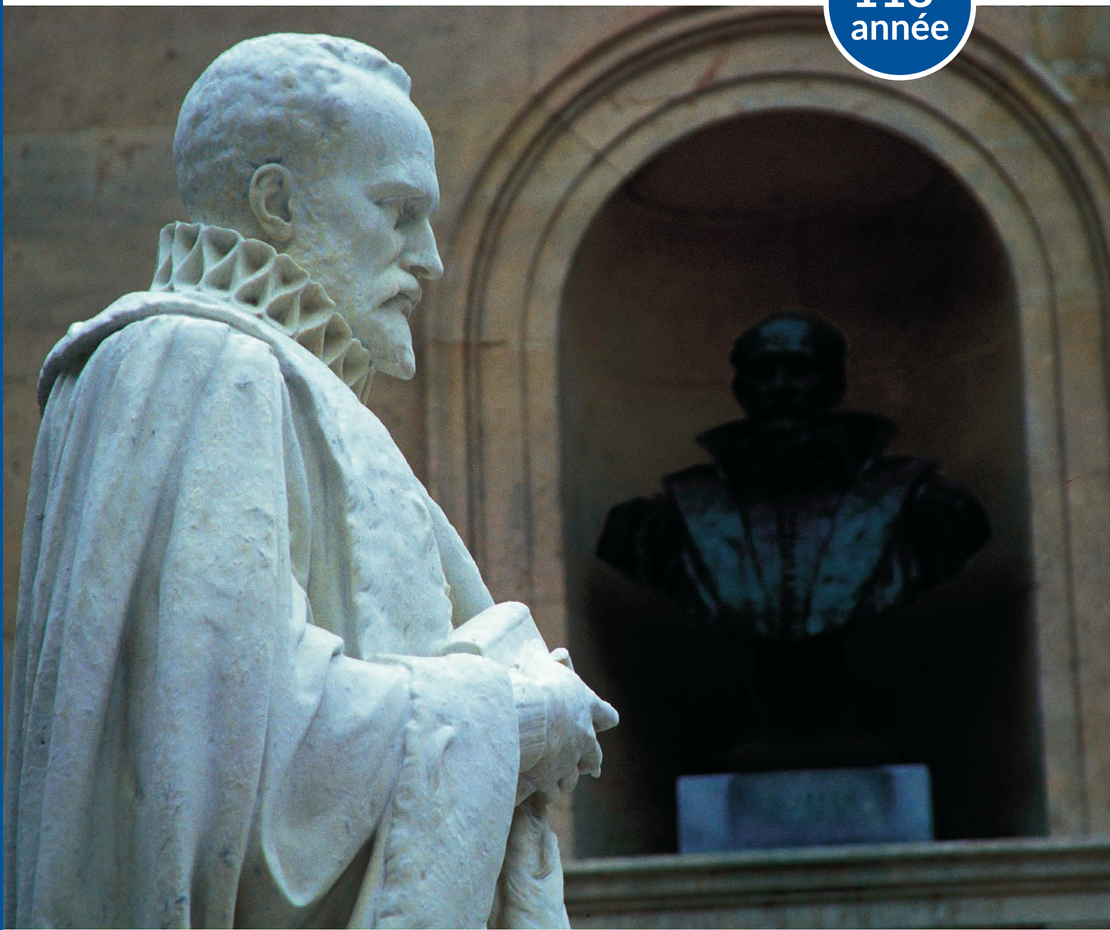
ANNUAIRE du **COLLÈGE DE FRANCE** 2017 - 2018

Résumé des cours et travaux

118e année



COLLÈGE DE FRANCE
1530

Équations aux dérivées partielles et applications

Pierre-Louis Lions

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : équations aux dérivées partielles, lois de conservation scalaires

La série de cours et séminaires « Sur les lois de conservation scalaires » est disponible en vidéo sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2017-2018.htm).

Enseignement

Cours – Sur les lois de conservation scalaires

Le cours a eu lieu du 10 novembre 2017 au 19 janvier 2018.

Introduction

Le cours de cette année a porté essentiellement sur les systèmes hyperboliques du premier ordre appelés « lois de conservation scalaires ». Une littérature considérable existe sur ce sujet depuis les travaux de P. Lax, O. Oleinik et la théorie importante de S.N. Kruzkhov jusqu'à des développements récents. Le cours a développé quelques aspects de travaux récents et en cours réalisés en collaboration avec P.E. Souganidis. Notre projet de recherche est de revoir entièrement la théorie connue avec de nombreuses extensions sur le type de solutions, leur définition, la régularité des données, les comportements à l'infini ainsi que les conditions aux limites. Signalons qu'outre les conditions aux limites classiques, nous en introduisons de nouvelles (solutions saturées ou solutions conservatives...). Dans ce résumé de cours, nous nous contenterons de donner quelques exemples des résultats énoncés et démontrés dans le cours.

