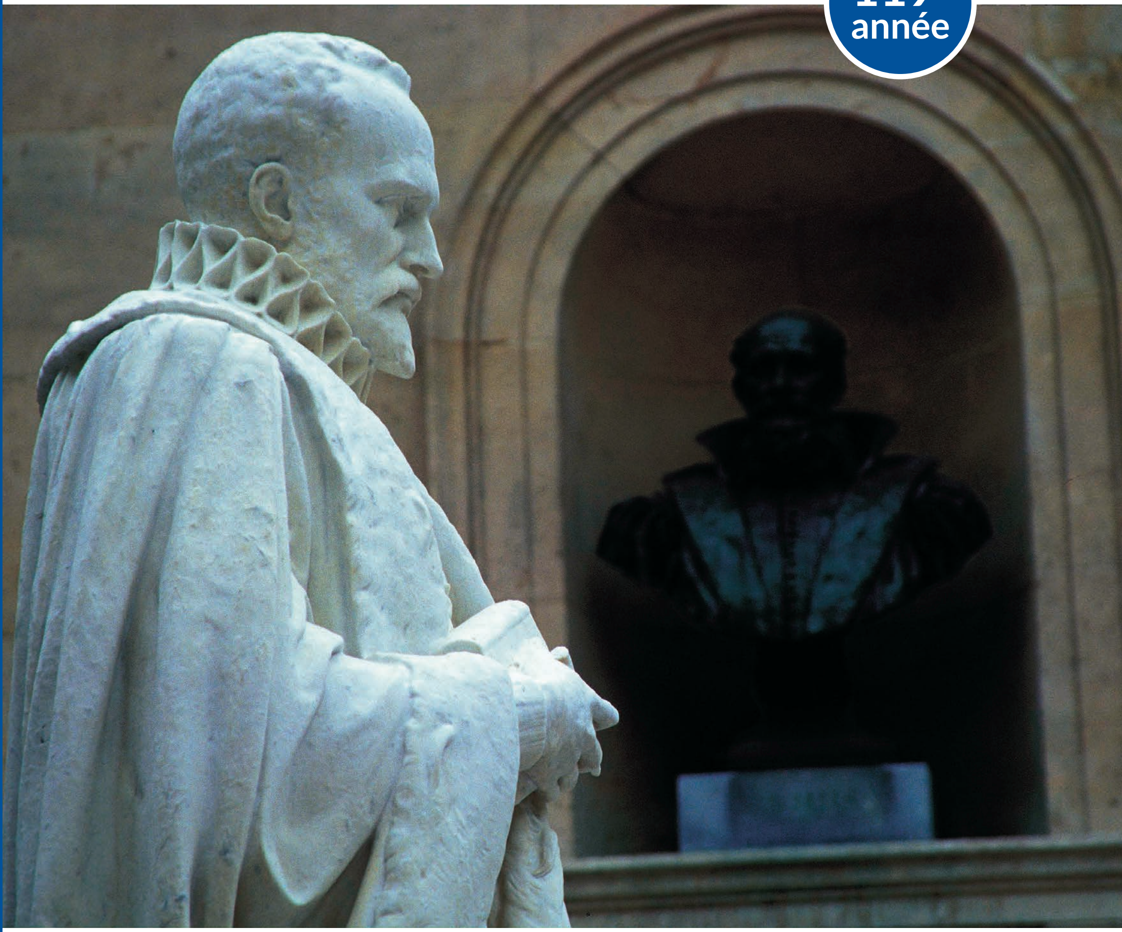
ANNUAIRE
du COLLÈGE DE FRANCE
2018 - 2019

Résumé des cours et travaux

119e année



COLLÈGE
DE FRANCE
1530

Physique statistique

Bernard Derrida
Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : physique, renormalisation

La série de cours et séminaires « La renormalisation vue à travers des exemples » est disponible en audio et vidéo, sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/bernard-derrida/course-2018-2019.htm).

Enseignement

Cours – La renormalisation vue à travers des exemples

Le cours a eu lieu du 14 janvier au 18 février 2019.

Introduction

Depuis plus d'un demi-siècle le groupe de renormalisation est une des approches les plus utilisées en physique statistique pour essayer de relier le monde microscopique au monde macroscopique. Il donne un moyen d'expliquer l'universalité des comportements critiques observés lors des transitions de phase et de calculer de façon systématique les exposants et les fonctions qui caractérisent ces comportements critiques. Il permet aussi d'aborder bien d'autres questions comme la transition vers le chaos, les problèmes de croissance ou de désordre. Le but de ce cours a été d'illustrer par des exemples aussi simples que possible les principales idées liées à cette approche.

