

Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours : Jeux à champ moyen

1. Introduction

Le cours a porté sur une théorie nouvelle, élaborée en collaboration avec M. Jean-Michel Lasry, appelée théorie des « jeux à champ moyen ». L'objectif de cette théorie est de modéliser mathématiquement (et d'analyser ces modèles) des situations faisant intervenir un très grand nombre de joueurs rationnels (au sens de l'Économie, à savoir optimisant leurs décisions et actions), chaque joueur interagissant avec les autres « en moyenne » c'est-à-dire basant ses choix ou décisions sur le comportement moyen des autres joueurs. Ce type de situations se rencontre bien sûr en Économie et en Finance, où chaque agent-joueur optimise ses actions au vu d'informations globales à savoir moyennées sur l'ensemble des joueurs. D'autres domaines d'applications concernent les transports et l'étude du trafic ou en Biologie et Écologie. Plus précisément, nous considérons des équilibres de Nash à N joueurs, faisons tendre N vers l'infini pour en déduire des modèles d'équilibre pour des continua de joueurs et analysons les systèmes d'Équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) non linéaires ainsi obtenues. Les équations que nous introduisons de cette manière sont très générales et contiennent, comme cas particuliers, de nombreuses autres équations classiques comme les équations elliptiques semi-linéaires, les équations de type Hartree de la Mécanique Quantique, les équations d'Euler de la Mécanique des Fluides, les modèles cinétiques du type équations de Vlasov ou de Boltzmann, les équations du transport optimal de masse (problème de Monge-Kantorovich) ou les équations d'Euler-Lagrange associées à des problèmes de contrôle optimal d'EDP...

La terminologie « champ moyen » provient de la Physique et de la Mécanique et il ne s'agit pas d'une simple analogie puisque notre approche contient effectivement comme cas particulier les théories de champ moyen classiques en Physique

ou Mécanique (voir les exemples cités plus haut). De manière un peu vague, un cas particulier de notre théorie est celui où les joueurs n'ont plus de possibilité de choix et sont alors soumis passivement aux interactions avec le reste des joueurs comme des « particules » physiques ou des éléments de matière en Mécanique des Milieux Continus.

On réalise donc que la classe de modèles mathématiques que l'on obtient par cette approche de modélisation est extrêmement vaste et de très nombreuses questions d'Analyse Mathématique se posent, dont beaucoup restent à résoudre.

Signalons enfin une extension importante de la théorie telle que nous l'avons présentée jusqu'à présent. Implicitement, dans tout ce qui précède, nous considérons un ensemble homogène composé d'un très grand nombre de joueurs identiques. Il est souvent utile et réaliste d'introduire plusieurs catégories de joueurs (ou agents, ou organismes vivants...), chaque catégorie étant composée d'un très grand nombre de joueurs identiques. De plus, le nombre total de joueurs (taille de la population) peut varier dans le temps (naissance et mort, échanges d'attributs...). Les systèmes que nous introduisons dans ces cas contiennent alors comme cas particuliers des modèles de dynamique des populations ou de réactions chimiques...

Le cours, cette année, a été en quelque sorte une introduction à cette théorie nouvelle en se concentrant sur l'exemple le plus élémentaire de problèmes stationnaires pour des jeux simples d'évitement/regroupement.

2. Équilibres de Nash à N joueurs

Pour simplifier, nous ne considérons ici que le cas de N ($N \geq 1$) joueurs indépendants, contrôlant leur déplacement dans un domaine périodique $Q = [0, 1]^d$ ($d \geq 1$) et optimisant un critère en temps long (contrôle stochastique ergodique). Dans ce cas, trouver un équilibre de Nash revient à résoudre le problème suivant

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} -v\Delta v_i + H(x, \nabla v_i) + \lambda_i = \int_{Q^{N-1}} F^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x, x^{i+1}, \dots, x^N) \prod_{j \neq i} m_j(x^j) dx^j \text{ dans } Q \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in C^2(Q), m_i \in W^{1,p}(Q) \ (\forall 1 < p < \infty, \forall i \geq 1), \\ \int_Q v_i dx = 0, \int_Q m_i dx = 1, m_i > 0 \text{ sur } Q \\ -v\Delta m_i - \operatorname{div} \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v_i) m_i \right) = 0 \text{ dans } Q, \end{array} \right.$$

où les fonctions F^i sont supposées Lipschitz sur Q^N , $v > 0$, H est Lipschitz sur $Q \times \mathbb{R}^d$ et de classe C^1 en p .

