I Matière active polaire "sèche"

Nous considérons des objets anisotropes avec une orientation $\vec{p}$ sur un substrat et nous partons des équations hydrodynamiques

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \vec{j} = \rho v_0 \vec{p} - \frac{1}{\gamma_\rho}\vec{\nabla}\mu$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \lambda_1 (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{p} = -\frac{1}{\gamma_p}\frac{\delta F}{\delta \vec{p}} + \vec{\xi}(t) \quad (\text{bruit blanc})^{(?)}$$

On suppose ici qu'il existe une énergie libre $F = \int d\vec{r}\, f(\vec{p},\rho)$ et $\mu = \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\delta F}{\delta \rho}$

1. Théorie de Toner et Tu   J. Toner Y. H. Tu Phys Rev Lett (1995)

L'énergie libre est obtenue en écrivant les termes qui respectent les symétries. Nous supposons que la densité moyenne est ρ_0 et que la densité locale est $\rho_0 + \delta\rho$. (On obtient la même structure d'équation avec une approche microscopique

$$F = \int d\vec{r} \left\{ \left[\alpha(\rho)\frac{p^2}{2} + \beta\frac{p^4}{4}\right] + \frac{1}{2}K(\partial_\alpha p_\beta \partial_\alpha p_\beta) + \frac{1}{2\chi}\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 + \frac{W}{2}p^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) - w_1(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})\frac{\delta\rho}{\rho_0} + w_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) \right\}$$

Le système est polaire et il n'y a pas d'invariance $\vec{p} \to -\vec{p}$. Cette symétrie autorise un terme $(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})\, h(\delta\rho, \vec{p}^2)$. Le premier terme est l'énergie de Landau d'un modèle magnétique de Heisenberg et le deuxième l'énergie de courbure des cristaux liquides nématiques (en supposant égales les 3 constantes de Frank). χ est la compressibilité (?) (2 à 2 dimensions)

α est une fonction de ρ qui s'annule si $\rho = \rho_c$, on écrira $\alpha = \alpha_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right)$

Si le système est homogène $\delta\rho = 0$ et l'énergie libre est celle d'une théorie de Landau avec un paramètre d'ordre $\vec{p}$. A faible densité $\rho_0 < \rho_c$ $\vec{p} = \vec{0}$ le système n'est pas polaire. Il y a une transition de phase si $\rho_0 = \rho_c$. Si $\rho_0 > \rho_c$ le système est polaire et $\vec{p}$ est obtenu en minimisant l'énergie libre $p^2 = \frac{-\alpha(\rho_0)}{\beta}$. Le flux de particules est alors $\vec{J} = N_0 \rho \vec{p}$ et en moyenne les particules se déplacent collectivement à la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{p}$. (Brisure spontanée de symétrie)

Rq Si $\rho_0 \geq \rho_c$ $\frac{d\vec{v}}{dt} = v_0 \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_r} \alpha \vec{v}$ mais α est négatif et cela correspond donc à un coefficient de friction négatif $\xi = \frac{m\alpha}{\gamma_r}$. Le système est bien actif et il y a injection d'énergie au niveau de chaque particule

2. Transitions de phase à 2 dimensions.

Pour un système thermodynamique qui a une symétrie continue à 2d (ou un mode mou), si l'on suppose qu'il y a à basses températures un ordre à longue portée les fluctuations divergent avec la taille du système. Le théorème de Mermin Wagner dit alors qu'il n'y a pas de phase ordonnée à 2 dimensions (Il y a une transition de phase topologique)

Ce théorème n'est pas vrai pour un système actif : le calcul de renormalisation de J. Toner et W. H. Tu montre que la phase ordonnée (la phase dense) existe et que les fluctuations ne divergent pas (argument de Toner F. Ginelli)

II Propriétés générales de la matière active polaire sèche S. Ramaswamy Annual Review in Condensed Matter Physics (2010).

1 - Fluctuations géantes

Le facteur de structure mesure dans un liquide les fluctuations de la densité ρ. On définit la transformée de Fourier $\delta\tilde{\rho}(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} \delta\rho(\vec{r}) d\vec{r}$
$\delta\rho = \rho - \rho_0$.