B. Derrida, « Physique statistique », *Annuaire du Collège de France 2018-2019. Résumé des cours et travaux*, 119e année, Paris, Collège de France, 2022, p. 71-79, https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.16817.

Cours du 14 janvier 2019

Le premier cours a commencé par une introduction au groupe de renormalisation. C'est une approche omniprésente en physique statistique, importée de la théorie des champs où elle permet de s'affranchir des divergences à courte distance. Même si les idées à la base de la renormalisation sont assez simples, leur mise en œuvre est souvent techniquement assez compliquée. Le but de cette série de cours a été d'expliquer comment cette approche conduit au calcul les comportements critiques caractéristiques des transitions de phase du second ordre et comment la notion d'universalité en découle assez naturellement. L'idée principale du groupe de renormalisation est d'essayer de relier les propriétés à grande échelle d'un système de taille L en dimension d, c'est-à-dire de volume L^d, pour certains choix de paramètres, à celles d'un système plus petit, de taille L/b et donc de volume $(L/b)^d$, avec des valeurs de paramètres modifiées. Plus précisément, on cherche à trouver pour quels choix T', h', ρ' de paramètres comme la température T, le champ magnétique h, la densité ρ, les propriétés à grande échelle d'un système de taille L/b sont semblables à celles d'un système de taille L pour un choix T, h, ρ de ces paramètres. On voit que si on parvient à trouver la fonction R_b qui relie les paramètres renormalisés T', h', ρ'… aux paramètres de départ T, h, ρ…

$$(T', h', \rho'\ldots) = R_b(T, h, \rho\ldots)$$

on peut itérer la transformation de renormalisation et relier ainsi le système de taille L à des systèmes de taille L/b, L/b^2 … L/b^n. Toute la difficulté est de trouver la transformation de renormalisation R_b. Ce premier cours a montré comment déterminer cette fonction R_b de manière approchée dans le cas de trois exemples : la percolation, la transition liquide-gaz et la transition vers le chaos par doublement de période. Une fois la transformation R_b de renormalisation connue, les points fixes attractifs correspondent aux phases possibles tandis que les points fixes hyperboliques représentent les transitions. En particulier les surfaces critiques sont données par les variétés stables des points fixes hyperboliques, ce qui permet d'expliquer l'universalité des comportements critiques : des points de départ différents sur cette variété stable convergent vers le même point fixe et ont ainsi les mêmes comportements à grande échelle. Quant aux exposants critiques, ils peuvent être calculés à partir des valeurs propres instables de ces points fixes hyperboliques.

Cours du 21 janvier 2019

Le deuxième cours a été essentiellement consacré à la renormalisation dans l'espace réel. Dans le cas du modèle d'Ising, l'idée originale due à Kadanoff consiste à regrouper par blocs les spins qui prennent les valeurs ± 1 en blocs (par exemple en blocs de 5 spins) et à définir pour chaque bloc un spin renormalisé égal au signe de la somme des spins du bloc. La principale difficulté de cette approche est la profilération du nombre de couplages (c'est-à-dire des interactions effectives entre les spins renormalisés) qui ne permet pas d'itérer la transformation de renormalisation de manière exacte. On doit alors procéder à des approximations qui consistent à négliger certaines interactions pour pouvoir répéter cette renormalisation par bloc. D'un point de vue théorique, les physiciens se sont intéressés à des modèles de spins sur des réseaux hiérarchiques, dont le principal intérêt est d'éviter la prolifération de ces couplages par renormalisation : d'une certaine manière, les réseaux hiérarchiques sont taillés sur mesure pour la renormalisation. Pour ces réseaux, on peut écrire de manière explicite la transformation des couplages par renormalisation. On en déduit ainsi les valeurs exactes des exposants et on peut décrire avec précision le comportement critique de l'énergie libre au voisinage de la transition. Contrairement à la renormalisation dans l'espace réel, pour les réseaux euclidiens, la renormalisation dans l'espace de Fourier permet de limiter le nombre de couplages lors de la renormalisation lorsqu'on est proche de la dimension supérieure. En prenant l'exemple du modèle d'Edwards qui permet de modéliser une chaîne polymérique en solution, il a été montré comment la dimension critique supérieure $d_c = 4$ apparaît dans ce type de problème.