Il est inutile de rappeler en détail l'importance pour les applications des lois de conservation. Indiquons simplement qu'outre l'intérêt intrinsèque de ces questions, il nous semble utile d'amener la théorie des lois de conservation scalaires à un niveau de compréhension comparable à celui qui existe pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre (atteint grâce à la théorie des solutions de viscosité). Et ce d'autant plus que les liens entre les deux classes d'équations sont étroits puisque, au moins en dimension 1 d'espace, on passe formellement de l'une à l'autre par simple intégration ou dérivation. En outre, la théorie des jeux à champ moyen (« Mean Field Games ») conduit aussi à l'étude de classes de systèmes hyperboliques pour lesquelles nos résultats sont pertinents.

Une nouvelle caractérisation des solutions entropiques

Les lois de conservation scalaires s'évrivent comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\Big(f(x,u)\Big) = 0 \quad x \in D, t \geq 0 \tag{1}$$

D est un domaine régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$ (par exemple $D = \mathbb{R}^d$), $u(x, t) \in \mathbb{R}(\forall x \in D$, $\forall t \geq 0)$ *i.e.* u est « scalaire ». Le flux $f(x, t)$ défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ est donné à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Et on supposera toujours que $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc},x}(C)$ *i.e.* que

$$\sup_{|u| \leq R} \left| D_x f \right| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \quad \text{(pour tout } R > 0)$$

En notant $a \vee b = \max(a, b)$ et $a \wedge b = \min(a \wedge b)$, on définit une sous solution (resp. sur solution) $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d \times (0,T)$ de (1) si, pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \vee k) + \operatorname{div}_x \{f(x, u \vee k)\} - 1_{(u<k)}(\operatorname{div}_x f)(x,k) \leq 0$$

(resp. $\frac{\partial}{\partial t}(u \wedge k) + \operatorname{div}_x \{f(x, u \wedge k)\} - 1_{(u>k)}(\operatorname{div}_x f)(x,k) \geq 0$) au sens des distributions. Enfin, u est solution si u est à la fois sous et sur solution.

On vérifie aisément que i) on peut remplacer $(u < k)$ et $(u > k)$ par $(u \leq k)$ et $(u \geq k)$ dans la définition précédente, ii) cette notion est équivalente aux notions classiques introduites par Kruzkhov et iii) la démonstration classique de Kruzkhov, avec une amélioration technique nécessitée par la régularité limitée du flux f, conduit à démontrer la proposition 2.1.

Proposition 2.1 *Le maximum (resp. le minimum) de deux sous solutions (resp. sur solutions) est encore une sous solution (resp. sur solution).* □

Et on observe que cette proposition implique aisément des résultats d'unicité. Elle permet aussi d'établir une propriété inattendue de « régularisation » par sup et inf convolution : en effet, si $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ est une sous solution (resp. sur solution), alors $u^0(x,t) = \sup_{|z| \leq \varepsilon} \operatorname{ess}(u(x+z,t))$ (resp. $\inf_{|z| \leq \varepsilon} \operatorname{ess}(u(x+z,t)))$ est toujours une sous solution (resp. sur solution). Bien sûr $(u^\varepsilon, u_\varepsilon)$ approximent u si u est p.p. continu. Et, pour tout u, $u^\varepsilon\ (t)$ (resp. $u_\varepsilon) \in BV$.

À l'aide de cette notion et de la proposition, on a établi dans le cours des résultats d'existence et d'unicité (et de contractivité en norme L^1), dans le cas où $D = R^d$, de solutions $u \in C([0,\infty);\ L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty_{x,t}$ telles que $u\big|_{t=0} = u_0$ où $u_0 \in L^1 \cap L^\infty\ (\mathbb{R}^d)$. Cette extension de la théorie classique a également été étendue dans le cours au cas où $u_0 \in L^1 + L^\infty\ (\mathbb{R}^d)$, ce qui nécessite d'étendre également la notion qui précède.

Conditions aux limites

Différents types de conditions aux limites ont été introduits et étudiés dans le cours et nous n'indiquerons ici que quelques éléments portant sur les conditions aux limites de type « Dirichlet homogène » *i.e.* $u = 0$ sur $\partial D \times [0, \infty)$.

