Équations aux dérivées partielles et applications

Pierre-Louis Lions

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : équations aux dérivées partielles, équations de Hamilton-Jacobi

La série de cours et séminaires « Singularités et discontinuités dans les équations de Hamilton-Jacobi » est disponible, en audio et/ou en vidéo, sur le site internet du Collège de France (http://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2015-2016.htm).

Enseignement

Cours – Singularités et discontinuités dans les équations de Hamilton-Jacobi

Introduction

Le cours de cette année a porté sur différents aspects de la théorie des solutions de viscosité et ses applications à l'étude d'équations complètement non linéaires, du second ordre, elliptiques éventuellement dégénérées et en particulier des équations de Hamilton-Jacobi du 1er ordre. Ont été abordées d'une part l'étude de singularité sur le bord provoquées par la présence simultanée d'annulation de la non-linéarité au bord et d'Hamiltoniens superlinéaires, et d'autre part une approche nouvelle de l'unicité des solutions par l'utilisation de fonctions auxiliaires généralisant les distances géodésiques associées à un Hamiltonien dans le cas particulier où il est homogène de degré 2.

Le premier thème a été motivé par un modèle d'économie mathématique introduit pour les industries minières. Et le second thème a pour application naturelle la théorie des solutions de viscosité stochastiques, introduite en collaboration avec P.E. Souganidis.

Nous ne présentons ici qu'un bref résumé des principaux résultats sur le second thème.

Quelles fonctions auxiliaires pour des résultats d'unicité ?

Un élément essentiel de la théorie des solutions de viscosité, outre la notion elle-même, est le résultat de comparaison de deux solutions ou d'une sous et d'une sur-solution. La stratégie classique de démonstration consiste à dédoubler les variables en considérant deux équations indépendantes à l'aide de deux variables x et y dans $\mathbb{R}^d$. Le résultat de comparaison découle alors de l'utilisation des fonctions auxiliaires $\Psi_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2$ $(\varepsilon>0)$ qui possèdent à l'évidence les deux propriétés élémentaires suivantes : tout d'abord Ψ_ε tend vers l'infini si ε tend vers 0 pour tout $x \neq y$ tandis que Ψ_ε $(x,x)=0$ (« favorisant ainsi la situation où $x=y$ »). D'autre part, Ψ_ε étant une fonction de $x-y$, on a bien sûr

$$\nabla_x \Psi_\varepsilon(x-y) = -\nabla_y \Psi_\varepsilon(x-y).$$

D'où, pour tout Hamiltonien H (ici une fonction de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$),

$$H(\nabla_x \Psi_\varepsilon) = H(-\nabla_y \Psi_\varepsilon) \tag{1}$$

Classiquement, les résultats de comparaison sont obtenus pour des Hamiltoniens généraux $H(x,p)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en estimant les erreurs commises $(|x-y|)$ contre la taille de $|\nabla \Psi_\varepsilon|$...). Pour des équations de Hamilton-Jacobi avec un forçage temporel très irrégulier (par exemple « bruit blanc »), cette approche s'effondre et une technique basée sur les systèmes caractéristiques a été introduite par P.E. Souganidis et l'auteur. Nous développons ici une approche différente pour une classe assez générale d'Hamiltoniens basée sur l'introduction de fonctions auxiliaires Ψ_ε (x,y) régulières pour x proche de y (uniformément en ε petit) telles que

$$\forall \delta>0, \inf\{\Psi_\varepsilon(x,y)/\,|x-y| \geqslant \delta\} \to +\infty \text{ si } \varepsilon \to 0_+ \tag{2}$$

$$\sup_x \Psi_\varepsilon(x,x) \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0_+ \tag{3}$$

$$H(x,\nabla_x \Psi_\varepsilon) = H(y,-\nabla_y \Psi_\varepsilon). \tag{4}$$

Muni de telles familles de fonctions, on obtient alors aisément des résultats de comparaison généraux pour des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre stationnaires

$$H(x,\nabla u)+u=0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \tag{5}$$

ou d'évolution

$$\frac{\partial u}{\partial t}+H(x,\nabla u)=0 \quad \text{pour } x\in\mathbb{R}^d,\ t>0 \tag{6}$$

ou « stochastiques »

$$\frac{\partial u}{\partial t}+H(x,\nabla u)\dot{\omega}=0 \quad \text{pour } x\in\mathbb{R}^d, t>0 \tag{7}$$

où ω est une fonction continue en t sur $[0,+\infty[$.

