Équations aux dérivées partielles et applications

M. Pierre-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

Cours : Jeux à champ moyen *(suite)*

1. Introduction

Le cours, suite de celui de l'an dernier, poursuit la présentation d'une théorie nouvelle appelée théorie des « jeux à champ moyen », élaborée en collaboration avec M. Jean-Michel Lasry. L'objectif de cette théorie est d'introduire, de justifier, d'analyser et d'appliquer dans différents contextes une nouvelle classe de modèles mathématiques permettant d'étudier le comportement collectif d'un très grand nombre d'agents en interaction (ou de joueurs au sens de la théorie des jeux) qui tous souhaitent « optimiser » leurs décisions.

Ces modèles peuvent être obtenus en considérant des équilibres de Nash à N joueurs et en faisant tendre N vers l'infini. Dans un cadre dynamique et d'espace d'état continu, ces modèles s'écrivent sous la forme de systèmes (d'un type nouveau) d'Équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) non linéaires. Les équations ainsi obtenues sont très générales et contiennent comme cas particuliers de nombreux systèmes et équations classiques : équations elliptiques semi-linéaires, équations de type Hartree de la Mécanique quantique, les équations d'Euler compressible de la Mécanique des fluides, les équations cinétiques (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck...), l'équation de la chaleur, les équations de type milieux poreux ou les équations du transport optimal (problème de Monge-Kantorovich)...

La terminologie « champ moyen » fait référence à la Physique et à la Mécanique statistiques : dans ces cadres physiques, il s'agit de décrire le comportement global d'un très grand nombre de particules en interaction qui créent un champ dit moyen et dont la dynamique dépend de ce champ. De manière simplifiée, on peut dire que nous étendons cette approche en permettant à chaque agent de « choisir au mieux » ses décisions tout en tenant compte des « champs moyens » créés par les décisions des autres joueurs.

Dans tout ce qui précède, nous avons implicitement admis que les joueurs sont « identiques » ou plus exactement « indistinguables ». Signalons que des variantes de la théorie permettent de considérer plusieurs catégories de joueurs, ou des caractéristiques variant (de manière aléatoire) d'un joueur à l'autre.

Il est donc clair que la classe d'équations que nous obtenons par cette approche générale de modélisation est extrêmement vaste et que de très nombreuses questions notamment mathématiques se posent, dont beaucoup restent à résoudre. Le cours, d'une certaine manière, détaille quelques-uns des progrès accomplis durant l'année.

Cette année, le thème abordé concerne le cas d'espaces d'état finis pour les joueurs et l'existence et l'unicité de solutions régulières dans ce cas.

2. Un cas modèle

On considère le système suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (F(U)\cdot\nabla_x)U = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \geqslant 0 \tag{1}$$

où $d \geqslant 1, U : \mathbb{R}^d \times [0,\infty[\to \mathbb{R}^d, F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Et on s'intéresse au problème de Cauchy *i.e.* à la résolution de (1) en prescrivant U en $t = 0$:

$$U|_{t=0} = U_0 \ \text{ sur } \ \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

On supposera toujours, pour simplifier, que F et U_0 sont régulières (C^∞ à dérivées bornées) et on désire étudier l'existence globale en temps de solutions régulières. Il convient de noter que i) l'existence de solutions régulières sur un intervalle de temps maximal est aisée, ii) en général, ce temps maximal est fini *i.e.* la solution cesse d'être continue en temps fini et iii) une théorie de solutions globales discontinues est un problème intéressant, essentiellement ouvert (hormis quelques cas particuliers détaillés dans le cours).

On observe qu'au moins formellement $V = F(U)$ résout

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)V = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \geqslant 0 \tag{3}$$

avec $V|_{t=0} = V_0$, où $V_0 = F(U_0)$ et que (3) peut être « résolu » explicitement par la formule suivante (généralisation de la régularisée de Yosida) tant qu'elle a un sens

$$V = V_0 \circ (I + t\,V_0)^{-1} \tag{4}$$

où I désigne l'application identité de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

Ceci permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 : Si F et U_0 vérifient la condition suivante

$$\forall\, \delta > 0, \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \ \mathrm{dist}\,(Sp(D(F_0 \circ U_0)(x),]-\infty, \delta]) > 0 \tag{5}$$

alors le système (1)-(2) admet une unique solution régulière.

