Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Cours : Jeux à champ moyen (suite)

1. Introduction

Le cours, suite de celui de l'an dernier, poursuit la présentation d'une théorie nouvelle appelée théorie des « jeux à champ moyen », élaborée en collaboration avec M. Jean-Michel Lasry. L'objectif de cette théorie est d'introduire, de justifier, d'analyser et d'appliquer dans différents contextes une nouvelle classe de modèles mathématiques permettant d'étudier le comportement collectif d'un très grand nombre d'agents en interaction (ou de joueurs au sens de la théorie des jeux) qui tous souhaitent « optimiser » leurs décisions.

Ces modèles peuvent être obtenus en considérant des équilibres de Nash à N joueurs et en faisant tendre N vers l'infini. Dans un cadre dynamique et d'espace d'état continu, ces modèles s'écrivent sous la forme de systèmes (d'un type nouveau) d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP en abrégé) non linéaires. Les équations ainsi obtenues sont très générales et contiennent comme cas particuliers de nombreux systèmes et équations classiques : équations elliptiques semi-linéaires, équations de type Hartree de la Mécanique Quantique, les équations d'Euler compressible de la Mécanique des Fluides, les équations cinétiques (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck…), l'équation de la chaleur, les équations de type milieux poreux ou les équations du transport optimal de masse (problème de Monge-Kantorovich)…

La terminologie « champ moyen » fait référence à la Physique et à la Mécanique statistiques : dans ces cadres physiques, il s'agit de décrire le comportement global d'un très grand nombre de particules en interaction qui créent un champ dit moyen et dont la dynamique dépend de ce champ. De manière simplifiée, on peut dire que nous étendons cette approche en permettant à chaque agent de « choisir au mieux » ses décisions tout en tenant compte des « champs moyens » créés par les décisions des autres joueurs.

Dans tout ce qui précède, nous avons implicitement admis que les joueurs sont « identiques » ou plus exactement « indistinguables ». Signalons que des variantes de la théorie permettent de considérer plusieurs catégories de joueurs, ou des caractéristiques variant (de manière aléatoire) d'un joueur à l'autre.

Il est donc clair que la classe d'équations que nous obtenons par cette approche générale de modélisation est extrêmement vaste et que de très nombreuses questions notamment mathématiques se posent, dont beaucoup restent à résoudre. Le cours, d'une certaine manière, détaille quelques-uns des progrès accomplis d'année en année.

Cette année, nous avons achevé la présentation détaillée du cadre mathématique nécessaire à la justification (rigoureuse) de la limite quand le nombre de joueurs N tend vers l'infini. Nous avons d'une part indiqué les méthodes de résolution d'EDP non-linéaires posées sur l'espace des mesures de probabilité et d'autre part expliqué comment ce cadre mathématique permettait de déduire rigoureusement les équations et systèmes de « jeux à champ moyen » à partir des systèmes d'équations correspondant à des équilibres de Nash à N joueurs.

2. Équations sur $P\,(Q)$

Afin de simplifier la présentation et les notations, nous ne considérons ici que le cas où l'espace d'états est le tore ou de manière équivalente $Q = [0,\, 1]^d$ $(d \geqslant 1)$ avec conditions de périodicité. Nous avons expliqué dans le cours de l'année précédente comment des équations aux dérivées partielles sur l'espace des mesures de probabilité sur Q (espace noté $P\,(Q)$) pouvaient être déduites d'équations posées en dimension finie lorsque la dimension tend vers l'infini. À titre d'exemple, signalons le cas d'équations de Hamilton-Jacobi du type (par exemple)

$$(1) \qquad \frac{\partial u^N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} H(x_i, \frac{1}{N-i}\sum_{j\neq i}\delta_{xj}, \nabla_{x_i} u^N, \frac{1}{N-1}\sum_{j\neq i}\delta_{\nabla_{xj} u^N}) = 0.$$

où H est une fonction Lipschitzienne sur $Q \times P\,(Q) \times B_R \times P\,(\mathbb{R}^d)$ (pour toute boule B_R de $\mathbb{R}^d$), les espaces de probabilité P sont munis de la métrique dite de Wasserstein (P_2) et H vérifie la condition structurelle d'unicité

$$(2) \qquad \begin{cases} H(X, \mathcal{L}(X), \frac{X-Y}{\varepsilon}, \mathcal{L}(\frac{X-Y}{\varepsilon})) - H(Y, \mathcal{L}(Y), \frac{X-Y}{\varepsilon}, \mathcal{L}(\frac{X-Y}{\varepsilon})) \geqslant \\ -w(\| X-Y \| + \frac{\|X-Y\|^2}{\varepsilon}) \end{cases}$$

pour tous $X,\ Y \in L^2$, $X,\ Y \in Q$ p.s., et ω est une fonction nonnégative continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\omega(0) = 0$. L'espace L^2 est défini dans un espace de probabilité « non-trivial » quelconque et $\|X\|$ désigne la norme L^2 de la variable aléatoire X.

