Analyse et géométrie

Alain Connes

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : analyse, géométrie, site des fréquences

Enseignement

Cours – Le site des fréquences

1. Introduction

Mon cours cette année a pour objet le site des fréquences qui est un topos de Grothendieck muni d'un faisceau structurel. Les résultats ont été obtenus en collaboration avec C. Consani [2], [3], [4], [5].

Le site des fréquences $[0,\infty) \ltimes \mathbb{N}^{\times}$ est obtenu à partir du site arithmétique $\mathcal{A}$ de [2, 3] par extension des scalaires du semicorps booléen $\mathbb{B}$ au semicorps tropical $\mathbb{R}_{+}^{\max}$. C'est le produit semi-direct de la demi-droite euclidienne $[0,\infty)$ par l'action du semi-groupe $\mathbb{N}^{\times}$ des entiers positifs par multiplication. Ses points sont les mêmes que ceux du site arithmétique définis sur $\mathbb{R}_{+}^{\max}$ et forment le quotient de l'espace des classes d'adèles de $\mathbb{Q}$ par l'action du sous-groupe compact maximal du groupe des classes d'idèles. Le faisceau structurel du site des fréquences en fait une courbe tropicale dans le topos $\widehat{\mathbb{N}^{\times}}$. La restriction de cette structure aux orbites périodiques donne, pour chaque nombre premier p, un analogue $C_p = \mathbb{R}_{+}^{*}/p^{\mathbb{Z}}$ d'une courbe elliptique $\mathbb{C}^{*}/q^{\mathbb{Z}}$. Les fonctions rationnelles, les diviseurs et le problème de Riemann-Roch ont un sens et le degré d'un diviseur prend toute valeur réelle. Nous déterminons le quotient du groupe des diviseurs par le sous-groupe des diviseurs principaux et montrons (théorème 5.3) que c'est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/((p-1)\mathbb{Z})$. À chaque diviseur D est associé un problème de Riemann-Roch dont l'espace des solutions est noté $H^0(D)$. Nous définissons la dimension continue $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D)) \in \mathbb{R}_{+}$ de ce $\mathbb{R}_{\max}$-module comme limite des dimensions topologiques normalisées. Nous montrons (théorème 5.5) la formule de Riemann-Roch pour C_p. Les dimensions à valeurs réelles impliquées dans la formule de Riemann-Roch viennent de la densité dans $\mathbb{R}$ du sous-groupe $H_p \subset \mathbb{Q}$ des fractions ayant pour dénominateur une puissance de p et de la définition des dimensions comme limites quand $n \to \infty$ des dimensions normalisées $p^{-n} \dim_{\rm top}(H^0(D)^{p^n})$. C'est l'analogue en caractéristique 1 de la dimension continue de type II pour les modules sur les C^*-algèbres [6].

2. Le site des fréquences

Le site des fréquences $[0,\infty) \ltimes \mathbb{N}^\times$ est, en tant que site, donné par une petite catégorie C munie d'une topologie de Grothendieck J. Les objets de C sont les intervalles ouverts bornés $\Omega \subset [0,\infty)$. Les morphismes entre deux objets sont donnés par $\mathrm{Hom}_C(\Omega, \Omega') = \{n \in \mathbb{N}^\times \mid n\Omega \subset \Omega'\}$ si $\Omega \neq \emptyset$, et avec l'ensemble vide comme objet initial, *i.e.* $\mathrm{Hom}_C(\emptyset, \Omega')$ est l'ensemble à un élément pour tout objet de C. La catégorie C admet des produits fibrés et la topologie de Grothendieck J de C est donnée par une base (cf. [9], définition III.2).

Proposition 2.1 *(i) Pour tout objet Ω de C, soit $K(C)$ la collection des recouvrements ouverts usuels $\{\Omega_{\rm i} \subset \Omega, i \in I \mid \cup\Omega_{\rm i} = \Omega\}$. Alors K définit une topologie de Grothendieck J sur C.*
(ii) La catégorie $\mathfrak{Sh}(C,J)$ des faisceaux est canoniquement isomorphe à celle des faisceaux $\mathbb{N}^\times$-équivariants sur $[0,\infty)$.