Remarques : i) Ce théorème donne des résultats nouveaux y compris dans le cas particulier où (1)-(2) provient d'équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre (i.e. $F = H', U_0 = \nabla\varphi_0$ ...). ii) La question de sélectionner parmi toutes les « solutions » discontinues (par exemple par limite quand la viscosité tend vers 0) est ouverte sauf dans différents cas particuliers (Hamilton-Jacobi avec transport...). iii) En omettant quelques détails techniques, il serait utile de comprendre les relations entre la condition (5) et l'hypothèse que $F_0 \circ U_0$ est la composée de deux applications monotones (hypothèse qui « implique » (5)), les deux hypothèses étant « équivalentes » dans le cas d'applications affines. □

3. Le cas général

Le cas précédent montre que l'on doit s'attendre dans le cas général

$$\frac{\partial U}{\partial t}+(F(x,U)\cdot\nabla)U=G(x,U) \;\; \forall x\in\mathbb{R}^d,\forall t\geqslant 0 \tag{6}$$

(complété par (2)), où $F,G:\mathbb{R}^{2d}\to\mathbb{R}^d$ sont, pour simplifier, régulières (C^∞ à dérivées bornées) à i) un régime de solutions régulières avec des hypothèses de monotonie et ii) une extension de la classe de solutions régulières par changement de fonction inconnue ($U\to\phi(x,U)$).

On démontre que la propagation de la monotonie est vraie si (G, F) est monotone de $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}^{2d}$ mais que la régularité des solutions nécessite de renforcer « légèrement » la monotonie. Et nous introduisons la notion suivante de α-monotonie : V est dite α-monotone sur $\mathbb{R}^m$ par rapport à un groupe de variables $z\in\mathbb{R}^k$ (si $k=m$, on dit simplement que V est α-monotone) si la propriété suivante a lieu

$$\exists\alpha>0,\forall y\in\mathbb{R}^m,\forall\xi\in\mathbb{R}^m,(DV(y)\xi,\xi)\geqslant\alpha\,|\,DV(y)\cdot(\pi_z\xi)|^2 \tag{7}$$

où π_z est la projection sur $\mathbb{R}^k\times\{0\}$.

Remarque : Si $k=m$, cette propriété signifie simplement que $V^{-1}-\alpha I$ est monotone. □

Théorème 2 : S'il existe $\alpha>0$ tel que ou bien U_0 est α-monotone et (G, F) est α-monotone en x, ou bien (G, F) est α-monotone en U, alors le système (5)-(2) admet une unique solution monotone régulière.

Différentes démonstrations de ce résultat sont possibles. La plus élémentaire consiste à utiliser la méthode des caractéristiques mais la plus générale repose notamment sur l'adaptation d'une idée de N.V. Krylov (introduite dans un tout autre contexte). En introduisant la fonction $W(x,\xi,t)=U(x,t)\cdot\xi$ (où $\xi\in\mathbb{R}^d$), on observe qu'au moins formellement la résolution de (5) est équivalente à la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi du premier ordre suivante

$$\frac{\partial W}{\partial t}+F(x,\nabla_\xi W)\cdot\nabla_x W=\xi\cdot G(x,\nabla_\xi W) \;\; \forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d},\forall t\geqslant 0. \tag{8}$$

De plus, la monotonie de U est équivalente à la condition $\xi\cdot\nabla_x W\geqslant 0$ tandis que la α-monotonie de U est équivalente à la condition $\xi\cdot\nabla_x W-\alpha\,|\,\nabla_x W|^2\geqslant 0$.