Rappelons enfin que nous identifions systématiquement les fonctions sur $P(=P_2)$ et les fonctions sur L^2 qui ne dépendent que de la loi des variables. On a alors le

Théorème : *Si u^N est la solution (de viscosité) de l'équation (1) telle que $u^N|_{t=0} = U_0(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta x_j)$, alors $u^N - U(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta x_j)$ tend vers 0 uniformément sur $Q^N \times [0,\ T]$ (pour tout $T < \infty$) lorsque N tend vers l'infini, où U est l'unique solution (de viscosité) de l'équation*

(3) $$\frac{\partial U}{\partial t} + E[H(X, \mathcal{L}(X), \nabla U(X), \mathcal{L}_{\nabla U(X)})] = 0\,,\ \text{vérifiant } U|_{t=0} = U_0.$$

Remarque : Ce résultat est en fait un cas particulier d'un cadre général où l'équation (1) est remplacée par

(1') $$\frac{\partial u^N}{\partial t} + H(x_1, \nabla_{x_1} u^N\,; \dots,\ x_N,\ \nabla_{x_N} u^N)) = 0,$$

et $(H(x_1, p_1\,; \dots; x_N,\ p_N) = \mathcal{H}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{(x_i,\ p_i)})$, auquel cas l'équation (3) devient

(3') $$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{H}(X, \nabla U(X)) = 0.$$

□

Des résultats semblables peuvent être obtenus pour des équations générales du second ordre et ont été illustrés dans le cours.

3. Systèmes MFG

En partant des systèmes d'équations gouvernant les points de Nash dans des jeux différentiels stochastiques généraux, les résultats et les méthodes introduites précédemment permettent d'obtenir, quand le nombre de joueurs tend vers l'infini, l'équation suivante posée sur $Q \times P(Q) \times]0,\ T[(T > 0$ fixé)

(4) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta V - H(x, m, \nabla_x V) + < \frac{\partial V}{\partial m}, \frac{\sigma^2}{2}\Delta - \frac{\partial H}{\partial p}(x, m, \nabla_x U)\cdot\nabla >= 0,$$

avec une condition finale du type

(5) $$U|_{t=T} = U_0\ (x,\ m).$$

Cette équation en dimension infinie est en fait équivalente à un ensemble de systèmes d'équations en dimension finie, paramétré par $m_0 \in P(Q)$ que l'on peut interpréter comme la densité initiale des joueurs. En effet, il suffit pour s'en convaincre de résoudre

(6) $$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta m - \operatorname{div}(\frac{\partial H}{\partial p}(x, m, \nabla_x U(x, m))m) = 0,$$

avec $m|_{t=0} = m_0$. On considère ensuite $u(x, t) = U(x, t\,; m(x, t))$ et on observe que (4) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u - H(x, m, \nabla_x u) = 0 \tag{7}$$

avec $u|_{t=T} = U_1(x, m(T))$. Le système (6) - (7) n'est bien sûr rien d'autre que le système MFG (dans la classe d'exemples considérée).

Cours et Séminaire

Cours : Le cours a eu lieu du 24 octobre 2008 au 16 janvier 2009.

Séminaire de Mathématiques Appliquées

— 24 octobre : Paul Malliavin (Académie des sciences). Non ergodicité de l'équation d'Euler des fluides incompressibles et transfert de l'énergie vers les petites échelles.

— 7 novembre : Bernard de Meyer (Université Paris 1). La dynamique des prix sur un marché à information asymétrique.

— 14 novembre : Huyèn Pham (Université Paris 7). Inéquations (quasi)-variationnelles et EDS rétrogrades avec sauts contraints.

— 21 novembre : Yves Meyer (ENS-Cachan). Le compressed sensing et le théorème de Shannon-Nyquist.

— 28 novembre : François Murat (Université Paris 6). Estimation a priori et existence pour des problèmes elliptiques avec une non linarité sous quadratique par rapport au gradient.