L'existence est assurée (par exemple) par le théorème qui suit. En revanche, l'unicité n'est en général pas vraie (phénomène très général de multiplicité des équilibres de Nash).

Théorème 1 : On suppose que H vérifie

$$(2) \quad \exists \Theta \in]0, 1[, \inf_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \cdot p + \frac{\Theta}{d} vH^2 \right) > 0 \text{ pour } |p| \text{ grand.}$$

Alors il existe au moins une solution du système (1).

3. Équilibre de champ moyen

On veut faire tendre N vers l'infini. Pour ce faire, on suppose que les fonctions F^i (coûts) sont de la forme

$$(3) \quad F^i(x^1, \dots, x^N) = F \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} \delta_{x^j} \right] (x^i)$$

où F est un opérateur de l'ensemble des mesures de probabilité sur Q noté $\mathcal{P}(Q)$ à valeurs dans un borné de l'espace des fonctions Lipschitz sur Q .

Théorème 2 : On suppose que F vérifie la propriété de continuité suivante

$$(4) \quad F[m_n] \xrightarrow{n} F[m] \text{ dans } C(Q) \text{ si } m_n \xrightarrow{n} m \text{ faiblement dans } Q.$$

On a alors pour toute suite d'équilibres de Nash $(\lambda_1^N, \dots, \lambda_N^N)$, (v_1^N, \dots, v_N^N) , (m_1^N, \dots, m_N^N) :

i) $(\lambda_i^N)_{i,N}$ est bornée dans \mathbb{R} , $(v_i^N)_{i,N}$ est relativement compacte dans $C^2(Q)$, $(m_i^N)_{i,N}$ est relativement compacte dans $W^{1,p}(Q)$ ($\forall 1 < p < \infty$),

ii) $\sup_{i,j} (|\lambda_i^N - \lambda_j^N| + \|v_i^N - v_j^N\|_\infty + \|m_i^N - m_j^N\|_\infty) \xrightarrow{N} 0$,

iii) toute sous suite $(\lambda_1^N, v_1^N, m_1^N)$ convergeant dans $\mathbb{R} \times C^2 \times W^{1,p}$ ($\forall 1 < p < \infty$) converge vers (λ, v, m) solution de

$$(5) \quad \begin{cases} -v\Delta v + H(x, \nabla v) + \lambda = F[m] \text{ dans } Q \\ \lambda \in \mathbb{R}, v \in C^2(Q), m \in W^{1,p}(Q) \text{ } (\forall 1 < p < \infty) \\ \int_Q v dx = 0, \int_Q m dx = 1, m > 0 \text{ sur } Q \\ -v\Delta m - \operatorname{div} \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x, \nabla v) m \right) = 0 \text{ dans } Q. \end{cases}$$

Bien sûr, ce résultat assure l'existence d'un équilibre de champ moyen à savoir d'une solution du système (5), tout au moins sous les hypothèses précédentes sur l'opérateur F . Il est en fait naturel et important d'admettre (au moins au niveau du système limite (5)) des opérateurs généraux F qui peuvent être déduits d'opérateurs vérifiant les hypothèses ci-dessus par simple régularisation ($F_\varepsilon[m] = F[m \star \rho_\varepsilon]$) où $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, $\rho \geq 0$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho dz = 1$), de façon à pouvoir obtenir (au moins asymptotiquement) des opérateurs locaux comme $F(m(x))$ où F est une fonction donnée de $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} . Il faut alors étudier en détail l'existence de solutions et de nombreux régimes sont possibles.

4. Unicité

En revanche, il est possible d'obtenir des résultats d'unicité généraux comme celui qui suit (dans lequel nous supposons pour simplifier la présentation que toutes les fonctions sont régulières).