Le théorème précédent peut alors être démontré par des estimations *a priori* sur D_xU reposant sur l'utilisation de fonctions auxiliaires du type de $\xi\cdot\nabla_x W-\alpha\,|\,\nabla_x W|^2$...

4. Termes du second ordre

La présence de bruit commun à tous les joueurs conduit à l'introduction au second membre de (1), (3), ou (5) de termes du second ordre du type (pour l'équation satisfaite par U^i)

$$\sum_{k,\,l=1}^{d} a_{kl}\,\partial^2_{kl}\,U^i + b^i_{kl}\,\partial_k\,U^l \tag{9}$$

où les coefficients a_{kl}, b^i_{kl} sont réguliers (C^∞ à dérivées bornées) et $a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ avec σ régulier (C^∞ à dérivées bornées par exemple) de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m (m \geqslant 1)$. En fait les modèles de type MFG conduisent au cas particulier où σ est affine et où $b^i = \sigma\,\partial_i\,\sigma^T$.

Remarque : Dans le cas où U est un gradient $U = \nabla\varphi$, les termes précédents correspondent à $\nabla(\sum_{k,\,l=1}^{d} a_{kl}\,\partial^2_{kl}\varphi)$ dès que $(b^i)_s = \partial_i \cdot a$ où A_s désigne la partie symétrique d'une matrice A. Ceci est donc le cas si $b^i = \partial_i a$ ou si $b^i = \partial_i \sigma\,\sigma^T$ ou si $b^i = \sigma \cdot \partial_i \sigma^T$. □

La question est alors de savoir dans quelles situations on peut adapter ou étendre les résultats de la section précédente. Tout d'abord, l'introduction de $W = U \cdot \xi$ conduit à ajouter au membre de droite de (7) le terme suivant

$$\sum_{k,\,l=1}^{d} a_{kl}\,\partial^2_{kl}\,W + \sum_{i,\,k,\,l=1}^{d} b^i_{kl}\,\xi_i\,\frac{\partial^2 W}{\partial x_l\,\partial \xi_k} + C_0(1+|\,\xi\,|^2)\Delta_\xi W. \tag{10}$$

Il est à noter que le dernier terme est en fait arbitraire (car W est linéaire en ξ) mais est rajouté pour tenter d'obtenir un opérateur elliptique du second ordre en $(x,\ \xi)$. En fait, l'ellipticité de ce terme est vraie pour $C_0 > 0$ assez grand si la condition suivante a lieu

$$\sum_{i,\,l=1}^{d} \Big(\sum_{k \geqslant 1} b^i_{kl}\eta_k\Big)^2 \leqslant C_0\,|\,\sigma^T \cdot \eta\,|^2 \ \ ,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^d. \tag{11}$$

En particulier, cette condition est automatiquement vérifiée si $b^i = \sigma \cdot \partial_i \sigma^T$.

Le deuxième type de restrictions sur les coefficients $(a,\ b^i)$ provient de la propagation de la monotonie des solutions. En effet, on peut démontrer que la propagation de la monotonie est vraie si et seulement si les conditions suivantes ont lieu sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \forall \xi \quad \in \mathbb{R}^d, |\,\xi| = 1 \ \ \pi(\xi^i b^i_s - \partial_\xi a)\pi = 0 \\ \qquad \partial_\xi\, b^i \xi^i \ \text{ est symétrique} \\ \qquad \pi\,\partial^2_\xi\, a\,\pi \geqslant 0 \end{cases} \tag{12}$$

où π désigne la projection sur l'orthogonal de ξ.