— 5 décembre : Bertrand Maury (Université Paris Sud). Modélisation du poumon humain par un arbre infini.

— 12 décembre : Olivier Guéant (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Résolution analytique et numérique de mean field games : le cas dit des îlots.

— 9 janvier : Benoît Perthame (Université Paris 6). Auto-organisation des populations de cellules : pourquoi des modèles hyperboliques et cinétiques ?

— 16 janvier : Laurent Cohen (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Lignes géodésiques et analyse d'images.

— 23 janvier : Yves Achdou (Université Paris 7). Méthodes numériques pour des jeux à champ moyen.

— 30 janvier : Thierry Cazenave (Université Paris 6). Existence globale et explosion des solutions oscillantes de l'équation de la chaleur non-linéaire.

— 6 février : Yvan Martel (Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines). Collision de solitons pour les équations de Korteweg-de Vries généralisées non intégrables.

— 6 mars : Arghir Zarnescu (Université d'Oxford). Qualitative properties of Landau-de Gennes energy minimizers.

— 13 mars : Gilles Francfort (Université Paris 13). La prédiction du chemin de propagation de la fissuration en rupture fragile.

— 20 mars : John Ball (Université d'Oxford). Les interfaces, l'énergie superficielle et les transformations martensitiques.

— 27 mars : Jacques Sainte-Marie (INRIA-Rocquencourt). Du système de Saint-Venant aux équations de Navier-Stokes à densité variable. Modélisation, interprétation cinétique et simulations numériques.

— 3 avril : Walter Strauss (Brown University). Stability Criteria in a Collisionless Plasma.

— 10 avril : Mazyar Mirrahimi (INRIA-Rocquencourt). Contrôle par feedback en optique quantique.

— 15 mai : Filippo Santambrogio (Ceremade, Université Paris-Dauphine). Une théorie continue pour le trafic congestionné : modèles, équilibre, numérique et régularité.

— 29 mai : Olivier Glass (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6). Un résultat sur le contrôle du déplacement d'une zone de fluide.

— 5 juin : Alexis Vasseur (Université du Texas, Austin). Sur le problème de régularité des solutions de Navier-Stokes et autres systèmes de réaction-diffusion.

— 12 juin : Maurizio Falcone (Université de Rome 1 *La Sapienza*). Convergence of a large time-step scheme for Mean Curvature Motion.

— 19 juin : Alessio Porretta (Université de Rome 2 *Tor Vergata*). Solutions explosives, contraintes sur l'état et comportement asymptotique pour des équations de Hamilton-Jacobi visqueuses.

— 26 juin : Guy Barles (Université François Rabelais,Tours). Quelques résultats récents sur les équations elliptiques et paraboliques non linéaires.

Publications

— *A discussion about the homogenization of moving interfaces*. En collaboration avec P. Cardialaguet et P.E. Souganidis. J. Maths. Pures Appl. **91** (2009), p. 339-363.

— *Résumé du Cours au Collège de France (2007-2008) : Jeux à champ moyen.*

— *Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients.* En collaboration avec C. Le Bris. Comm. P.D.E., **33** (2008), p. 1272-1317.

— *Molecular simulation and related topics : some open mathematical problems.* En collaboration avec E. Cancès et C. Le Bris. Nonlinearity, Open problems Reprint Collection, London Math. Soc. (2008), p. 165-185.

— *Préface de Finance and Sustainable Developement*, Economica, Paris, 2008. En collaboration avec P.-A. Chiappori et J.-M. Lasry.

— *Convexity and non-convexity of option prices for SABR models.* En collaboration avec M. Musiela.

— *Applications of Mean Field Games to growth theory.* En collaboration avec O. Guéant et J.-M. Lasry.

— *Mean Field Games and applications.* En collaboration avec O. Guéant et J.-M. Lasry. A paraître dans Paris-Princeton Lecture Notes in Finance.

— *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations.* Livre en collaboration avec P.E. Souganidis.

— *Ergodic problems and periodic homogenization.* Ind. Univ. Math. J., **57** (2008), p. 2355-2375.

Missions, Invitations, Conférences

— Conférence à l'INRIA Sophia-Antipolis (28 août 2008).

— Conférence au Colloque en l'honneur d'Italo Capazzo Dolcetta, Rome (1er septembre 2008).

— Conférence au Workshop FDD, Collège de France (19 septembre 2008).