Dans le cours, la notion qui suit a été introduite et analysée. On dit que $u \in C([0, \infty)\,;\ L^1(D)) \cap L^\infty_{x,t}$ est sous solution (resp. sur solution) du problème de Dirichlet si elle est sous solution (resp. sur solution) dans $D \times (0, \infty)$ et si elle vérifie : pour tout $k \geq 0$ (resp. $k \leq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \vee k) + \mathrm{div}_x\,\{f(x, u \vee k)\} - 1_{(u<k)}(\mathrm{div}_x f)(x, k) + f(x, k)\delta_{\partial D} \leq 0$$

$$(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial t}(u \wedge k) + \mathrm{div}_x\,\{f(x, u \wedge k)\} - 1_{(u>k)}(\mathrm{div}_x f)(x, k) + f(x, k)\delta_{\partial D} \geq 0)$$

dans $\mathcal{D}'(\bar{D} \times (0, \infty))$, ou en d'autres termes, pour t tout ϕ régulière à support compact dans $\bar{D}$, si $\phi \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\int_D (u \vee k)\phi dx - \int_D f(x, u \vee k)\cdot D\phi(x)dx - \int_D 1_{(u<k)}(\mathrm{div}_x f)(x, k)\phi(x)dx \\ &\qquad + \int_{\partial D} f(y, k)\cdot n(y)\phi(y)\phi(u)dS \leq 0 \\ &(\text{resp. } \tfrac{d}{dt}\int_D (u \wedge k)\phi dx - \int_D f(x, u \wedge k)\cdot D\phi(x)dx - \int_D 1_{(u>k)}(\mathrm{div}_x f)(x,k)\phi(x)dx \\ &\qquad + \int_{\partial D} f(y, k)\cdot n(y)\phi(y)dS > 0). \end{aligned}$$

Dans les formules qui précèdent, $n(y)$ désigne la normale (à ∂D) unitaire extérieure.

Séminaire de mathématiques appliquées

• 10 novembre 2017 : Pierre-Louis Lions (Collège de France), « Un peu de nouveau sur les MFG ».
• 17 novembre 2017 : Olivier Le Maître (LIMSI-CNRS-université Paris-Sud), « Méthodes spectrales pour les équations elliptiques à coefficients stochastiques ».
• 1er décembre 2017 : Sébastien Boyaval (laboratoire d'hydraulique Saint-Venant, ENPC), « Maxwell rencontre Saint-Venant à propos de fluides viscoélastiques ».
• 8 décembre 2017 : Cyril Labbé (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Localisation du Hamiltonien d'Anderson en dimension 1 ».
• 15 décembre 2017 : Josselin Garnier (CMAP, École polytechnique), « Calcul des moments d'ordre élevé pour l'équation d'ondes partiale aléatoire ».
• 12 janvier 2018 : Irène Waldspurger (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Reconstruction de phase par projections alternées pour des vecteurs de mesure aléatoires ».
• 19 janvier 2018 : Vincent Millot (laboratoire J.-L. Lions, université Paris-Diderot), « Applications harmoniques fractionnaires et surfaces minimales locales ou non locales ».

• 26 janvier 2018 : Claude Le Bris (École des ponts & INRIA), « Homogénéisation elliptique avec défauts : preuve revisitée et nouveaux résultats ».
• 2 février 2018 : François Golse (École polytechnique, CMLS), « Mesures empiriques et dynamique quantique ».
• 9 février 2018 : Paul Cazeaux (université du Kansas), « Matériaux 2D multi-couches et incommensurabilité : la géométrie non-commutative à la rescousse du calcul numérique ».
• 16 mars 2018 : Benoit Perthame (laboratoire J.-L. Lions, université Paris 6), « EDP pour les réseaux de neurones : modèles, analyse et comportement ».
• 23 mars 2018 : Bruno Després (laboratoire J.-L. Lions, université Paris 6), « La méthode des solutions manufacturées pour les équations de Maxwell anisotropes dans les plasmas ».
• 6 avril 2018 : Juan Casado-Diaz (université de Séville), « Elliptic equations in unbounded cylinders with nonpositive zero order terms. Application to the homogenization of the wave equation ».
• 4 mai 2018 : Ivar Ekeland (Ceremade, université Paris-Dauphine), « Un théorème de surjection locale avec pertes de dérivées, et quelques applications » (travail en commun avec Éric Séré).
• 15 juin 2018 : René Aïd (université Paris-Dauphine), « La coordination de la production d'électricité centralisée et distribuée ».
• 22 juin 2018 : Rupert Klein (Freie Universität Berlin), « Mathematical modeling of multi-scale processes in the atmosphere ».