Définition 2.2 *Le site des fréquences $[0,\infty) \ltimes \mathbb{N}^\times$ est la petite catégorie C munie de la topologie de Grothendieck J. Le topos des fréquences est $\mathfrak{Sh}(C,J)$.*

3. Les points du topos des fréquences

Rappelons ([3]) que l'espace $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^{\max})$ des points du site arithmétique sur [1] $\mathbb{R}_+^{\max}$ est réunion de deux sous-espaces :
(i) Les points définis sur $\mathbb{B}$: ce sont les points de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ et ils forment l'espace $\mathbb{Q}_+^\times \backslash \mathbb{A}^f / \hat{\mathbb{Z}}^*$ des classes d'adèles dont la composante archimédienne est nulle.
(ii) Les points de $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^{\max}) \backslash \mathcal{A}(\mathbb{B})$ sont en bijection canonique avec l'espace

$$\mathbb{Q}_+^\times \backslash \big((\mathbb{A}^f / \hat{\mathbb{Z}}^*) \times \mathbb{R}_+^*\big)$$

des classes d'adèles dont la composante archimédienne est non nulle. Ces points correspondent à l'espace $\mathfrak{R}$ des sous-groupes de rang un de $\mathbb{R}$ par l'application

$$(a,\lambda) \mapsto \lambda H_a, \ \forall a \in \mathbb{A}_f / \hat{\mathbb{Z}}^*, \ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \ H_a := \{q \in \mathbb{Q} \,|\, qa \in \hat{\mathbb{Z}}\}.$$

Le théorème suivant montre que les points du topos des fréquences $\mathfrak{Sh}(C,J)$ sont en bijection canonique avec $\mathcal{A}(\mathbb{R}_+^{\max})$. Les points du topos $\mathfrak{Sh}(C,J)$ associé à un site sont donnés par les foncteurs plats et continus $F : C \to \mathfrak{Ens}$ (*cf.* [9] VII.6 corollaire 4). Dans notre contexte, nous définissons le support d'un tel foncteur comme le complémentaire de la réunion des intervalles ouverts I tels que $F(I) = \emptyset$.

1. Pour tout groupe abélien ordonné H on note $H_{\max} = H \cup \{-\infty\}$ le semicorps obtenu par la construction max-plus, *i.e.* l'addition est donnée par le max, et la multiplication par $+$. En particulier $\mathbb{R}_{\max}$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^{\max}$ par l'application exponentielle (cf. [8]).

Théorème 3.1 *(i) La catégorie des points du topos des fréquences de support* $\{0\}$ *est isomorphe à celle des points de* $\widehat{\mathbb{N}^\times}$.
(ii) La catégorie des points du topos des fréquences de support différent de $\{0\}$ *est canoniquement isomorphe à la catégorie des sous-groupes de rang un,* $H \subset \mathbb{R}$.

La construction des points repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3.2 *(i) Soit* $H \subset \mathbb{R}$ *sous-groupe de rang un, alors* $F_H(V) := V \cap H_+$ *définit un foncteur plat et continu* $F_H : C \to \mathfrak{Ens}$.
(ii) L'application $H \mapsto \mathfrak{p}_H$ *qui associe à un sous-groupe de rang un de* $\mathbb{R}$ *le point de* $\mathfrak{Sh}(C,J)$ *représenté par le foncteur plat et continu* F_H *est une injection de* $\mathfrak{R}$ *dans l'espace des points, à isomorphisme près, du topos des fréquences.*

On montre que la construction ci-dessus donne tous les points de support différent de $\{0\}$. Les points de support $\{0\}$ sont les mêmes que ceux de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$.

Lemme 3.3 *Soit* $F : C \to \mathfrak{Ens}$ *un foncteur plat et continu tel que* $F(V) = \emptyset$ *si* $0 \notin V$. *Il existe alors un unique foncteur plat* $X : \mathbb{N}^\times \to \mathfrak{Ens}$ *tel que* $F(V) = X$ *pour tout objet* V *de* C *contenant* 0.