Et nous avons également établi dans le cours des estimées précises sur $D^2_{x,y}\,\Psi_\varepsilon$ qui permettent aisément d'étendre les résultats de comparaison à des équations elliptiques fortement non linéaires du second ordre essentiellement dégénérées comme, par exemple, dans le cas stochastique (7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, \nabla u)\dot{\omega} + F(x, t, \nabla u, D^2 u) = 0 \tag{8}$$

où F « est décroissante par rapport à D^2u ».

Le résultat essentiel

Nous considérons ici, pour éviter des détails techniques sans grande importance, le cas d'équations posées sur un cube de $\mathbb{R}^d$ (par exemple unité i.e ; $[0, 1]^d$) avec conditions de périodicité. Les résultats et démonstrations s'adaptent facilement au cas de l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier. Nous introduisons ensuite un Hamiltonien $H(x, p) \in C(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{R})$ (périodique en x...) et faisons l'hypothèse essentielle suivante

$$H(x, p) \text{ est convexe en } p, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d. \tag{9}$$

Et nous noterons par $L(x, q)$ la fonction convexe conjuguée

$$L(x,q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^d} \{(p,q) - H(x,p)\} \quad (\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$

Les hypothèses de structure sur H cruciales pour notre approche sont les suivantes : il existe $m > 1$, $C_0 \geq 0$, $C_1 > 1$ tels que l'on ait pour tout $(x, q) \in \mathbb{R}^{2d}$

$$L(x,q) \leq C_0 + C_1 |q|^m, \; L(x,q) \geq \frac{1}{C_1} |q|^m - C_0 \tag{10}$$

$$|L_x| \leq C_0 + C_1 |q|^m, \; |L_q| \leq C_0 + C_1 |q|^{m-1} \tag{11}$$

$$|L_{xx}| \leq C_0 + C_1 |q|^m, \; |L_{xq}| \leq C_0 + C_1 |q|^{m-1}, \; |L_{qq}| \leq C_0 + C_1 |q|^{m-2} \tag{12}$$

où L est supposée de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{2d}$ et de classe C^2 (par exemple) sur $\mathbb{R}^{2d}$ si $m \geq 2$ (respectivement sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$ si $m \in]1,2[$), et on note h_x la dérivée par rapport à Z d'une fonction h.

On introduit enfin pour $x \in]0,1]$ (par exemple) la fonction « valeur » du problème suivant de calcul des variations (ou de contrôle optimal déterministe !) pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\left\{ \begin{aligned} & L_s(x,y) = \inf\{ \int_0^s L(x(t), \dot{x}(t))dt / \\ & x \in C^1([0, s]\,;\, \mathbb{R}^d), x(0) = y, x(s) = x \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Remarques : i) Un exemple illustrant les conditions (10) - (12) est donné par

$$L(x,q) = \Big(\sum_{i,\, j=1}^{d} a_{ij}(x) q_i q_j \Big)^{m/2} + f(x)$$

où a_{ij}, f sont réguliers, (a_{ij}) est symétrique ($\forall x$) et définie positive (uniformément en x).

ii) Dans le cas où L ne dépend pas de x, il est bien connu (et facile de vérifier) que

$$L_s(x,y) = sL(\frac{x-y}{s}).$$

En particulier, si $H(p) = \frac{1}{2}|\,p\,|$ alors $L(q) = \frac{1}{2}|\,q\,|^2$ et

$$L_s(x,y) = \Psi_s(x-y). \square$$

Un des principaux résultats établis dans le cours est le suivant

Théorème 1 : *Si* $m \in]1,2]$, *il existe* $\rho > 0$ *tel que* L_s *est de classe* C^1 *sur* $\{|x-y| < \rho\}$. *De plus, on a pour tout* $s \in]0,1]$

$$H(x, \nabla_x L_s) = H(y, -\nabla_y L_s) \text{ sur } \{|\,x-y\,| < \rho\} \tag{14}$$