Remarque : Dans le cas du gradient d'opérateur elliptique $\sum_{k,\,l=1}^{d} a_{kl}\,\partial^2_{kl}$, il est aisé de voir (en utilisant la remarque précédente) que (12) se réduit à la dernière condition à savoir $\pi\partial_\xi^2\, a\,\pi \geqslant 0$ et on retrouve le résultat de M. Musiela et l'auteur sur la propagation de la convexité pour les équations paraboliques. □

Lorsque les conditions (10) et (11) sont réunies, il devient alors possible d'étendre le résultat du paragraphe précédent (existence et unicité d'une solution monotone régulière). Et on notera que c'est bien le cas pour les systèmes de type MFG où σ est affine et $b^i = \sigma \cdot \partial_i \sigma^T$ puisque $\partial_\xi b^i \xi^i = \partial_\xi \sigma \cdot \partial_\xi \sigma^T = \partial_\xi^2\, a \geqslant 0$.

Cours et séminaire

Cours : Le cours a eu lieu du 28 octobre 2011 au 13 janvier 2012.

Séminaire de mathématiques appliquées

– 18 novembre : Ioannis G. Stratis (National and Kapodistrian University of Athens) : Electromagnetics in deterministic and stochastic bianisotropic media.

– 25 novembre : Pauline Lafitte (École Centrale de Paris) : Simulations numériques pour un modèle de transition de phase.

– 2 décembre : Fioralba Cakoni (University of Delaware, Newark) : Transmission Eigenvalues in Inverse Scattering Theory.

– 9 décembre : Nicolas Seguin (Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris 6) : Étude de l'interaction entre une particule ponctuelle et un fluide de Burgers.

– 20 janvier : Massimo Gobbino (Université de Pise) : The Perona-Malik equation: an example of forward-backward parabolic PDE.

– 27 janvier : Stéphane Jaffard (Université Paris-Est Créteil Val de Marne) : Méthode d'analyse multifractale pour la classification de signaux et d'images.

– 3 février : Shih-Hsien Yu (National University of Singapore) : Boundary kernels for dissipative systems.

– 10 février : Yves Capdebosq (Université d'Oxford) : Sur la régularité des solutions en homogénéisation à forte conductivité et application.

– 9 mars : Frank Pacard (École Polytechnique) : Ondes stationnaires d'énergie finie et n'ayant aucune symétrie pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

– 16 mars : Bartosz Protas (McMaster University) : Une enquête sur la précision de quelques estimations fondamentales en hydrodynamique à l'aide des méthodes variationnelles d'optimisation.

– 23 mars : Luis E. Silvestre (University of Chicago) : Partial regularity for fully nonlinear elliptic PDE.

– 30 mars : Gabriel Nguetseng (Université de Yaoundé) : Sigma-convergence d'équations du type Navier-Stokes.

– 6 avril : Ian Tice (Université Paris-Est Créteil) : Global well-posedness and decay for the viscous surface wave problem without surface tension.

– 4 mai : Franois Golse (École Polytechnique) : Effet régularisant non linéaire pour les lois de conservation hyperboliques.

– 11 mai : Matteo Novaga (University of Padova) : Variational problems in infinite dimensional spaces.

– 25 mai : Nicolas Rougerie (Université de Grenoble 1 et CNRS) : On the binding of polarons in a mean-field quantum crystal.

– 1er juin : Yvan Martel (Université de Versailles Saint-Quentin) : Explosion pour l'équation de Korteweg-de Vries généralisée L^2 critique (travail en collaboration avec Frank Merle et Pierre Raphaël).

– 8 juin : Gabriel Stoltz (CERMICS-ENPC) : Évolution en temps des défauts dans les cristaux.

– 15 juin : Andrey Piatnitski (Narvik Univ. College & Lebedev Phys. Inst. RAS) : Homogenization of spectral problems with sign-changing weight function.

– 22 juin : Martin Golubitsky (Ohio State University) : Patterns of Synchrony.

PUBLICATIONS

– *Convexity and non-convexity of option prices for SABR models.* En collaboration avec M. Musiela.

– *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations.* Livre en préparation, en collaboration avec P.E. Souganidis.

– *Scalar conservation laws with rough (stochastic) fluxes.* En collaboration avec B. Perthame et P.E. Souganidis.

– *Jeux à champ moyen (Résumé du Cours au Collège de France)*, Annuaire du Collège de France (2010-2011), Paris, 2012.