4. Le faisceau structurel $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_+^{\max}$

La transformation de Legendre permet de décrire le semi-anneau $\mathbb{Z}_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_+^{\max}$ impliqué dans l'extension des scalaires de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{R}_+^{\max}$ pour le site arithmétique, en termes de fonctions convexes affines par morceaux, de pentes entières sur $[0, \infty)$.

4.1. Extension des scalaires et transformée de Legendre

Soit $H \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe de rang un et considérons le produit tensoriel $H_{\max} \otimes_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_{\max}$ et le semi-anneau simplifiable associé $R = H_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_{\max}$ dont les éléments sont les polygones de Newton dont les sommets sont des couples $(x, y) \in H \times \mathbb{R}$ ([3]). Soit $Q = H_+ \times \mathbb{R}_+$. Tout élément de R est enveloppe convexe N de la réunion d'un nombre fini de quadrants $(x_j, y_j) - Q$ et donc l'intersection de demi-plans $P \subset \mathbb{R}^2$ de la forme $P_{\lambda,u} := \{(x, y) \mid \lambda x + y \leq \mathrm{u}\}$, $P^v := \{(x, y) \mid x \leq v\}$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $u, v \in \mathbb{R}$. Cette description montre que N est uniquement déterminé par la fonction $\ell_N(\lambda) := \min\{u \in \mathbb{R} \mid N \subset P_{\lambda, u}\}$, qui est donnée en termes des sommets (x_j, y_j) du polygone de Newton N par

$$\ell_N(\lambda) = \max_j \lambda x_j + y_j. \tag{1}$$

Proposition 4.1 *Soit* $H \subset \mathbb{R}$ *un sous-groupe de rang un. L'appication* $N \mapsto \ell_N$ *est un isomorphisme d'anneau simplifiable de* $R = H_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_{\max}$ *avec le semi-anneau* $\mathcal{R}(H)$ *des fonctions convexes continues affines par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités de la dérivée) sur* $[0, \infty)$ *de pentes dans* $H \subset \mathbb{R}$, *muni des opérations ponctuelles.*

4.2. Les fibres du faisceau structurel $\mathcal{O}$

La proposition 4.1 donne la relation entre le semi-anneau réduit $\mathbb{Z}_{\max} \hat{\otimes}_{\mathbb{B}} \mathbb{R}_+^{\max}$ prescrit par l'extension des scalaires du site arithmétique de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{R}_+^{\max}$ et le semi-anneau $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$. Le faisceau structurel $\mathcal{O}$ de $[0, \infty) \ltimes \mathbb{N}^\times$ est défini en localisant le semi-anneau $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$. Les sections $\xi \in \mathcal{O}(\Omega)$ sur un ouvert $\Omega \subset [0, \infty)$ sont les fonctions convexes continues affines par morceaux sur Ω de pentes dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. L'action de $\mathbb{N}^\times$ sur $\mathcal{O}$ est donnée par les morphismes

$$\gamma_n : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\frac{1}{n}\Omega),\ \gamma_n(\xi)(\lambda) := \xi(n\lambda), \quad \forall \lambda \in [0,\infty),\ n \in \mathbb{N}^\times. \tag{2}$$

Pour $\xi(\lambda) = \max\{\lambda h_j + s_j\}$ comme dans (1) on a $\xi(n\lambda) = \max\{\lambda n h_j + s_j\}$ d'où $\gamma_n(\xi) \in \mathcal{O}(\frac{1}{n}\Omega)$. Ces morphismes ne sont pas inversibles.

Théorème 4.2 *(i) Soit $H \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe de rang un de $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{p}_H$ le point associé du site des fréquences. La fibre en $\mathfrak{p}_H$ du faisceau structurel $\mathcal{O}$ est le semi-anneau $\mathcal{O}_{\mathrm{H}}$ des germes de fonctions convexes continues affines par morceaux, de pentes dans H à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$.*
(ii) Soit H un groupe abélien ordonné de rang un et $\mathfrak{p}_H^o$ le point associé, de support $\{0\}$, du site des fréquences. La fibre en $\mathfrak{p}_H^o$ du faisceau structurel $\mathcal{O}$ est le semi-anneau $\mathcal{Z}_H = (\mathbb{R} \times H)_{\max}$ associé par la construction max-plus au groupe totalement ordonné $\mathbb{R} \times H$ muni de l'ordre lexicographique.

