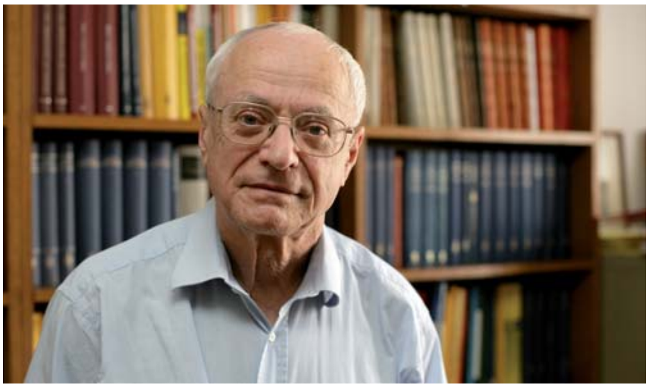

Jean-Pierre Serre, Professeur au Collège de France, titulaire de la chaire d'*Algèbre et géométrie* de 1956 à 1994.

Vous avez enseigné au Collège de France de 1956 à 1994, dans la chaire d'*Algèbre et Géométrie*. Quel souvenir en gardez-vous ?

J'ai occupé cette chaire pendant 38 ans. C'est une longue période, mais il y a des précédents : si l'on en croit l'Annuaire du Collège de France, au XIXe siècle, la chaire de physique n'a été occupée que par deux professeurs : l'un est resté 60 ans, l'autre 40. Il est vrai qu'il n'y avait pas de retraite à cette époque et que les professeurs avaient des suppléants (auxquels ils versaient une partie de leur salaire).

Quant à mon enseignement, voici ce que j'en disais dans une interview de 1986(1) : « Enseigner au Collège est un privilège merveilleux et redoutable. Merveilleux à cause de la liberté dans le choix des sujets et du haut niveau de l'auditoire : chercheurs au CNRS, visiteurs étrangers, collègues de Paris et d'Orsay – beaucoup sont des habitués qui viennent régulièrement depuis cinq, dix ou même vingt ans. Redoutable aussi : il faut chaque année un sujet de cours nouveau, soit sur ses propres recherches (ce que je préfère), soit sur celles des autres ; comme un cours annuel dure environ vingt heures, cela fait beaucoup ! »

Comment s'est passée votre leçon inaugurale ?

À mon arrivée au Collège, j'étais un jeune homme de trente ans. La leçon inaugurale m'apparaissait presque comme un oral d'examen, devant professeurs, famille, collègues mathématiciens, journalistes, etc. J'ai essayé de la préparer. Au bout d'un mois, j'avais réussi à en écrire une demi-page.

Arrive le jour de la leçon, un moment assez solennel. J'ai commencé par lire la demi-page en question, puis j'ai improvisé. Je ne sais plus très bien ce que j'ai dit (je me souviens seulement avoir parlé de l'Algèbre, et du rôle ancillaire qu'elle joue en Géométrie et en Théorie des Nombres). D'après le compte-rendu paru dans le journal *Combat*, j'ai passé mon temps à essuyer machinalement la table qui me séparait du public ; je ne me suis senti à l'aise que lorsque j'ai pris en main un bâton de craie et que j'ai commencé à écrire sur le tableau noir, ce vieil ami des mathématiciens.

Quelques mois plus tard, le secrétariat m'a fait remarquer que toutes les leçons inaugurales étaient rédigées et que la mienne ne l'était pas. Comme elle avait été improvisée, j'ai proposé de la recommencer dans le même style, en me remettant mentalement dans la même situation. Un beau soir, on m'a ouvert un bureau du Collège et l'on m'a prêté un magnétophone. Je me suis efforcé de recréer l'atmosphère initiale, et j'ai refait une leçon sans doute à peu près semblable à l'originale. Le lendemain, j'ai apporté le magnétophone au secrétariat ; on m'a dit que l'enregistrement était inaudible. J'ai estimé que j'avais fait tout mon possible et je m'en suis tenu là. Ma leçon inaugurale est restée la seule qui n'ait jamais été rédigée.

En règle générale, je n'écris pas mes exposés ; je ne consulte pas mes notes (et, souvent, je n'en ai pas). J'aime réfléchir devant mes auditeurs. J'ai le sentiment, lorsque j'explique des mathématiques, de parler à un ami. Devant un ami, on n'a pas envie de lire un texte. Si l'on a oublié une formule, on en donne la structure ; cela suffit. Pendant l'exposé j'ai en tête une quantité de choses qui me permettraient de parler bien plus longtemps que prévu. Je choisis suivant l'auditoire, et l'inspiration du moment.

