L. Caffarelli, P.E. Souganidis et l'auteur ont récemment prouvé qu'il existe un correcteur si F est convexe en A. Là encore, il n'est pas clair que l'hypothèse de convexité soit réellement nécessaire.

P.-L. L.

PUBLICATIONS

— On some periodic Hartree-type models for crystals. En collaboration avec I. Catto et C. Le Bris. ANN. I.H.P. Anal. Non Lin., 19 (2002), p. 143-190.

— From molecular models to continuum mechanics. En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. Arch. Rat. Mech. Anal., 164 (2002), p. 341-381.

— Caractérisation des fonctions de $\mathbf{R}^3$ à potentiel newtonien borné. En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. C.R. Acad. Sci. Paris, 334 (2002), p. 15-21.

— Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications. En collaboration avec C. Le Bris.

— Correctors for the homogenization of Hamilton-Jacobi equations in the stationary ergodic setting. En collaboration avec P.E. Souganidis.

— Ergodicity of diffusion processes. En collaboration avec M. Musiela.

— Large investor trading impacts on volatility. En collaboration avec J.M. Lasry.

— Towards a self-consistent theory of volatility. En collaboration avec J.M. Lasry.

— Correlations and bounds for stochastic volatility models. En collaboration avec M. Musiela.

— Instantaneous self-fulfilling of long-term prophecies on the probabilistic distribution of financial asset values. En collaboration avec J.M. Lasry.

— Viscosity solutions of fully nonlinear stochastic partial differential equations. En collaboration avec P.E. Souganidis. In RIMS Kokyuraku 1287, Kyoto University, Kyoto, 2002.

Mission, Ivitations, Conférences

— Conférence à l'Université de Pavie (17 octobre 2002).

— Conférence au congrès « Stochastic Partial Differential Equations », CIRM, Luminy (18 novembre 2002).

— Mission à l'Université d'Austin et série de trois conférences (3 × 2 h) « Statistical Physics and Fluid Mechanics » (20-25 janvier 2003).

— Président du Conseil Scientifique du premier congrès européen AMAM 2003 « Applied Mathematic - Applications of Mathematics » (10-13 février 2003).

— Mission à l'Université d'Austin et série (suite) de six conférences (6 × 2 h) « Statistical Physics and Fluid Mechanics » (24 février-8 mars 2003).

— Courant Lectures 2003 au Courant Institute (New York University), deux conférences (1er-3 avril 2003).

— Colloquium Jacques Morgenstern, Sophia-Antipolis (13 mai 2003).

— Organisateur et président de la session « Simulations multi-physiques, multi-échelles », Printemps de la Recherche, EDF, Clamart (21 mai 2003).

— Leçon inaugurale au Collège de France (22 mai 2003).

— Conférence en l'honneur d'Enrico Magenes, Université de Pavie (18 juin 2003).

Distinctions

— Élu membre étranger de l'Istituto Lombardo, Milan, octobre 2002.

— Élu membre de l'Académie des Technologies, avril 2003.

Responsabilités collectives et fonctions diverses

— Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.

— Président de la Commission d'Évaluation (des Projets et Programmes) de l'INRIA.

— Président du Conseil Scientifique du CEA-DAM.

— Président du Conseil Scientifique d'EDF.

— Membre du Conseil Scientifique de la Défense.

— Membre du Visiting Committee du CEA.

— Membre du Conseil Scientifique de l'Institut Europlace de Finance.

— Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

— Membre (fondateur) du Comité International de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

— Administrateur d'Alcatel.

— Conseiller Scientifique auprès de BNP-Paribas, CAI-CPR, EADS-LV.