Théorème 3 : On suppose ou bien que F est monotone dans L^2 et que H vérifie pour tout $(x, p) \in Q \times \mathbb{R}^d$

$$(6) \quad H(x, p+q) - H(x, p) - \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \cdot q = 0 \Rightarrow q = 0,$$

ou bien que F est strictement monotone i.e.

$$(7) \quad \int_Q (F[m_1] - F[m_2]) (m_1 - m_2) dx \leq 0 \Rightarrow m_1 = m_2.$$

Alors les solutions de (5) sont uniques.

Ainsi que nous l'avons annoncé dans l'introduction, le système (5) contient (ou est relié à) de nombreuses équations classiques. Et de très nombreuses questions mathématiques se posent pour lesquelles nous ne disposons souvent pour l'instant que de réponses partielles. Outre les questions d'existence ou de non-existence, d'unicité ou de non-unicité, on peut aborder les questions de la limite déterministe ($v \rightarrow 0_+$), des liens avec le contrôle optimal d'EDP, de populations différentes de joueurs, de modèles d'apparition et de disparition des joueurs ou de la vitesse de convergence quand N tend vers l'infini...

COURS ET SÉMINAIRE

Cours : Le cours a eu lieu du 6 octobre 2006 au 22 décembre 2006.

Séminaire de Mathématiques Appliquées :

- 13 octobre 2006 : Maria J. Esteban (Ceremade, Université Paris-Dauphine)
Quelques résultats mathématiques sur les modèles d'atomes relativistes dans des champs magnétiques intenses.
- 20 octobre 2006 : Jean-Claude Saut (Université de Paris-Sud)
Sur quelques modèles d'ondes longues.
- 10 novembre 2006 : Frédéric Nataf (Laboratoire J.L. Lions, Paris)
Applications de la factorisation de Smith aux couches parfaitement adaptées (PML) et aux méthodes de décomposition de domaine.
- 17 novembre 2006 : Jürgen Jost (Max-Planck Institut Leipzig et IHES)
Dirac harmonic maps : a system of coupled differential equations from supersymmetric quantum field theory.
- 24 novembre 2006 : Rémi Sentis (CEA Bruyères-le-Châtel)
Sur la propagation laser dans un plasma : approximation paraxiale et problèmes de couplage d'ondes.
- 1^{er} décembre 2006 : Enrique Zuazua (Université Autonome de Madrid)
Schémas numériques dispersifs pour l'équation de Schrödinger non linéaire.
- 8 décembre 2006 : Li Ta Tsien (Université de Fudan)
Contrôlabilité et Observabilité pour des Systèmes Hyperboliques Quasi Linéaires.
- 15 décembre 2006 : Laurent Desvillettes (CMLA, ENS-Cachan)
Comportement en temps grand de solutions d'EDP et méthodes d'entropie ; le cas des équations de coagulation-fragmentation-diffusion.