Le facteur de structure est défini par $S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \langle \delta\tilde{\rho}(q,t)\, \delta\tilde{\rho}^*(\vec{q},t) \rangle$

On moyenne ici sur le bruit (supposé blanc)

$\delta\tilde{\rho}(q=0) = \Delta N(t) = (N - N_0)$ dans un volume V fixé pris dans un très grand système et $S(\vec{q} \to \vec{0}) = \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N}$. Pour un système à l'équilibre thermodynamique $S(\vec{q} \to \vec{0})$ est fini et relié à la compressibilité du système et donc $\langle \Delta N^2 \rangle \sim N$

En linéarisant les équations pour $\vec{p}$ et $\rho^{(1)}$ et en ajoutant un bruit blanc, on montre que à faible vecteur d'onde :

$$S(\vec{q}) \simeq \frac{1}{q^2} f(\theta)$$

A d dimensions $\langle N \rangle = \rho_0 V$. Dans le système actif il y a une divergence de $S(\vec{q})$ si $\vec{q} \to \vec{0}$ et il faut introduire une coupure $q_{min} = \frac{1}{V^{1/d}} = \left(\frac{\rho_0}{N}\right)^{1/d}$. On obtient alors

$$\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N} \sim \left(\frac{N}{\rho_0}\right)^{2/d} \quad \text{et} \quad \langle \Delta N^2 \rangle \sim N^{1+\frac{2}{d}} \sim N^{2\alpha} \quad \text{ou } \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{d}$$

La théorie de champ moyen prévoit donc un exposant $\alpha = 1$ et $\Delta N \sim N$ les fluctuations divergent avec la taille du système plus vite que $\sqrt{N}$. Le calcul de Toner et Tu prévoit (exactement) $2\alpha = \frac{8}{5}$. J. Toner cependant a remis en question ce résultat et les simulations numériques ne donnent pas un accord parfait avec ce résultat (il y a d'autres termes pertinents dans le développement en $\delta\rho$ de l'énergie libre). Les expériences de Deseigne et al conduisent à $2\alpha = 1,45$.

Les fluctuations géantes ne sont pas observées dans les expériences de Bartolo et al. à cause des interactions hydrodynamiques (à longue portée) → Deseigne et al Phys. Rev. Lett 105, 098001 (2010)

2 - Propagation d'ondes (dans la phase ordonnée)

On peut étudier la propagation d'ondes sonores dans le milieu actif polaire $\rho \sim \rho_0 + \delta\rho$ $\quad \vec{p} = \vec{p}_0 + \delta\vec{p}$ $\quad \vec{p}_0$ est la direction moyenne de la polarité $|\vec{p}_0| = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \qquad \vec{j} = \rho v_0 \vec{p} \qquad \frac{\partial j}{\partial x} \simeq \rho_0 v_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_p}\frac{\partial F}{\partial p} = -\frac{1}{\gamma_p} w_1 \frac{\partial (\delta\rho/\rho_0)}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = +\rho_0 v_0 \frac{1}{\gamma_r} w_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta\rho}{\rho_0} = +c^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2}$$

La vitesse du son est $c \sim \sqrt{\frac{v_0 w_1}{\gamma_r}}$. Un calcul plus détaillé qui inclut tous les termes donne une dépendance angulaire de la vitesse. L'onde ne se propage pas à la même vitesse dans les directions opposées car le milieu est polaire. Le milieu dissipe de l'énergie mais on injecte de l'énergie à cause de l'activité (v_0) qui compense l'énergie dissipée et permet à l'onde de se propager. Exemples ondes dans les vols d'oiseaux ou à la surface de cellules qui s'étalent (Gianone)

III Matière active non polaire sur un substrat

1 - Nématiques

Dans une phase nématique les constituants sont parallèles mais sans qu'il n'y ait de direction. Si le constituant i a la direction $\vec{m}_i$ les directions $\vec{m}_i$ et $-\vec{m}_i$ sont équivalentes. On parle de directeur.