Les germes en $\lambda = 1$ de fonctions $f(\lambda)$ convexes continues affines par morceaux, à pentes dans H et à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$ sont caractérisés par un triplet (x, h_+, h_-), tel que $f(1 \pm \varepsilon) = x \pm h_\pm \varepsilon$ pour $\varepsilon \geq 0$ assez petit. On a $x \in \mathbb{R}$, $h_\pm \in H$, $h_+ \geq h_-$. Le seul élément additionel du semi-anneau $\mathcal{R}_H$ correspond au germe de la fonction constante $-\infty$. Cette fonction est le « zéro » du semi-anneau. Décrivons la structure de semi-anneau sur les éléments non nuls de $\mathcal{R}_H$, l'« addition » $\vee$ est donnée par le max :

$$(x, h_+, h_-) \vee (x', h'_+, h'_-) := \begin{cases} (x, h_+, h_-) \text{ if } x > x' \\ (x', h'_+, h'_-) \text{ if } x' > x \\ (x, h_+ \vee h'_+, h_- \wedge h'_-) \text{ if } x = x' \end{cases}$$

Le « produit » est donné par $(x, h_+, h_-) \bullet (x', h'_+, h'_-) := (x + x', h_+ + h'_+, h_- + h'_-)$.

Nous notons $\hat{\mathcal{A}}$ le topos semi-annelé $([0,\infty) \ltimes \mathbb{N}^\times, \mathcal{O})$. Le faisceau structurel est formé de semi-anneaux sur $\mathbb{R}_+^{\max}$ et comme pour le site arithmétique site il n'admet pas de section globale non constante. L'énoncé suivant montre que l'extension des scalaires de $\mathcal{A}$ à $\hat{\mathcal{A}}$ ne modifie pas les points sur $\mathbb{R}_+^{\max}$.

Théorème 4.3 *La projection canonique des points de $\hat{\mathcal{A}}$ définis sur $\mathbb{R}_+^{\max}$ vers les points du topos des fréquences est bijective.*

Pour obtenir la notion de fonction rationnelle dans notre contexte on procède comme pour les diviseurs de Cartier en considérant le faisceau des semicorps de fractions du faisceau structurel $\mathcal{O}$.

Proposition 4.4 P*our tout objet Ω de C le semi-anneau $\mathcal{O}(\Omega)$ est simplifiable et le morphisme canonique vers le semi-corps de fractions $\mathcal{K}(\Omega)$ est l'inclusion des fonctions continues, convexes, affines par morceaux, parmi les fonctions continues affines par morceaux, munies des opérations max et plus.*

L'action naturelle de $\mathbb{N}^\times$ sur $\mathcal{K}$ définit un faisceau de semi-corps sur le site des fréquences. On détermine ses fibres de la même manière que pour le faisceau structurel $\mathcal{O}$. On n'a plus la convexité, *i.e.* la différence $h_+ - h_- \in H \subset \mathbb{R}$ n'est plus positive en général.

Définition 4.5 *Soit $\mathfrak{p}_H$ le point du topos des fréquences associé au sous-groupe de rang un $H \subset \mathbb{R}$ et soit f un élément de la fibre de $\mathcal{K}$ en $\mathfrak{p}_H$. L'ordre de f est défini par* $\mathrm{Ordre}_H(f) = h_+ - h_- \in H \subset \mathbb{R}$.

4.3. Localisation des zéros des fonctions analytiques

Le site des fréquences est étroitement lié à la localisation des zéros des fonctions analytiques, aussi bien dans le domaine p-adique que dans le cas complexe. L'action de $\mathbb{N}^\times$ correspond à la transformation $f(z) \mapsto f(z^n)$ des fonctions analytiques.