- 22 décembre 2006 : Olivier Glass (Laboratoire J.L. Lions, Université de Paris 6)
Autour de l'algorithme de suivi de fronts.
- 12 janvier 2007 : Bernard Helffer (Université de Paris Sud)
Sur le troisième champ critique en théorie de la supraconductivité.
- 19 janvier 2007 : Stéphane Mischler (Ceremade, Université de Paris-Dauphine)
Autosimilarité des solutions de l'équation de Boltzmann inélastique.
- 26 janvier 2007 : Roland Masson (Institut Français du Pétrole)
Solveurs linéaires pour les systèmes couplant des variables elliptiques et hyperboliques, applications aux écoulements polyphasiques en milieux poreux et aux modèles stratigraphiques.
- 2 février 2007 : Luis Vega (Université du Pays Basque, Bilbao)
Uniqueness and monotonicity formulas for Schrödinger equations.
- 9 février 2007 : Pascal Frey (Laboratoire J.L. Lions, Université de Paris 6)
Autour de l'adaptation de maillages en simulation numérique.
- 16 février 2007 : Guillaume Carlier (Ceremade, Université de Paris-Dauphine)
Quelques problèmes mathématiques liés à la structure des villes.
- 9 mars 2007 : Toufic Abboud (IMACS, École Polytechnique)
Décomposition de domaine multi-échelle et multi-physique pour une modélisation de traitements acoustiques de surface.
- 16 mars 2007 : Seiji Ukai (City University of Hong Kong)
Optimal decay estimates for the linearized Boltzmann equation with time-dependent force and their applications.
- 23 mars 2007 : Jean Dolbeault (Ceremade, Université de Paris-Dauphine)
Méthodes d'entropie pour des EDP diffusives.
- 30 mars 2007 : Christine Bernardi (Lab. J.L. Lions, CNRS-Université de Paris 6)
Insertion automatique d'un modèle de turbulence dans les équations de Navier-Stokes.
- 6 avril 2007 : Anne-Laure Dalibard (Ceremade, Université de Paris-Dauphine)
Homogénéisation de lois de conservation scalaires.
- 27 avril 2007 : Yves Achdou (Université de Paris VII)
Méthodes numériques pour des problèmes aux limites dans des ouverts à frontière fractale.
- 4 mai 2007 : Thierry Goudon (Team SIMPAF INRIA Futurs & Lab. P. Painlevé CNRS-UST Lille)
Problèmes asymptotiques pour des modèles d'interaction ondes/particules : modèles classiques et quantiques.
- 11 mai 2007 : Roger Lewandowski (IRMAR, Université de Rennes 1)
Quelques résultats récents sur des modèles de turbulence.

- 25 mai 2007 : Karine Beauchard (CMLA, ENS-Cachan)
Contrôlabilité de systèmes quantiques.
- 1^{er} juin 2007 : Hatem Zaag (École Normale Supérieure)
Régularité de l'ensemble d'explosion pour l'équation semilinéaire des ondes.
- 8 juin 2007 : Anthony T. Patera (Massachusetts Institute of Technology)
Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for parametrized partial differential equations.
- 15 juin 2007 : Hiroshi Matano (University of Tokyo)
A braid group method for blow-up in nonlinear heat equations.
- 22 juin 2007 : Cyril Imbert (Ceremade, Université Paris-Dauphine)
Homogénéisation pour la dynamique des dislocations et pour certains systèmes de particules.

PUBLICATIONS

- *Some properties of diffusion processes with singular coefficients.* En collaboration avec M. Musiela. *Comm. Appl. Anal.*, **10** (2006), pp. 109-125.
- *On the homogenization and ergodic problems for fully nonlinear equations in half-space type domains.* En collaboration avec G. Barles, F. Da Lio et P.E. Souganidis.
- *Du discret au continu pour des modèles de réseaux aléatoires d'atomes.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **342** (2006), pp. 627-633.
- *Convexity of solutions of parabolic equations.* En collaboration avec M. Musiela. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **342** (2006), pp. 915-921.
- *Jeux à champ moyen. I — Le cas stationnaire.* En collaboration avec J.M. Lasry. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **343** (2006), pp. 619-625.
- *Jeux à champ moyen. II — Horizon fini et contrôle optimal.* En collaboration avec J.M. Lasry. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **343** (2006), pp. 679-684.
- *Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **343** (2006), pp. 717-724.
- *Towards a self-consistent theory of volatility.* En collaboration avec J.M. Lasry. A paraître dans *J. Maths. Pures Appl.*
- *Lattices and mean energy.* *Rendiconti Acad. Naz. Scienze*, Vol. XXIX (2006), pp. 265-270.