Cours du 28 janvier 2019

Les effets de taille finie et les fluctuations universelles au voisinage d'une transition du second ordre peuvent eux aussi être compris par le groupe de renormalisation. Pour la plupart des modèles étudiés en physique statistique comme le modèle d'Ising (qui permet de décrire la transition paramagnétique-ferromagnétique ou la transition liquide-gaz), les marches auto-évitantes (qui modélisent les polymères en solution), la percolation, les transitions de phases ne se produisent que dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire que pour des systèmes infiniment grands. Les propriétés des systèmes finis sont le plus souvent des fonctions analytiques des paramètres, comme la température ou la pression, et ne présentent pas de transition de phase *stricto sensu*. On peut néanmoins déterminer la position des transitions de phase et les exposants critiques en étudiant la façon dont ces propriétés physiques dépendent de la taille du système. Ainsi, une quantité comme la susceptibilité magnétique qui diverge à la température critique T_c présente pour des systèmes finis un maximum de plus en plus prononcé quand la taille L du système augmente. Une façon de déterminer de manière précise une température de transition ou les exposants critiques est de mesurer, par exemple pour un modèle d'Ising ferromagnétique, le rapport de Binder entre le quatrième moment de l'aimantation et le carré du second moment. Pour un système fini, ce rapport est une fonction analytique de la température et donc ne présente aucune singularité quand on varie la température. Pour des systèmes de grande taille ($L \gg 1$), il possède néanmoins une forme d'échelle dans le voisinage de la température T_c de transition de phase ferromagnétique-paramagnétique :

$$\frac{\langle M^4 \rangle_L}{\langle M^2 \rangle_L^2} \simeq F\left(L^{\frac{1}{\nu}}(T - T_c)\right)$$

On voit ainsi que si on représente ce rapport en fonction de la température, les courbes pour différentes tailles L se coupent au point critique T_c et que la pente des courbes au point d'intersection augmente comme la taille L du système à la puissance où ν est l'exposant critique de la longueur de corrélation. La dépendance dans la taille d'autres quantités physiques permet d'estimer de même d'autres exposants critiques.

Cours du 4 février 2019

Au cœur de la renormalisation est l'idée qu'un changement d'échelle peut se traduire par un changement de paramètres. Une des situations où ce changement d'échelle est le plus visible est la séparation de phases, lorsqu'on fait passer un fluide d'une phase homogène à une phase de coexistence entre le liquide et le gaz, par exemple en le refroidissant. On voit alors la formation de gouttes qui croissent au cours du temps. Les figures ainsi obtenues à des temps différents se ressemblent à un changement d'échelle près qui dépend du temps. Autrement dit, un changement d'échelle correspond à un changement de temps. Différents types de croissance de domaines peuvent ainsi être considérés, avec conservation ou non du paramètre d'ordre : une croissance de la taille des domaines en $t^{\frac{1}{3}}$ lorsque le paramètre d'ordre est conservé qui découle de la théorie de Lifschitz Slyozov Wagner et en $t^{\frac{1}{2}}$ lorsque le paramètre d'ordre n'est pas conservé, avec une vitesse de déplacement des parois de domaines proportionnelle à la courbure de ces parois, comme dans la théorie de Allen Cahn. Ce cours s'est achevé par le calcul des distributions de tailles de domaines en croissance pour des modèles simples unidimensionnels, comme l'équation de Landau Ginsburg ou le modèle d'Ising à basse température.

Cours du 11 février 2019

Le cinquième cours a été entièrement consacré à la transition de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless. En partant de l'exemple célèbre de la chaîne d'Ising unidimensionnelle avec des interactions en $1/r^2$, qui fut introduit par Anderson, Yval et Hamann en 1971 à propos du problème de Kondo, on peut écrire des équations de renormalisation en combinant, à chaque étape, l'élimination des domaines les plus petits avec un changement d'échelle. L'élimination des petits domaines conduit à une renormalisation de la force de l'interaction en $1/r^2$ et, selon la température initiale, on observe à grande échelle soit une recrudescence de parois de domaines (phase désordonnée), soit un gaz dilué de paires de parois de domaines (phase ferromagnétique). Le même type d'approche s'applique au modèle XY en dimension 2, qui fut introduit pour étudier la transition superfluide de films d'hélium : on élimine à chaque étape de renormalisation les paires de vortex les plus proches, ce qui renormalise les interactions. Le cours s'est achevé en montrant l'équivalence du modèle XY en dimension 2 avec des modèles de surface, comme le modèle de Villain qui présentent une transition rugueuse ou des modèles de gaz de Coulomb bidimensionnels.