Soit $\mathbb{C}_p$ la complétion de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $v(x) := -\log|x|$ la valuation. La tropicalisation d'une série de Laurent $f(X) = \sum a_n X^n$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ qui converge dans une couronne $A(r_1, r_2) = \{z \in K \mid r_1 < |z| < r_2\}$ est la fonction à valeurs réelles

$$\tau(f)(x) := \max_n \{-nx - v(a_n)\}, \quad \forall x \in (-\log r_2, -\log r_1). \tag{3}$$

Cette notion est classique en analyse p-adique et on a (*cf.* [12] chap. 6, proposition 1.4.2) $\tau(fg)(x) = \tau(f)(x) + \tau(g)(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$, et le résultat classique.

Théorème 4.6 *Soit $f(X) = \sum a_n X^n$ une série de Laurent à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, convergente dans une couronne $A(r_1, r_2) = \{z \in K \mid r_1 < |z| < r_2\}$. Alors les valuations $v(z_i)$ de ses zéros $z_i \in A(r_1, r_2)$ (comptés avec multiplicités) sont les zéros (au sens tropical) de la tropicalisation $\tau(f)$ dans* $(-\log r_2, -\log r_1)$.

Quand $\mathbb{C}_p$ est remplacé par $\mathbb{C}$ le module $|f(z)|$ n'est plus génériquement constant sur le cercle de rayon r et on remplace (3), pour $f(z)$ holomorphe dans la couronne $A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ par

$$\tau(f)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(e^{-x+i\theta})|\, d\theta.$$

On a $\tau(fg)(x) = \tau(f)(x) + \tau(g)(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$. Et la formule de Jensen donne :

Théorème 4.7 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne $A(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ et $z_i \in A(r_1, r_2)$ ses zéros comptés avec multiplicités. Alors les $-\log|z_i|$, sont les zéros (au sens tropical) de la tropicalisation $\tau(f)$ dans* $(-\log r_2, -\log r_1)$.

Prenons $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $A(r_1, r_2)$ est le disque pointé $D(0,1) \setminus \{0\}$. Dans ce cas les fonctions $\tau(f)$ sont convexes affines par morceaux sur $(0, \infty)$ et l'action de $\mathbb{N}^\times$ sur $[0, \infty)$ qui définit le site des fréquences correspond à l'action de $\mathbb{N}^\times$ sur les fonctions donnée par $f(z) \mapsto f(z^n)$

$$\tau(f(z^n))(x) = \tau(f)(nx), \quad \forall x \in (0, \infty), \ n \in \mathbb{N}^\times. \tag{4}$$

5. Le théorème de Riemann-Roch sur les orbites périodiques

Soit p un nombre premier, considérons le sous-espace C_p des points $\mathfrak{p}_H$ de $[0, \infty) \ltimes \mathbb{N}^\times$ correspondants aux sous-groupes $H \subset \mathbb{R}$ abstraitement isomorphes au groupe $H_p \subset \mathbb{Q}$ des fractions de dénominateur une puissance de p.

Lemme 5.1 *L'application* $\mathbb{R}_+^* \to C_p$, $\lambda \mapsto H_p$ *induit un isomorphisme* η_p : $\mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}} \to C_p$. *La restriction (par* η_p*) du faisceau structurel* $\mathcal{O}$ *est le faisceau* $\mathcal{O}_p$ *sur* $\mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}$ *des fonctions continues convexes affines par morceaux de pentes dans* H_p.

Nous utilisons la notion d'ordre en un point de la définition 4.5 pour les sections globales du faisceau $\mathcal{K}_p$ des semicorps de fractions associé au faisceau $\mathcal{O}_p$.