- *On the energy of some microscopic stochastic lattices*. En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. Arch. Rat. Mech. Anal., **184** (2007), pp. 303-340.
- *Correlations and bounds for stochastic volatility models*. En collaboration avec M. Musiela. Annales de l'IHP. Non Linear Analysis, **24** (2007), pp. 1-16.
- *Large investor trading impacts on volatility*. En collaboration avec J.M. Lasry. Annales de l'IHP. Non Linear Analysis, **24** (2007), pp. 311-323.
- *Instantaneous self-fulfilling of long-term prophecies on the probabilistic distribution of financial asset values*. En collaboration avec J.M. Lasry. Annales de l'IHP. Non Linear Analysis, **24** (2007), pp. 361-368.
- *Men Field Games*. En collaboration avec J.M. Lasry. Japanese Journal of Mathematics, **2** (2007), pp. 229-260.
- *Deux remarques sur les flots généralisés d'équations différentielles ordinaires*. En collaboration avec M. Hauray et C. Le Bris. C. R. Acad. Sci. Paris, **344** (2007), pp. 759-764.
- *Global existence of weak solutions to some micro-macro models*. En collaboration avec N. Masmoudi. À paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris.
- *A discussion about the homogenization of moving interfaces*. En collaboration avec P. Cardialaguet et P.E. Souganidis.
- *Préface du numéro spécial de ESAIM M²AN sur la Modélisation Moléculaire*.
- *Atomistic to continuum limits for computational materials science*. En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris. ESAIM M²AN, **41** (2007), pp. 391-426.
- *Stochastic homogenization and random lattices*. En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.
- *Convexity and non-convexity of option prices for SABR models*. En collaboration avec M. Musiela.

MISSIONS, INVITATIONS, CONFÉRENCES

- Conférence au Congrès de la London Mathematical Society, Bath (11 septembre 2006).
- Conférence au Colloque de rentrée du Collège de France, « L'homme artificiel au service de la société », Paris (13 octobre 2006).
- Conférence à l'ENS Lyon (17 octobre 2006).

— Conférence « Analyses, modèles et simulations : des mathématiques partout... », Cycle 2006-2007 des Grandes Conférences de Lyon (17 octobre 2006).

— Conférence au Colloque « Jean Leray et les équations aux dérivées partielles », Nantes (9 novembre 2006).

— Conférence à l'Institut de Mathématiques de l'Université d'Istanbul (17 novembre 2006).

— Conférence au Colloque « Mathématiques, physique et philosophie : Journée du centenaire de la mort de Ludwig Boltzmann (1844-1906) », Collège de France, Paris (22 novembre 2006).

— Conférences à l'Université de Kyoto, « The first Takagi Lectures », Kyoto (25-26 novembre 2006).

— Conférence au Colloque « Solutions de viscosité et applications en Contrôle et en Finance », Université Paris-Dauphine (29 novembre 2006).

— Conférence au Colloque à la mémoire de Gilles Kahn, Paris (12 janvier 2007).

— Cours (8 h) à l'Université d'Austin (15-26 janvier 2007).

— Mission à la Clinton Global Initiative, New York (2 février 2007).

— Cours (8 h) à l'Université d'Austin (12-22 février 2007).

— Entretien au Cercle des Économistes, Paris (16 mai 2007).

— Conférence du 25^e anniversaire des solutions de viscosité, Tokyo (6 juin 2007).

RESPONSABILITÉS COLLECTIVES ET FONCTIONS DIVERSES

— Membre de l'Académie des Sciences ; de l'Académie des Technologies ; de l'Académie des Sciences d'Italie, d'Argentine et du Brésil ; de l'Istituto Lombardo.

— Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.

— Président du Conseil Scientifique de l'ENS.

— Président du Conseil Scientifique du CEA-DAM.

— Président du Conseil Scientifique d'EDF.

— Président du Conseil Scientifique de France Télécom.

— Président du Conseil Scientifique de la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace.

- Président du Conseil Scientifique de la Chaire de Finance et Développement Durable de l'Université Paris-Dauphine
- Président du jury du prix « Science et Défense ».
- Membre du Haut Conseil de la Science et de la Technologie.
- Membre du Visiting Committee du CEA.
- Membre du Conseil Scientifique de l'Institut Europlace de Finance.
- Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.
- Membre fondateur du Comité International de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.
- Membre du Comité des Programmes Scientifiques du CNES.
- Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.
- Membre du Conseil Scientifique de la Fondation du Risque.
- Membre du Board of Trustees et du Conseil Scientifique de l'IMDEA (Madrid).
- Membre du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.
- Membre du Conseil d'Administration de la Fondation d'Entreprise IXIS.
- Administrateur d'Alcatel, Sark et Channel Bridge.
- Conseiller Scientifique auprès de BNP PARIBAS, CALYON, EADS-ST, REECH.