— Conférence publique au Ria de Bilbao Maritime Museum (25 septembre 2008).

— Conférence à l'Université de Bilbao (26 septembre 2008).

— Amick Lectures, Université de Chicago (2, 3 et 6 octobre 2008).

— Conférence au Département d'Économie, Université de Chicago (7 octobre 2008)

— Conférence au séminaire d'Équations aux Dérivées Partielles, Université de Chicago (8 octobre 2008).

— Conférence pour l'inauguration de la Chaire « Modélisation Mathématique et Simulation Numérique », École Polytechnique (20 octobre 2008).

— Conférence au Séminaire de Mathématiques Appliquées, Université de Princeton (11 novembre 2008)

— Conférence au Séminaire de Finance Quatitative, Université de Princeton (12 novembre 2008).

— Participation à la table ronde de l'Institut Doctoral Paris Tech (19 novembre 2008).

— Participation à la table ronde sur les aspects « long-terme » dans les marchés financiers, Colloque de l'Institut Europlace de Finance, Université Paris-Dauphine (24 novembre 2008).

— Exposé sur les Jeux à champ moyen, Bercy (27 novembre 2008).

— Conférence à l'International Conference on Partial Differential Equations and Applications, City University of Hong-Kong (7 décembre 2008).

— Colloquium ICLS, Université d'Austin (9 décembre 2008).

— Conférence au Congrès « Future directions in nonlinear partial differential equations », Université d'Austin (11 décembre 2008).

— Pauli Colloquium, Université de Vienne (19 décembre 2008).

— Exposé sur les Jeux à champ moyen, Bercy (21 janvier 2009).

— Participation à la table ronde « Financial Markets and Science - New Challenges », Forum « Risk Management and Financial Crisis », Institut Europlace de Finance (19 mars 2009).

— Mini-cours à l'Université d'Austin (10 h) du 30 mars au 3 avril 2009.

— Conférence au Workshop « Mathematical aspects of imaging, modeling and visualisation in multiscale Biology », Université d'Austin (4 avril 2009).

— Conférence à l'Université de Prague (29 avril 2009).

— Conférence à l'Institut de Mathématiques, Académie Tchèque des Sciences, Prague (30 avril 2009).

— Exposé introductif à la 3e journée de printemps de la chaire FDD, Institut Europlace de Finance (6 mai 2009).

— Conférence au « Majda 60th Festival », Courant Institute, New York (20 mai 2009).

— Colloquium de Mathématiques, Université Autonome de Madrid (28 mai 2009).

— Conférence au Workshop « Optimization, Transport and Equilibrium in Economics », Paris (8 juillet 2009).

— Conférence publique (ISAAC), Londres (13 juillet 2009).

Responsabilités collectives et fonctions diverses

— Membre de l'Académie des sciences ; de l'Académie des Technologies ; de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine et du Brésil ; de l'Istituto Lombardo.

— Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.

— Membre puis Président du Conseil d'Administration de l'ENS.

— Président du Conseil Scientifique du CEA-DAM.

— Président du Conseil Scientifique d'EDF.

— Président du Conseil Scientifique de France Télécom.

— Président du Conseil Scientifique de la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace.

— Président du Conseil Scientifique de la Chaire de Finance et Développement Durable de l'Université Paris-Dauphine.

— Président du Conseil Scientifique de l'Initiative de Recherche « Finance post-crise ».

— Président du Conseil Scientifique de Paris Tech.

— Président du jury du prix « Science et Défense ».

— Membre du Haut Conseil de la Science et de la Technologie.

— Membre du Visiting Committee du CEA.

— Membre du Conseil Scientifique de l'Institut Europlace de Finance.

— Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

— Membre fondateur du Comité International de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

— Membre du Comité des Programmes Scientifiques du CNES.

— Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

— Membre du Conseil Scientifique de la Fondation du Risque.

— Membre du Board of Trustees et du Conseil Scientifique de l'IMDEA (Madrid).

— Membre du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

— Membre du Conseil d'Administration de la Fondation d'Entreprise IXIS.

— Membre du Comité d'Orientation de l'ENS.

— Membre de la Société des Amis du Palais de la Découverte.

— Membre de l'International Advisory Board of the Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

— Membre du Conseil Scientifique de BCAM (Bilbao).

— Administrateur de Sark et Channel Bridge.

— Conseiller Scientifique auprès de BNP PARIBAS, CALYON, EADS-ST.