Le paramètre d'ordre nématique doit dépendre du carré de $\vec{m}$. C'est un tenseur

$$Q_{\alpha\beta} = \langle m_\alpha m_\beta - \frac{1}{d}\delta_{\alpha\beta} \rangle .$$

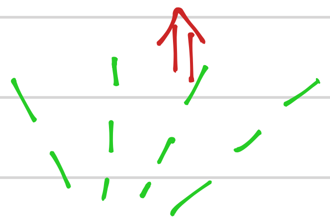
Dans une phase désordonnée, $Q_{\alpha\beta}=0$. Dans une phase ordonnée s'il y a invariance par rotation autour de la direction $\vec{p}$ $(|\vec{p}|=1)$

$$Q_{\alpha\beta} = S\left(p_\alpha p_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)$$ où $S = \frac{\langle 3\cos^2\theta - 1\rangle}{2}$ varie entre $-\frac{1}{2}$ et 1. $S=0$ si le système est isotrope, $S=1$ si tous les éléments sont parallèles et $S=-\frac{1}{2}$ si tous les éléments sont perpendiculaires à $\vec{p}$ (6)

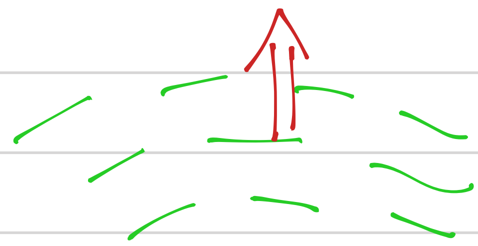
La différence principale entre un nématique actif et un système actif polaire est qu'il n'y a pas dans un nématique actif de vitesse spontanée parce que les directions $\vec{p}$ et $-\vec{p}$ sont équivalentes. Le courant de particules $\vec{j}$ dans une théorie hydrodynamique doit être construit à partir du tenseur $Q_{\alpha\beta}$ et du vecteur $\vec{\nabla}$. Il s'écrit

$$J_\alpha = \zeta_Q \rho\, \partial_\beta Q_{\alpha\beta} - \frac{1}{\gamma_Q} \partial_\alpha \mu$$

. Où μ est le potentiel chimique



déformation de divergence



déformation de courbure

La symétrie autorise donc bien un courant dans les 2 cas qui est proportionnel au gradient de Q.

Au lieu d'écrire une équation pour $Q_{\alpha\beta}$ on peut écrire une équation pour le directeur $\vec{p}$. la seule différence avec le cas polaire est que le terme actif polaire $(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{p}$ n'existe pas. L'équation doit être invariante par changement de $\vec{p}$ en $-\vec{p}$.

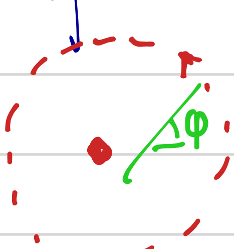
$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_Q} \frac{\partial F}{\partial \vec{p}}$$

et l'énergie libre doit être invariante par changement de $\vec{p}$ en $-\vec{p}$. ($\lambda_1 = 0$ et les termes en $\vec{\nabla}\cdot\vec{p}$ s'annulent).

En linéarisant la théorie et en ajoutant du bruit on peut calculer le facteur de structure $S(q) \sim \frac{f(\theta)}{q^2}$. Dans une théorie de champ moyen on trouve donc le même résultat que pour les systèmes actifs polaires. et $\langle \Delta N^2 \rangle \sim N^{1+d/2}$ dans une théorie de champ moyen. Ce résultat n'est pas modifié par les termes non-linéaires.

IV Défauts dans la matière active

Dans la phase ordonnée, les défauts vont jouer un rôle important. Un défaut est caractérisé par sa charge topologique



Quand l'angle polaire θ tourne de 2π φ tourne de $2S\pi$

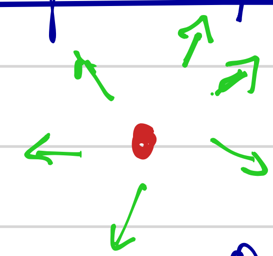
S doit être entier pour un système polaire car après un tour on doit retrouver la polarisation dans la même direction. Pour un nématique

S peut être demi-entier car $\vec{p}$ et $-\vec{p}$ sont équivalents

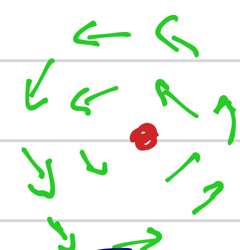
$$\varphi = S\theta + \varphi_0 \quad \text{pour un système passif}$$

Pour un système polaire :