Seule exception : le séminaire Bourbaki, où l'on doit fournir un texte suffisamment à l'avance pour qu'il puisse être distribué en séance. C'est d'ailleurs le seul séminaire qui applique une telle règle, très contraignante pour les conférenciers.

Quel est la place de Bourbaki dans les mathématiques françaises d'aujourd'hui ?

C'est le séminaire qui est le plus intéressant. Il se réunit trois fois par an, en mars, mai et novembre. Il joue un rôle à la fois social (occasion de rencontres) et mathématique (exposé de résultats récents – souvent sous une forme plus claire que

1. M.Schmidt, *Hommes de Science*, 218-227, Hermann, Paris, 1990.

celle des auteurs) ; il couvre toutes les branches des mathématiques.

Les livres (*Topologie, Algèbre, Groupes de Lie*, ...) sont encore lus, non seulement en France, mais aussi à l'étranger. Certains de ces livres sont devenus des classiques : je pense en particulier à celui sur les systèmes de racines. J'ai vu récemment (dans le *Citations Index* de l'AMS[2]) que Bourbaki venait au 6e rang (par nombre de citations) parmi les mathématiciens français (de plus, au niveau mondial, les nos 1 et 3 sont des Français, et s'appellent tous deux Lions : un bon point pour le Collège). J'ai gardé un très bon souvenir de ma collaboration à Bourbaki, entre 1949 et 1973. Elle m'a appris beaucoup de choses, à la fois sur le fond (en me forçant à rédiger des choses que je ne connaissais pas) et sur la forme (comment écrire de façon à être compris). Elle m'a appris aussi à ne pas trop me fier aux « spécialistes ».

La méthode de travail de Bourbaki est bien connue : distribution des rédactions aux différents membres et critique des textes par lecture à haute voix (ligne à ligne : c'est lent mais efficace). Les réunions (les « congrès ») avaient lieu 3 fois par an. Les discussions étaient très vives, parfois même passionnées. En fin de congrès, on distribuait les rédactions à de nouveaux rédacteurs. Et l'on recommençait. Le même chapitre était souvent rédigé quatre ou cinq fois. La lenteur du processus explique que Bourbaki n'ait publié finalement qu'assez peu d'ouvrages en quarante années d'existence, depuis les années 1930-1935 jusqu'à la fin des années 1970, où la production a décliné.

En ce qui concerne les livres eux-mêmes, on peut dire qu'ils ont rempli leur mission. Les gens ont souvent cru que ces livres traitaient des sujets que Bourbaki trouvait intéressants. La réalité est différente : ses livres traitent de ce qui est utile pour faire des choses intéressantes. Prenez l'exemple de la théorie des nombres. Les publications de Bourbaki en parlent très peu. Pourtant, ses membres l'appréciaient beaucoup, mais ils jugeaient que cela ne faisait pas partie des *Éléments* : il fallait d'abord avoir compris beaucoup d'algèbre, de géométrie et d'analyse.

Par ailleurs, on a souvent imputé à Bourbaki tout ce que l'on n'aimait pas en mathématiques. On lui a reproché notamment les excès des « maths modernes » dans les programmes scolaires. Il est vrai que certains responsables de ces programmes se sont réclamés de Bourbaki. Mais Bourbaki n'y était pour rien : ses écrits étaient destinés aux mathématiciens, pas aux étudiants, encore moins aux adolescents. Notez que Bourbaki a évité de se prononcer sur ce sujet. Sa doctrine était simple : on fait ce que l'on choisit de faire, on le fait du mieux que l'on peut, mais on n'explique pas pourquoi on le fait. J'aime beaucoup ce point de vue qui privilégie le travail par rapport au discours – tant pis s'il prête parfois à des malentendus.

Comment analysez-vous l'évolution de votre discipline depuis l'époque de vos débuts ? Est-ce que l'on fait des mathématiques aujourd'hui comme on les faisait il y a cinquante ans ?

Bien sûr, on fait des mathématiques aujourd'hui comme il y a cinquante ans ! Évidemment, on comprend davantage de choses ; l'arsenal de nos méthodes a augmenté. Il y a un progrès continu. (Ou parfois un progrès par à-coups : certaines branches restent stagnantes pendant une décade ou deux, puis brusquement se réveillent quand quelqu'un introduit une idée nouvelle.)

Si l'on voulait dater les mathématiques « modernes » (un terme bien dangereux), il faudrait sans doute remonter aux environs de 1800 avec Gauss.

Et en remontant plus loin, si vous rencontriez Euclide, qu'auriez-vous à vous dire ?