Cours du 18 février 2019

En prenant comme exemple le cas d'une chaîne polymérique décrite par le modèle d'Edwards, le sixième cours a montré comment, à partir d'un développement perturbatif en puissance de l'interaction, on peut obtenir des formules de renormalisation au voisinage de la dimension critique supérieure ($d_c = 4$ dans le cas d'une chaîne de polymère) et calculer ainsi les exposants critiques. Le même type d'approche permet de traiter les modèles de spins dans le cadre de la théorie en ϕ^4. Le cours s'est achevé sur la question de l'effet d'un faible désordre sur la nature d'une transition de phase et sur le critère de Harris.

Séminaires – La renormalisation vue à travers des exemples

Séminaire 1 – Promenades dans la renormalisation de Feigenbaum

Jean-Pierre Eckmann (université de Genève), le 14 janvier 2019

À la fin des années 1970, Feigenbaum a montré comment appliquer les idées du groupe de renormalisation au problème de la transition vers le chaos par doublement de période. Partant de la preuve de l'universalité de Feigenbaum, le séminaire de Jean-Pierre Eckmann a tenté d'expliquer ses multiples ramifications : la généralisation à d'autres classes d'universalité, et aussi la généralisation à un nombre arbitraire de dimensions, ce qui a permis de faire le lien avec des résultats expérimentaux. Le séminaire s'est terminé par l'analyse du cas Hamiltonien, pour lequel la constante d'universalité est presque le double de celle du cas original unidimensionnel.

Séminaire 2 – Comment étudier les interfaces d'un système planaire critique ?

Hugo Duminil-Copin (Institut des hautes études scientifiques, Bures-sur-Yvette), le 21 janvier 2019

Au cours des années 1980, les développements de la théorie conforme des champs ont révolutionné la compréhension physique des phénomènes critiques en physique statistique planaire. Une vingtaine d'années plus tard, le mathématicien Oded Schramm introduisit un objet mathématique, dénommé « Évolution de Schramm-Loewner » (SLE), permettant de comprendre mathématiquement comment prouver l'invariance conforme des interfaces de modèles critiques planaires. Grâce à cette découverte, la théorie conforme des champs devint accessible aux mathématiciens. Dans cet exposé, en s'appuyant sur des exemples classiques comme le problème de percolation, Hugo Duminil-Copin a introduit de façon élémentaire les bases de l'approche SLE des systèmes critiques et ses liens avec la théorie conforme des champs.

Séminaire 3 – Le groupe de renormalisation de matrice de densité (DMRG)

Ulrich Schollwöck (université Louis-et-Maximilien de Munich), le 28 janvier 2019

Résoudre des problèmes quantiques avec de nombreux électrons en interaction forte est l'un des problèmes les plus importants et les plus durs de la physique des solides. Même des modèles simplifiés comme le modèle de Hubbard restent très difficiles à étudier, car le temps de calcul et la taille mémoire augmentent en général exponentiellement avec la taille du système. Aussi doit-on faire appel à des méthodes numériques approchées pour essayer d'en prédire les propriétés macroscopiques. L'une des approches qui s'est le plus développée au cours des trente dernières années est le DMRG (*density matrix renormalization group*), qui permet de mettre en œuvre les idées de renormalisation en ne retenant à chaque étape que les états les plus importants des petits systèmes qui constituent un grand système. L'exposé de Ulrich Schollwöck a présenté les principales idées qui sous-tendent cette approche et a montré le lien entre le DMRG et une méthode variationnelle dans l'espace des états qui peuvent être représentés comme des produits matriciels.

Séminaire 4 – La persistance en physique statistique hors d’équilibre

Grégory Schehr (université d’Orsay), le 4 février 2019

La question de la persistance consiste à essayer de calculer comment décroît la probabilité qu’une quantité stochastique ne change pas de signe jusqu’à l’instant *t*. Le séminaire a commencé par une présentation d’exemples théoriques (marche aléatoire, croissance de domaines) et de situations expérimentales (figures de souffle, cristaux liquides, surfaces vicinales) pour lesquels les exposants de persistance ont été mesurés. Le séminaire s’est poursuivi par une description des approches théoriques (calculs exacts, approximations, liens avec les polynômes aléatoires) permettant de déterminer ces exposants de persistance avant de présenter une série de résultats récents sur la persistance dans le cas de l’équation de diffusion en dimension 2.