Recherche

Missions, invitations, conférences

• Conférence au congrès « Fluids, dispersion and blow up », IHP, Paris, 12 juillet 2017.
• Conférence « Ulm Lecture », Ulm, Allemagne, 19 juillet 2017.
• Conférence au colloque « Waves diffracted » en l'honneur de Patrick Joly, INRIA, Palaiseau, 29 août 2017.
• Conférence au colloque « Interscience », université de Vienne, Autriche, 14 septembre 2017.
• Exposé « Maths pour tous », ENS, Paris, 18 septembre 2017.
• Série de trois exposés à l'université de Chicago, États-Unis, les 4, 6 et 11 octobre 2017.
• Exposé dans le cadre de la journée pour le X^e^ anniversaire de l'IMUS, université de Séville, Espagne, 20 octobre 2017.
• Conférence au congrès « 75 years of Mathematics in Mexico », UNAM, Mexico, Mexique, 5 décembre 2017.
• Exposé pour des lycéennes, IHP, Paris, 20 décembre 2017.
• Série de trois exposés à l'université de Chicago, États-Unis, les 24, 26 et 31 janvier 2018.
• Exposé au colloque « Mean Field Games and Distributed Optimization in Energy » Alan Turing Institute, Londres, Royaume-Uni, 12 février 2018.
• Conférence « Applied Mathematics Today », université de Princeton, États-Unis, 14 mars 2018.

• Conférence chez Dassault Systèmes R&D, Vélizy, 19 mars 2018.
• Conférence au colloque « Mean Field Games », Huawei France, Boulogne-Billancourt, 27 mars 2018.
• Conférence au « 1er congrès franco-marocain de mathématiques appliquées », Marrakech, Maroc, 17 avril 2018.
• Conférence au colloque « Le monde des mathématicien.ne.s », Collège de France, Paris, 15 mai 2018.
• Conférence au congrès « Mathematics and Science: In Honour of Sir John Ball », Oxford, Royaume-Uni, 17 mai 2018.
• Conférence au congrès « METE », ETH, Zurich, 5 juin 2018.
• Exposé dans le cadre « Journée des prix Nobel, médailles Fields et prix Abel » à l'Académie des sciences, Paris, 19 juin 2018.

Publications

LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., *Viscosity solutions and stochastic partial differential equations*, livre à paraître.

LIONS P.-L. et LE BRIS C., *Parabolic Partial Differential Equations with irregular data and applications to Stochastic Differential Equations*, livre à paraître.

LIONS P.-L., « Équations de HJB et extensions de de la théorie classique du contrôle stochastique », *Annuaire du Collège de France 2016-2017. Résumé des cours et travaux*, nº 117, 2019.

FRIZ P.K., GASSIAT P., LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P.E., « Eikonal equations and pathwise solutions to fully non-linear SPDEs », *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, vol. 5, nº 2, 2016, p. 256-277, DOI : 10.1007/s40072-016-0087-9, [arXiv: 1602.04746 hal-01419770].

LIONS P.-L., CARDALIAGUET P., DELAUNE F. et LASRY J.-M., « Existence and uniqueness results for the Master equation of Mean Field Games ».

ACHDOU Y., HAN J., LASRY J.-M., LIONS P.-L. et MOLL B., « Income and wealth distribution in macroeconomics: A continuous-time approach », *National Bureau of Economic Research*, Working Paper nº 23732, 2017, http://www.nber.org/papers/w23732.

CARDALIAGUET P., DELARUE F., LASRY J.-M. et LIONS P.-L., « The master equation and the convergence problem in mean field games », 2015, [arXiv: 1509.02505], http://arxiv.org/abs/1509.02505.

BLANC X., BRIS C.L. et LIONS P.-L., « On correctors for linear elliptic homogenization in the presence of local defects », 2018, [arXiv: 1801.10335], http://arxiv.org/abs/1801.10335.

BLANC X., LE BRIS C. et LIONS P.-L., « On correctors for linear elliptic homogenization in the presence of local defects : the case of advection-diffusion », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2018, DOI : 10.1016/j.matpur.2018.04.010 [arXiv: 1801.10330].

LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P., « Well-posedness for multi-dimensional junction problems with Kirchoff-type conditions », *Matematica e Applicazioni*, vol. 28, nº 4, 2017, p. 807-816, DOI : 10.4171/RLM/786 [arXiv:1704.04001].

LASRY J.-M. et LIONS P.-L., « Mean Field Games with a major player », *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 356, nº 8, 2018, p. 886-890, DOI : 10.1016/j.crma.2018.06.001.

LIONS P.-L. et SOUGANIDIS P., « Scalar conservation laws : Initial and boundary value problems revisited and saturated solutions », *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 356, nº 11, 2018, p. 1167-1178, DOI : 10.1016/j.crma.2018.09.010.