D'autre part, on a pour tout $m > 1$, $s \in]0,1]$

$$C_0 s + C_1 \frac{|\,x-y\,|^m}{s^{m-1}} \geq L_s(x,y) \geq \frac{1}{C_1}\frac{|\,x-y\,|^m}{s^{m-1}} - C_0 s \text{ sur } \mathbb{R}^{2d}. \square \tag{15}$$

Théorème 2 : *Si* $m > 2$, $L_s(x,x)$ *n'est pas de classe* C^1 *en général. En revanche, si* $m > 2$ *<u>et</u>* $C_0 = 0$, *alors le théorème 1 reste vrai.* $\square$

Remarques : Les estimées sur les dérivées secondes de L_s (qui existent sur $\{|x-y| < \rho\}$) mentionnées plus haut et importantes pour les extensions à des équations elliptiques complètement non linéaires éventuellement dégénérées sont en fait des majorations précises de la forme quadratique

$$Q_s(\alpha,\beta) = (D^2_{x,y}\, L_s(x,y).\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \tag{16}$$

pour α, $\beta \in \mathbb{R}^d$. $\square$

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

13 novembre 2015, Snorre H. Christiansen (université d'Oslo) : Sur la notion de courbure dans le calcul de Regge.

20 novembre 2015, Guillaume Carlier (université Paris-Dauphine) : Méthodes numériques pour les flots gradients dans l'espace de Wasserstein.

27 novembre 2015, Nicolas Lerner (université Paris 6): Onset of instability for a class of non-linear PDE systems.

4 décembre 2015, Yann Brenier (École polytechnique) : Dynamiques de rang et applications.

11 décembre 2015, Jean Dolbeault (université Paris-Dauphine) : Symétrie et brisure de symétrie dans les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

8 janvier 2016, Pierre-Louis Lions (Collège de France) : Une classe nouvelle d'équations de Kolmogorov non linéaires.

15 janvier 2016, Nizar Touzi (École polytechnique) : Solutions de viscosité des EDP dépendant de la trajectoire.

29 janvier 2016 : Yves Achdou (université Paris-Diderot), Équations de Hamilton-Jacobi présentant des discontinuités : homogénéisation et réduction de dimension.

11 mars 2016, Cyril Imbert (École normale supérieure) : Inégalité de Harnack pour des équations hypoelliptiques cinétiques à coefficients peu réguliers.

18 mars 2016, Djalil Chafaï (université Paris-Dauphine) : Au bord de certains systèmes de particules en interaction issus ou inspirés par des modèles de matrices aléatoires.

25 mars 2016, Jean-Yves Chemin (université Paris 6) : La transformée de Fourier sur le groupe d'Heisenberg : le point de vue « fonctions ».

8 avril 2016, Bruno Ziliotto (université Paris-Dauphine) : Homogénéisation stochastique des équations de Hamilton-Jacobi non convexes : un contre-exemple.

13 mai 2016, Nicolas Fournier (université Paris 6) : Équation de Landau homogène : unicité, approximation par des particules.

20 mai 2016 : Jean-Frédéric Gerbeau (INRIA Paris/Sorbonne universités UPMC Paris 6), Paires de Lax approchées et simulation numérique en électrophysiologie cardiaque.

27 mai 2016 : Panagiotis Souganidis (université de Chicago), Scalar Conservation Laws with Rough Time Dependence.

3 juin 2016, François Golse (École polytechnique) : Du problème à N corps quantique à l'équation de Vlasov.

10 juin 2016, Olivier Guéant (ENSAE Paris Tech) : Étude d'équations de type Hamilton-Jacobi intervenant dans les modèles de contrôle optimal stochastique de tenue de marché (*market making*). Analyse asymptotique et approximations spectrales.

17 juin 2016, Rémi Rhodes (université Paris-Est Marne-la-Vallée) : Théorie quantique de Liouville ou la théorie probabiliste de l'uniformisation.

Missions, invitations, conférences

Série de cinq conférences à l'université de Chicago, 28 septembre-9 octobre 2015.

Conférence Von Karman, université de Vienne, 18 novembre 2015.

Exposé à la Conférence à la mémoire de Daniel Gogny, Bruyres-le-Châtel, 10 décembre 2015.