Euclide me semble être plutôt quelqu'un qui a mis en ordre les mathématiques de son époque. Il a joué un rôle analogue à celui de Bourbaki il y a cinquante ans. Ce n'est pas par hasard que Bourbaki a choisi d'intituler ses ouvrages *Éléments de mathématique* : c'est par référence aux *Eléments* d'Euclide. (Notez aussi que « Mathématique » est écrit au singulier. Bourbaki nous enseigne qu'il n'y a pas plusieurs mathématiques distinctes, mais une seule mathématique. Et il nous l'enseigne à sa façon habituelle : pas par de grands discours, mais par l'omission d'une lettre à la fin d'un mot.)

Pour en revenir à Euclide, je ne pense pas qu'il ait produit des contributions réellement originales. Archimède serait un interlocuteur plus indiqué. C'est lui le grand mathématicien de l'Antiquité. Il a fait des choses extraordinaires, aussi bien en mathématique qu'en physique.

En philosophie des sciences, il y a un courant très fort en faveur d'une pensée de la rupture. N'y a-t-il pas de ruptures en mathématiques ? On a décrit par exemple l'émergence de la probabilité comme une manière nouvelle de se représenter le monde. Quelle est sa signification en mathématiques ?

Les philosophes aiment bien parler de « rupture ». Je suppose que cela ajoute un peu de piment à leurs discours. Je ne vois rien de tel en mathématique : ni catastrophe, ni révolution. Des progrès, oui, je l'ai déjà dit ; ce n'est pas la même chose. Nous travaillons tantôt à de vieilles questions, tantôt à des questions nouvelles. Il n'y a pas de frontière entre les deux. Il y a une grande continuité entre les mathématiques d'il y a deux siècles et celles de maintenant. Le temps des mathématiciens est la « longue durée » de feu mon collègue Braudel.

Quant aux probabilités, elles sont utiles pour leurs applications à la fois mathématiques et pratiques ; d'un point de vue purement mathématique, elles constituent une branche de la théorie de la mesure. Peut-on vraiment parler à leur

2. AMS : American Mathematical Society.

sujet de « manière nouvelle de se représenter le monde » ? Sûrement pas en mathématique.

Est-ce que les ordinateurs changent quelque chose à la façon de faire des mathématiques ?

On avait coutume de dire que les recherches en mathématiques étaient peu coûteuses : des crayons et du papier, et voilà nos besoins satisfaits. Aujourd'hui, il faut ajouter les ordinateurs. Cela reste peu onéreux, dans la mesure où les mathématiciens ont rarement besoin de ressources de calcul très importantes. À la différence, par exemple, de la physique des particules, dont les besoins en calcul sont à la mesure des très grands équipements nécessaires au recueil des données, les mathématiciens ne mobilisent pas de grands centres de calcul.

En pratique, l'informatique change les conditions matérielles du travail des mathématiciens : on passe beaucoup de temps devant son ordinateur. Il a différents usages. Tout d'abord, le nombre des mathématiciens a considérablement augmenté. À mes débuts, il y a 55 ou 60 ans, le nombre des mathématiciens productifs était de quelques milliers (dans le monde entier), l'équivalent de la population d'un village. À l'heure actuelle, ce nombre est d'au moins 100 000 : une ville. Cet accroissement a des conséquences pour la manière de se contacter et de s'informer. L'ordinateur et Internet accélèrent les échanges. C'est d'autant plus précieux que les mathématiciens ne sont pas ralentis, comme d'autres, par le travail expérimental : nous pouvons communiquer et travailler très rapidement. Je prends un exemple. Un mathématicien a trouvé une démonstration mais il lui manque un lemme de nature technique. Au moyen d'un moteur de recherche – comme Google – il repère des collègues qui ont travaillé sur la question et leur envoie un e-mail. De cette manière, il a toutes les chances de trouver en quelques jours ou même en quelques heures la personne qui a effectivement démontré le lemme dont il a besoin. (Bien entendu, ceci ne concerne que des problèmes auxiliaires : des points de détail pour lesquels on désire renvoyer à des références existantes plutôt que de refaire soi-même les démonstrations. Sur des questions vraiment difficiles, mon mathématicien aurait peu de chances de trouver quelqu'un qui puisse lui venir en aide.)

L'ordinateur et Internet sont donc des outils d'accélération de notre travail. Ils permettent aussi de rendre les manuscrits accessibles dans le monde entier, sans attendre leur parution dans un journal. C'est très pratique. Notez que cette accélération a aussi des inconvénients. Le courrier électronique produit des correspondances informelles que l'on conserve moins volontiers que le papier. On jette rarement des lettres alors que l'on efface ou l'on perd facilement les e-mails (quand on change d'ordinateur, par exemple). On a publié récemment (en version bilingue : français sur une page, et anglais sur la page d'en face) ma correspondance avec A. Grothendieck entre 1955 et 1987 ; cela n'aurait pas été possible si elle avait été électronique.