Séminaire 5 – Un exemple de renormalisation fonctionnelle : les interfaces piégées

Pierre Le Doussal (École normale supérieure), le 11 février 2019

La renormalisation qui remonte aux travaux de Wilson consiste à chercher un point fixe décrit par un petit nombre de paramètres (les constantes de couplage). Ceci n’est possible que dans le cadre d’un développement au voisinage de la dimension critique supérieure. En dehors de ce cas, le nombre de constantes de couplages le plus souvent prolifère sous l’effet de la renormalisation, ce qui rend impossible la détermination des points fixes et des exposants critiques. La renormalisation fonctionnelle consiste à écrire une équation de renormalisation exacte pour un nombre infini de paramètres, autrement dit pour une fonction. Les modèles d’interfaces piégées permettent d’étudier un certain nombre de problèmes différents comme les parois de domaines en présence d’impuretés, les lignes de vortex ou les cristaux en présence d’impuretés. Après avoir présenté le modèle de Larkin qui permet de prédire à la fois la dimension critique supérieure et les exposants, Pierre Le Doussal a montré comment utiliser le groupe de renormalisation fonctionnel combiné à la méthode des répliques dans le cas des interfaces piégées.

Séminaire 6 – Renormalisation de fort désordre : des origines jusqu’aux développements récents

Cécile Monthus (Institut de physique théorique, Saclay), le 18 février 2019

Ce séminaire a examiné les différents problèmes pour lesquels on peut mettre en œuvre le groupe de renormalisation dans le cas de systèmes fortement désordonnés : les chaînes de spins quantiques désordonnés, la diffusion de Sinai, la croissance de domaines en présence ou absence de désordre. L’idée centrale pour attaquer tous ces problèmes par la renormalisation est assez proche de l’idée originale des blocs de Kadanoff : dans l’espace réel on regroupe les spins couplés par les interactions les plus fortes dans le cas des chaînes de spins ; on élimine les barrières les plus basses dans la diffusion de Sinai, on élimine les domaines les plus petits dans le cas de la croissance de domaines.

Cours à l'extérieur – Institut Solvay, Bruxelles

L'importance des grandes déviations pour les systèmes hors d'équilibre

23 octobre 2018

La physique statistique a permis d'unifier à la fin du XIX^e siècle la mécanique de Newton et la thermodynamique. Elle a donné un cadre pour prédire la nature des fluctuations autour des lois physiques macroscopiques énoncées au cours du XIX^e siècle. Ainsi Einstein, dès ses tous premiers travaux, a montré comment l'amplitude des fluctuations permet de mesurer la taille des atomes. Son approche, à l'origine de la théorie de la réponse linéaire, appliquée au rayonnement du corps noir, lui a aussi permis de donner une des premières évidences de la dualité onde particule en mécanique quantique. La physique statistique donne aussi un moyen de prédire les lois de grandes déviations pour les systèmes à l'équilibre. Au cours des deux dernières décennies, de gros efforts ont été faits pour étendre notre compréhension des lois de fluctuations et de grandes déviations aux systèmes hors d'équilibre. Le but principal de ce cours a été de présenter quelques-uns des résultats récents les plus marquants.

Désordre, croissance et exclusion

Les 18, 24, 25 et 26 octobre 2018

D'énormes progrès ont été faits ces dernières années sur les fluctuations et les grandes déviations des systèmes hors d'équilibre. Par exemple, des systèmes aussi différents que des problèmes de croissance de colonies de bactéries, de combustion de papier, de déplacement de parois magnétiques ou de trafic routier relèvent tous d'une même théorie. Ce cours a eu pour but d'introduire cette théorie au cœur de laquelle se trouve l'équation KPZ (Kardar Parisi Zhang) qui date de 1986. Ce cours a tenté de décrire les principaux modèles (modèles d'exclusion, polymères en présence de désordre, sédimentation) qui relèvent de cette théorie ainsi que la grande variété d'approches théoriques possibles montrant en particulier les liens avec la physique quantique de bosons en interaction et avec un autre grand pan de la physique théorique, les matrices aléatoires.

Recherche

Mes travaux de recherche au cours de l'année 2018-2019 ont été dans le prolongement de ceux entrepris au cours de l'année précédente.