Série de quatre conférences à l'université de Chicago, 18 janvier-29 janvier 2016.

Exposé à l'université de Toulouse I, 11 mars 2016.

Exposé à l'université de Trento, 22 mars 2016.

Cours à l'École polytechnique (8×1 h 30), Palaiseau, 6 avril-1er juin 2016.

Exposé avec Karol Beffa à PSL, Paris, 11 avril 2016.

Exposé au colloque « Hamilton-Jacobi Equations - New trends and applications », Rennes, 30 mai 2016.

Conférence à l'Académie royale de Belgique, Bruxelles, 4 juin 2016.

Exposé au Workshop FIME-FDD, Vaux de Cernay, 16 juin 2016.

Exposé à la conférence « Coron 60 », Paris, 20 juin 2016.

Exposé au séminaire du laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, Paris, 16 septembre 2016.

Exposé à la conférence à la mémoire de E. De Giorgi, Pise, 19 septembre 2016.

Série de cinq conférences à l'université de Chicago (3 octobre-14 octobre 2016).

Louis Bachelier Fellow, Paris, 16 octobre 2016.

Exposé au séminaire de mathématiques appliquées, Collège de France, Paris, 18 novembre 2016.

Conférence au Workshop « PDE Models for Multi-agent phenomena », Rome, 28 novembre 2016.

Conférence « Fields Medal Talk » (50^{e} anniversaire du CORE), Louvain-la-Neuve, 14 décembre 2016.

Publications

LIONS P.-L., *Viscosity Solutions and Stochastic Partial Differential Equations*, livre en préparation, en collaboration avec P.E. SOUGANIDIS.

GABAIX X., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et MOLL B., « The dynamics of inequality », *Econometrica*, vol. 84, n^{o} 6, 2016, p. 2071-2111, DOI : 10.3982/ECTA13569.

LIONS P.-L., *Parabolic Partial Differential Equations with Irregular Data and Applications to Stochastic Differential Equations*, livre en préparation, en collaboration avec C. LE BRIS.

BLANC X., LE BRIS C. et LIONS P.-L., « Local profiles for elliptic problems at different scales: Defects in, and interfaces between periodic structures », *Communications in Partial Differential Equations*, vol. 40, n^{o} 12, 2015, p. 2173-2236, DOI : 10.1080/03605302.2015.1043464.

LIONS P.-L., « Équations paraboliques et ergodicité » (résumé du cours au Collège de France), *Annuaire du Collège de France 2014-2015*, Paris, Collège de France, 2016.

LIONS P.-L., *Efficiency for the price formation process in presence of high frequency participants: a Mean Field Game analysis*, en collaboration avec A. LACHAPPELLE, J.-M. LASRY et C.-A. LEHALLE.

ACHDOU Y., HAN J., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et MOLL B., « Heterogeneous agent models in continuous time », 2015 (http://www.princeton.edu/~moll/HACT.pdf).

FRIZ P.K., GASSIAT P., LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., « Eikonal equations and pathwise solutions to fully non-linear SPDEs », 2016, arXiv: 1602.04746.

LIONS P.-L., *Existence and uniqueness results for the Master equation of Mean Field Games.* En collaboration avec P. CARDALIAGUET, F. DELAUNE et J.-M. LASRY.

CARDALIAGUET P., DELARUE F., LASRY J.-M. et LIONS P.-L., « The master equation and the convergence problem in mean field games », 2015, arXiv: 1509.02505.

ACHDOU Y., BUERA F.J., LASRY J.-M.J., LIONS P.-L. et MOLL B., « PDE Models in Macroeconomics », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and physical sciences*, vol. 372, 2014, hal-01460744.

LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., « Viscosity solutions for junctions: well posedness and stability », *Rendiconti Lincei - Matematica e applicazioni*, vol. 27, n^{o} 4, 2016, p. 535-545 [arXiv: 1608.03682].

ACHDOU Y., GIRAUD P.-N., LASRY J.-M. et LIONS P.-L., « A long-term mathematical model for mining industries », *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 74, n^{o} 3, 2016, p. 579-618, DOI : 10.1007/s00245-016-9390-0.