Par ailleurs, certaines démonstrations font appel à l'ordinateur pour vérifier une série de cas qu'il serait impraticable de traiter à la main. Deux cas classiques : le problème des 4 couleurs (coloriage des cartes avec seulement quatre couleurs) et le problème de Képler (empilement des sphères dans l'espace à 3 dimensions). Cela conduit à des démonstrations qui ne sont pas réellement vérifiables ; autrement dit, ce ne sont pas de vraies « démonstrations » mais seulement des faits expérimentaux, très vraisemblables, mais que personne ne peut garantir.

Vous avez évoqué l'augmentation du nombre des mathématiciens. Quelle est aujourd'hui la situation. Où vont les mathématiques ?

L'augmentation du nombre des mathématiciens est un fait important. On pouvait craindre que cela se fasse au détriment de la qualité. En fait, il n'y a rien eu de tel. Il y a beaucoup de très bons mathématiciens (en particulier parmi les jeunes français – un très bon augure).

Ce que je peux dire, concernant l'avenir, c'est qu'en dépit de ce grand nombre de mathématiciens, nous ne sommes pas à court de matière. Nous ne manquons pas de problèmes, alors qu'il y a un peu plus de deux siècles, à la fin du XVIII^{e}, Lagrange était pessimiste : il pensait que « la mine était tarie », qu'il n'y avait plus grand-chose à trouver. Lagrange a écrit cela juste avant que Gauss ne relance les mathématiques de manière extraordinaire, à lui tout seul. Aujourd'hui, il y a beaucoup de terrains à prospecter pour les jeunes mathématiciens (et aussi pour les moins jeunes, j'espère).

Selon un lieu commun de la philosophie des sciences, les grandes découvertes mathématiques sont le fait de mathématiciens jeunes. Est-ce votre cas ?

Je ne crois pas que le terme de « grande découverte » s'applique à moi. J'ai surtout fait des choses « utiles » (pour les autres mathématiciens). En tout cas, lorsque j'ai eu le prix Abel en 2003, la plupart des travaux qui ont été cités par le jury avaient été faits avant que je n'aie 30 ans. Mais si je m'étais arrêté à ce moment-là, on ne m'aurait sans doute pas donné ce prix : j'ai fait aussi d'autres choses par la suite (ne serait-ce que des « conjectures » sur lesquelles beaucoup de gens ont travaillé et travaillent encore).

Dans ma génération, plusieurs de mes collègues ont continué au-delà de 80 ans, par exemple mes vieux amis Armand Borel et Raoul Bott, morts tous deux récemment à 82 ans. Il n'y a pas de raison de s'arrêter, tant que la santé le permet. Encore faut-il que le sujet s'y prête. Quand on a des sujets très larges, il y a toujours quelque chose à faire, mais si l'on est trop spécialisé on peut se retrouver bloqué pendant de longues périodes, soit parce que l'on a démontré tout ce qu'il y avait à démontrer, soit au contraire parce que les problèmes sont trop difficiles. C'est très frustrant.

Les découvertes mathématiques donnent de grandes joies. Poincaré, Hadamard, Littlewood[3] l'ont très bien expliqué. En ce qui me concerne, je garde surtout le souvenir d'une idée qui a contribué à débloquer la théorie de l'homotopie. Cela s'est passé une nuit de retour de vacances, en 1950, dans une couchette de train. Je cherchais un espace fibré ayant telles et telles propriétés. La réponse est venue : l'espace des lacets ! Je n'ai pas pu m'empêcher de réveiller ma femme qui dormait dans la couchette du dessous pour lui dire : ça y est ! Ma thèse est sortie de là, et bien d'autres choses encore. Bien sûr, ces découvertes soudaines sont rares : cela m'est arrivé peut-être deux fois en soixante ans. Mais ce sont des moments lumineux, vraiment exceptionnels.

Le Collège de France est-il un endroit où l'on échange avec d'autres disciplines ?

Non, pas pour moi. Même entre les mathématiciens du Collège, il n'y a pas de travail collectif. Il faut préciser que nous travaillons dans des branches souvent très séparées. Ce n'est pas un mal : le Collège n'est pas censé être un club. Un certain nombre de lieux communs modernes – comme le *travail collectif*, *l'interdisciplinarité* et le *travail en équipe* – ne s'appliquent pas à nous.