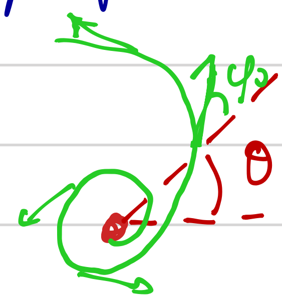
$S = 1$



$\varphi_0 = 0 \quad \varphi = \theta$



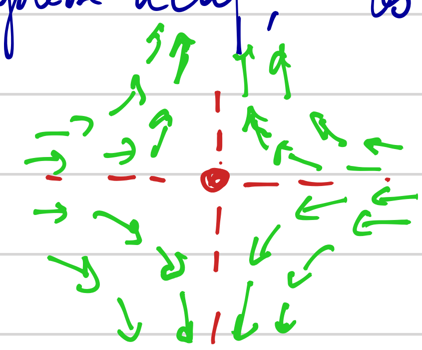
$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$



spirale

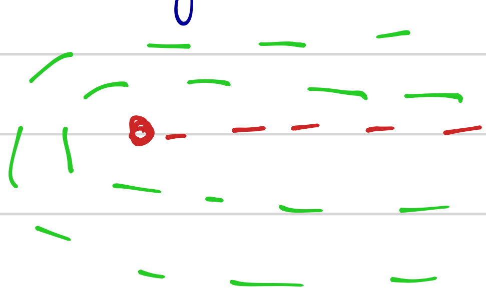
Dans un système actif, les défauts spirales et vortex doivent tourner mais pas les asters

$S = -1$

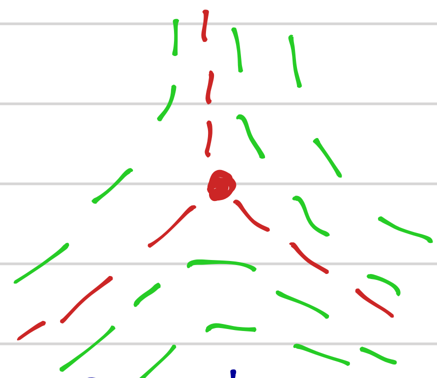


ne tourne pas car il n'y a pas brisure de symétrie de rotation.

Pour un système nématique



$S = +\frac{1}{2}$



$S = -\frac{1}{2}$

Le défaut $S = +\frac{1}{2}$ a une direction privilégiée et dans un système actif il doit se déplacer dans cette direction.

Rq : Les défauts de même charge se repoussent et les défauts de charges opposées s'attirent. Deux défauts $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ peuvent s'annihiler (2)

(1) linéarisation dans la phase "ordonnée" $\vec{p} = \vec{p}_0 + \delta\vec{p}$ $\quad \rho = \rho_0 + \delta\rho$ $\quad \rho_0 > \rho_c$. Bruit blanc dans l'équation de $\vec{p}$: $\langle \xi_i(t)\,\xi_j(t')\rangle = \Delta\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$

(2) L'interaction entre 2 défauts varie comme $V(r) = -\tilde{K} S_1 S_2 \operatorname{Log} r$

Pour 2 défauts $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, l'équation pour la distance entre défauts est

$$\xi \frac{dr}{dt} = -\frac{\tilde{K}}{4R} \qquad \frac{R^2}{2} \sim (t_0 - t)\frac{\tilde{K}}{4\xi}$$ annihilation si $R=0$

(3) Développement du terme polaire $\vec{\nabla}\vec{p}\ h(\delta\rho, \vec{p})$ en puissance de $\delta\vec{\rho}$ et $\vec{p}$. Le terme $w\,\vec{\nabla}\vec{p}$ est un terme de surface

(4) Dire comment on calcule $w_1 \nabla \frac{\delta\rho}{\rho_0}$ en prenant la dérivée fonctionnelle

(5) A l'opposé, il existe aussi des systèmes pour lesquels quand $q \to 0$ $S(q)$ s'annule (incompressibles) : les milieux hyperuniformes.

(6) A deux dimensions $S = \langle \cos 2\theta \rangle$ et varie entre 1 et -1
$S=0$ pour un système isotrope et $S=-1$ si tous les composants sont perpendiculaires à $\vec{p}$. S n'est pas une variable hydrodynamique mais $\vec{p}$ en est une.

(7) Commenter le terme $\frac{w}{2} p^2 \nabla p$ dans f qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{p}} = -\frac{w}{2}\vec{\nabla} p^2 + w\,\vec{p}(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) \text{ et } \lambda_2 \vec{\nabla}\vec{p}^2 + \lambda_3 \vec{p}(\vec{\nabla}\vec{p})$$

peut être dérivé d'une énergie