Lemme 5.2 *(i) Le faisceau* $\mathcal{K}_p$ *des semi-corps de fractions associé au faisceau* $\mathcal{O}_p$ *est le faisceau, sur* $\mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}$, *des fonctions continues affines par morceaux de pentes dans* H_p *munies des opérations de max et plus.*
(ii) Le faisceau $\mathcal{K}_p$ *a des sections globales et pour* $f \in H^0(\mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}, \mathcal{K}_p)$ *on a :*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*/p^{\mathbb{Z}}} \mathrm{Ordre}_\lambda(f) = 0, \text{ où } \mathrm{Ordre}_\lambda(f) := \mathrm{Ordre}_{\lambda H_p}(f \circ \eta_p^{-1}) \in \lambda H_p, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* / p^{\mathbb{Z}}.$$

Un diviseur D sur C_p est une application $H \mapsto D(H) \in H$ qui associe à tout $H \in C_p$ un élément du groupe correspondant et qui est nulle sauf pour un nombre fini de $H \in C_p$. Nous définissons un invariant des diviseurs. Il prend ses valeurs dans le groupe $H_p / (p-1)H_p \simeq \mathbb{Z} / (p-1)\mathbb{Z}$. Pour $H \in C_p$, les éléments $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $H = \lambda H_p$ déterminent des isomorphismes $\lambda^{-1} : H \to H_p$ uniques à multiplication près par une puissance de p, ce qui montre que l'application $\chi : H \to H_p / (p-1) H_p \simeq \mathbb{Z} / (p-1)\mathbb{Z}$ est bien définie. Pour tout diviseur D sur C_p on pose

$$\deg(D) := \sum D(H) \in \mathbb{R}, \quad \chi(D) := \sum \chi(D(H)) \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}.$$

Les diviseurs forment un groupe pour l'addition des sections et les applications $\deg : \mathrm{Div}(C_p) \to \mathbb{R}$ et $\chi : \mathrm{Div}(C_p) \to \mathbb{Z} / (p-1)\mathbb{Z}$ sont des homomorphismes de groupes. Le diviseur principal associé à $f \in H^0(\mathbb{R}_+^*/p^{\mathbb{Z}}, \mathcal{K}_p)$ est donné par l'ordre de f en H pour tout H. On note $\mathcal{P}$ le sous-groupe des diviseurs principaux.

Théorème 5.3 *L'homomorphisme*

$$(\deg, \chi) : \mathrm{Div}(C_p)/\mathcal{P} \to \mathbb{R} \times (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}). \tag{5}$$

est un isomorphisme du quotient $J(C_p) = \mathrm{Div}(C_p)/\mathcal{P}$ *du groupe des diviseurs par le sous-groupe des diviseurs principaux.*

Soit $D \in \mathrm{Div}(C_p)$ un diviseur, on définit un module sur $\mathbb{R}_+^{\max}$:

$$H^0(D) = \Gamma(C_p, \mathcal{O}(D)) = \{f \in \mathcal{K}(C_p) \mid D + (f) \geq 0\}.$$

Définition 5.4 *Soit* $f \in \Gamma(C_p, \mathcal{K}_p)$. *On note* $|h|_p$ *la norme p-adique des éléments de* H_p *et on pose :*

$$\| f \|_p := \max\{ |h(\lambda)|_p / \lambda \mid \lambda \in C_p\} \tag{6}$$

où $h(\lambda) \in H_p$ *est la pente*[2] *de* f *en* λ.

2. En un point de discontinuité des pentes on prend le plus grande des deux valeurs $|h_\pm(\lambda)|_p/\lambda$ dans (6).

Soit $D \in \mathrm{Div}(C_p)$ un diviseur. On introduit une filtration croissante de $H^0(D)$ par les $\mathbb{R}_{\max}$-sous-modules :

$$H^0(D)^\rho := \{f \in H^0(D) \mid \| f \|_p \leq \rho\}.$$

On note $\dim_{\mathrm{top}}(\mathcal{E})$ la dimension topologique de Lebesgue (*cf.* [11]) d'un $\mathbb{R}_{\max}$-module $\mathcal{E}$ et on pose

$$\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D)) := \lim_{n\to\infty} p^{-n} \dim_{\mathrm{top}}(H^0(D)^{p^n}). \tag{7}$$

On montre la convergence et le théorème de Riemann-Roch :

Théorème 5.5 *(i) Soit* $D \in \mathrm{Div}(C_p)$ *un diviseur tel que* $\deg(D) \geq 0$*. Alors (7) converge et on a* $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D)) = \deg(D)$*.*
(ii) On a la formule de Riemann-Roch

$$\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D)) - \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(-D)) = \deg(D), \qquad \forall D \in \mathrm{Div}(C_p).$$