La fonction de grande déviation du courant dans des systèmes spatialement périodiques

Avec Karel Proesmans de l'université Hasselt en Belgique, venu passer un semestre postdoctoral au Collège de France en 2018, nous avons considéré la fonction de grande déviation d'une particule évoluant selon une dynamique de Langevin sur un cercle. Dans la limite d'un faible bruit, cette fonction de grande déviation présente un point anguleux quand la vitesse s'annule. En utilisant une approche semi-classique, la méthode WKB, nous avons montré comment comprendre la façon dont ce point anguleux est arrondi à l'ordre dominant dans l'amplitude du bruit. Notre approche est très inspirée des calculs d'instantons en mécanique quantique.

Les grandes déviations pour les systèmes hors d'équilibre

Avec Tridib Sahu du Tata Institute à Bombay, en visite au Collège de France pendant l'année 2018-2019, nous avons poursuivi nos travaux sur les systèmes hors d'équilibre. Nous avons publié deux longs articles consacrés au calcul de fonctions de grandes déviations et de mesures conditionnées par ces grandes déviations. Dans le premier article, nous avons considéré le cas de systèmes stochastiques ayant un petit nombre de degrés de liberté, en particulier le cas d'un processus de Markov et celui d'une équation de Langevin, et montré comment calculer les mesures stationnaires dont la dynamique est conditionnée par la valeur empirique d'une quantité mesurée sur une longue fenêtre de temps. Le second article a été consacré au cas de systèmes diffusifs comportant un grand nombre de degrés de liberté.

La méthode des répliques à deux températures

Avec Peter Mottishaw de l'Université d'Édimbourg, nous avons poursuivi nos travaux sur les verres de spins et la méthode des répliques. Notre travail actuel est d'essayer de comprendre comment fonctionne la méthode des répliques quand on s'intéresse aux *overlaps* entre deux températures, dans le cas très simple du modèle à énergies aléatoires. Un article sur nos principaux résultats est en cours de rédaction.

Désordre et renormalisation

Avec mon étudiant Victor Dagard et en étroite collaboration avec Zhan Shi, professeur de probabilités de Sorbonne Université et de son collaborateur Xinxing Chen, nous avons continué à travailler sur la transition de dépiégeage en présence de désordre. Nous avons surtout étudié une équation de coalescence directement liée à ce problème de dépiégeage. Cette équation possède une famille de solutions invariantes d'échelle. Chacune de ces solutions correspond à un comportement critique différent, et est caractérisée par la décroissance de la distribution du désordre à l'infini. Nous avons montré, en particulier par des simulations numériques, que ces solutions décrivent bien le comportement asymptotique de conditions initiales sur la variété critique. À chacune de ces solutions, on peut associer un arbre aléatoire dont les propriétés de branchement peuvent être complètement décrites à partir de nos solutions invariantes d'échelle.

Publications

Chen X., Dagard V., Derrida B., Hu Y., Lifshits M. et Shi Z., « The Derrida-Retaux conjecture on recursive models », 2019, arXiv : 1907.01601.

Derrida B. et Sadhu T., « Large deviations conditioned on large deviations II: Fluctuating hydrodynamics », 2019, arXiv : 1905.07175.

PROESMANS K. et DERRIDA B, « Large-deviation theory for a Brownian particle on a ring: A WKB approach », *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2019, n° 2, 2019, 023201, https://doi.org/10.1088/1742-5468/aafa7e [https://arxiv.org/abs/1809.10587].

DERRIDA B. et SADHU T., « Large deviations conditioned on large deviations I: Markov chain and Langevin equation », *Journal of Statistical Physics*, vol. 176, n° 4, 2019, p. 773-805, https://doi.org/10.1007/s10955-019-02321-4 [arXiv : 1807.06543].

CHEN X., DERRIDA B., HU Y., LIFSHITS M. et SHI Z., « A max-type recursive model: Some properties and open questions », *in* V. SIDORAVICIUS (dir.), *Sojourns in Probability Theory and Statistical Physics – III*, Singapour, Springer, 2019, p. 166-186, http://dx.doi.org/10.1007/978-981-15-0302-3_6 [arXiv: 1705.04787].

MOTTISHAW P. et DERRIDA B., « Finite size corrections to the Parisi overlap function in the GREM », *Journal of Statistical Physics*, vol. 172, n° 1, 2018, p. 592-610, https://doi.org/10.1007/s10955-018-1953-9 [arXiv : 1710.04611].

DERRIDA B., « Physique statistique », *Annuaire du Collège de France 2016-2017. Résumé des cours et travaux*, 117e année, Paris, Collège de France, 2019, p. 47-54 ; en ligne : https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/13852.