Qu'avez-vous pensé du dialogue entre un spécialiste de neurosciences, Jean-Pierre Changeux, et le mathématicien Alain Connes, qui est restitué dans le livre *Matière à pensée* ?

Ce livre est un bel exemple de dialogue de sourds. Changeux ne comprend pas ce que dit Connes, et inversement. C'est assez étonnant. Personnellement, je suis du côté de Connes. Les vérités mathématiques sont indépendantes de nous[4]. Notre seul choix porte sur la façon de les exprimer. Si on le désire, on peut le faire sans introduire aucune terminologie. Considérons par exemple une troupe de soldats. Leur général aime les arranger de deux façons, soit en rectangle, soit en 2 carrés. C'est au sergent de les placer. Il s'aperçoit qu'il n'a qu'à les mettre en rang par 4 : s'il en reste 1 qu'il n'a pas pu placer, ou bien il arrivera à les mettre tous en rectangle, ou bien il arrivera à les répartir en deux carrés.

[Traduction technique : le nombre n des soldats est de la forme $4k+1$. Si n n'est pas premier, on peut arranger les soldats en rectangle. Si n est premier, un théorème dû à Fermat dit que n est somme de deux carrés.]

Quelle est la place des mathématiques par rapport aux autres sciences ? Y a-t-il une demande nouvelle de mathématiques, venant de ces sciences ?

Sans doute, mais il faut séparer les choses. Il y a d'une part la physique théorique, qui est tellement théorique qu'elle est à cheval entre mathématique et physique, les physiciens considérant que ce sont des mathématiques, tandis que les mathématiciens sont d'un avis contraire. Elle est symbolisée par la théorie des cordes. Son aspect le plus positif est de fournir aux mathématiciens un grand nombre d'énoncés, qu'il leur faut démontrer (ou éventuellement démolir).

Par ailleurs, notamment en biologie, il y a tout ce qui relève de systèmes comportant un grand nombre d'éléments qu'il faut traiter collectivement. Il existe des branches des mathématiques qui s'occupent de ces questions. Cela répond à une demande. Il y a aussi des demandes qui concernent la logique : c'est le cas de l'informatique, pour la fabrication des ordinateurs. Il faut mentionner aussi la cryptographie, qui est une source de problèmes intéressants relatifs à la théorie des nombres.

En ce qui concerne la place des mathématiques par rapport aux autres sciences, on peut voir les mathématiques comme un grand entrepôt empli de rayonnages. Les mathématiciens déposent sur les rayons des choses dont ils garantissent qu'elles sont vraies ; ils en donnent aussi le mode d'emploi et la manière de les reconstituer. Les autres sciences viennent se servir en fonction de leurs besoins. Le mathématicien ne s'occupe pas de ce qu'on fait de ses produits. Cette métaphore est un peu triviale, mais elle reflète assez bien la situation. (Bien entendu, on ne choisit pas de faire des mathématiques pour mettre des choses sur les rayons : on fait des mathématiques pour le plaisir d'en faire.)

Voici un exemple personnel. Ma femme, Josiane, était spécialiste de chimie quantique. Elle avait besoin d'utiliser les représentations linéaires de certains groupes de symétries. Les ouvrages disponibles n'étaient pas satisfaisants : ils étaient corrects, mais employaient des notations très lourdes. J'ai rédigé pour elle un exposé adapté à ses besoins, et je l'ai ensuite publié dans un livre intitulé *Représentations Linéaires des Groupes Finis*. J'ai fait mon travail de mathématicien (et de mari) : mis des choses sur les rayons.

Le vrai en mathématiques a-t-il le même sens qu'ailleurs ?

Non. C'est un vrai absolu. C'est sans doute ce qui fait l'impopularité des mathématiques dans le public. L'homme de la rue veut bien tolérer l'absolu quand il s'agit de religion, mais pas quand il s'agit de mathématique. Conclusion : croire est plus facile que démontrer. ■

Interview : Marc Kirsch
Maître de conférences

3. J.E.Littlewood, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen and Co, 1953. Ce livre explique bien la part inconsciente du travail créatif.
4. Il y a quelques années, mon ami R.Bott et moi-même allions recevoir un prix israélien (le prix Wolf) remis dans la Knesseth, à Jerusalem. Bott devait dire quelques mots sur les mathématiques. Il m'a demandé : que dire ? Je lui ai dit « C'est bien simple ; tu n'as qu'à expliquer ceci : les autres sciences cherchent à trouver les lois que Dieu a choisies ; les mathématiques cherchent à trouver les lois auxquelles Dieu a dû obéir. » C'est ce qu'il a dit. La Knesseth a apprécié.