On peut comparer le théorème 5.5 avec les résultats de [1, 7, 10] en géométrie tropicale. Plus précisément soit C la courbe tropicale elliptique donnée par un cercle de longueur L. Dans ce cas, le groupe $\mathrm{Div}(C)/\mathcal{P}$ des classes de diviseurs s'insère dans une suite exacte (cf. [10]) :

$$0 \to \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathrm{Div}(C)/\mathcal{P} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

alors que pour C_p on a en utilisant (5) :

$$0 \to \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \to \mathrm{Div}(C_p)/\mathcal{P} \xrightarrow{\deg} \mathbb{R} \to 0$$

La différence est due à la nature du faisceau structurel de C_p lorsqu'on l'exprime en termes de la variable $u = \log \lambda$ qui transforme la condition $f(px) = f(x)$ en l'invariance par les translations multiples de $\log p$. La condition « f affine par morceaux » pour le paramètre λ devient, en la variable u, $\Delta' f = 0$, où Δ' est l'opérateur elliptique invariant par translations $\Delta'(f) := \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 f - \frac{\partial}{\partial u} f$ qui en terme de la variable $\lambda = e^u$ devient $\lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^2$.

Références

[1] M. Baker et S. Norine, « Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph », *Advances in Mathematics*, vol. 215, 2007, p. 766-788.
[2] A. Connes et C. Consani, « The arithmetic site », *Comptes rendus mathématiques Ser. I*, vol. 352, 2014, p. 971-975.
[3] A. Connes et C. Consani, « Geometry of the arithmetic site », *Adv. Math.*, vol. 291, 2016, p. 274-329.
[4] A. Connes et C. Consani, « The scaling site », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 354, n° 1, 2016, p. 1-6.
[5] A. Connes et C. Consani, « Geometry of the scaling site », arXiv:1603.03191.

[6] J. Dixmier, « On some C^*-algebras considered by Glimm », *J. Functional Analysis*, vol. 1, 1967, p. 182-203.
[7] A. Gathmann et M. Kerber, « A Riemann-Roch theorem in tropical geometry », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 259, 2008, p. 217-230.
[8] S. Gaubert, « Methods and applications of (max, +) linear algebra », *STACS,* 97 (Lubek), Lecture Notes.
[9] S. Mac Lane et I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, corrected reprint of the 1992 edition, New York, Springer-Verlag, Universitext, 1994.
[10] G. Mikhalkin et I. Zharkov, « Tropical curves, their Jacobians and theta functions », C*urves and abelian varieties*, *Contemp. Math.*, vol. 465, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, p. 203-230.
[11] A. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge (GB) / New York / Melbourne, Cambridge University Press, 1975.
[12] A. Robert, « A course in p-adic analysis », *Graduate Texts in Mathematics,* 198, New York, Springer-Verlag, 2000.

Conférences

- Août 2015, une conférence à bord du Finnmarken, Abel Symposium 2015.
- Septembre 2015, deux conférences à Trieste.
- Octobre 2015, une conférence à Édimbourg.
- Novembre 2015, une conférence à Luminy.
- Mars 2016, six conférences à Munich.
- Avril 2016, une conférence à Nijmegen.
- Avril 2016, trois conférences à Copenhague, Bohr lectures.
- Mai 2016, cinq conférences à Ohio State University, Columbus, Ohio, États-Unis.
- Juin 2016, une conférence à Paris, colloque en l'honneur de Louis Boutet de Monvel.

Publications

Connes A., « An essay on the Riemann Hypothesis », *in* J. Nash, J. Forbes et M. Rassias (dir.), *Open problems in mathematics*, New York, Springer, 2016, p. 225-257.

Connes A. et Consani C., « Geometry of the arithmetic site », *Adv. Math.*, vol. 291, 2016, p. 274-329.

Connes A. et Consani C., « The scaling site », *C.R Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 354, nº 1, 2016, p. 1-6.

Connes A. et Consani C., « Absolute algebra and Segal's Γ-rings », *J. Number Theory*, vol. 162, 2016, p. 518-551.