– *A discussion about the homogenization of moving interfaces.* En collaboration avec P. Cardialaguet et P.E. Souganidis. *J. Maths. Pures Appl.*, **91,** 2010, p. 339-363.

– *Stochastic averaging lemmas for kinetic equations.* En collaboration avec B. Perthame et P.E. Souganidis.

– *Homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects: proof of concept.* En collaboration avec X. Blanc et C. Le Bris.

MISSIONS, INVITATIONS, CONFÉRENCES

– Panel aux Rencontres Économiques d'Aix-en-Provence, « Le monde dans tous ses états », 10 juillet 2011.

– Conférence à la Third Riemann International School of Mathematics, « Free Surface, Multiphase and Multiphysics Problems », Verbania (Italie), 28 septembre 2011.

– Conférence à l'Université de Chicago (USA), 12 octobre 2011.

– Conférence au Mercantile Exchange Center, Chicago (USA), 14 octobre 2011.

– Conférence à l'Université de Chicago (USA), 18 octobre 2011.

– Conférence à l'Université de Chicago (USA), 19 octobre 2011.

– Conférence au Congrès « Analysis and numerics of Partial Differential Equations » (in memory of Enrico Magenes), Pavia (Italie), 3 novembre 2011.

– Conférence au Stevanovich Institute, Chicago (USA), 7 novembre 2011.

– Conférence à l'Université de Chicago (USA), 18 janvier 2012.

– Conférence à l'Université de Chicago (USA), 20 janvier 2012.

– Conférence à l'Université de Chicago (USA), 25 janvier 2012.

– Conférence à l'INRIA, Sophia-Antipolis, 11 avril 2012.

– Conférence « Charlemagne » au RWTH Aachen, Aachen (Allemagne), 18 avril 2012.

– Conférence publique au Centre Culturel Français, Budapest (Hongrie), 7 mai 2012.

– Lauréat du Grand Prix INRIA, Collège de France, 14 juin 2012.

– Conférence plénière au SIAM annual meeting, Minneapolis (USA), 12 juillet 2012.

RESPONSABILITÉS COLLECTIVES ET FONCTIONS DIVERSES

– Membre de l'Académie des Sciences ; de l'Académie des Technologies ; de l'Académie des Sciences d'Italie, d'Argentine et du Brésil ; de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples, de la TWAS, de l'Academia Europea.

– Professeur à temps partiel à l'École Polytechnique.

– Conseiller scientifique à l'INRIA.

– Président du Conseil d'Administration de l'ENS.

– Président du Conseil Scientifique de l'Institut Louis Bachelier.

– Président du Conseil Scientifique de France Telecom.

– Président du Conseil Scientifique de la Chaire de Finance et Développement Durable de l'Université Paris-Dauphine.

– Président du Conseil Scientifique de l'Initiative de Recherche « Finance post-crise ».

– Président du Conseil Scientifique de ParisTech.

– Président du Conseil Scientifique du projet EMMA.

– Président du jury du prix « Science et Défense ».

– Membre du Haut Conseil de la Science et de la Technologie.

– Membre du Conseil Scientifique de l'Institut Europlace de Finance.

– Membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society.

– Membre fondateur du Comité International de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences.

– Membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College.

– Membre du Conseil Scientifique de la Fondation du Risque.

– Membre du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

– Membre du Conseil d'Administration de la Fondation d'Entreprise Natixis.

– Membre de la Société des Amis du Palais de la Découverte.

– Membre de l'International Advisory Board of the Scuola di Dottorato in Scienze Astronomiche, Chimiche, Fisiche e Mathematiche « Vito Volterra ».

– Membre du Conseil Scientifique du BCAM (Basque Centre for Applied Mathematics).

– Conseiller Scientifique auprès de BNP PARIBAS, EADS-ST et IEF.

– Fondateur de MFG R&D.

– Éditeur en chef du *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

– Éditeur de 45 revues internationales.