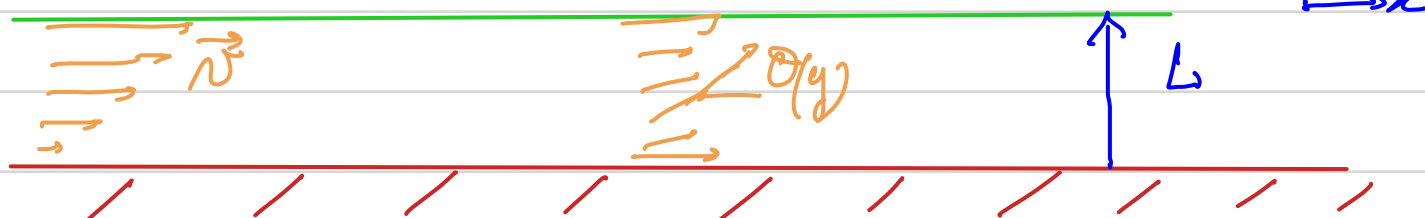


Écoulements spontanés de la matière active

I. Transition de Fredericksz

R. Voituriez et al.



Film mince nématique sur un substrat solide invariant par translation suivant x , $v_x = v(y)$. Seule composante du taux de cisaillement $\sigma_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y}$. Le directeur est aligné parallèlement à la surface libre et à la surface solide $\vec{n} = (\cos \theta(y), \sin \theta(y))$ et $\theta(0) = \theta(L) = 0$.

Argument qualitatif: Si θ varie avec y il y a un gradient de concentration active et donc un écoulement. L'alignement par l'écoulement crée un feedback positif.

Un état stationnaire clair est $\theta = 0$ $v = 0$. Nous allons étudier la stabilité de cet état.

La contrainte est anisotrope $\sigma_{yx}^t \neq \sigma_{xy}^t$. L'équilibre des forces suivant z s'écrit $\partial_y \sigma_{yx}^t = 0$ soit puisque $\sigma_{yx}^t = 0$ sur la surface libre $\sigma_{yx}^t = 0$.

La contrainte totale s'écrit $\sigma_{\alpha\beta}^t = -P \delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^a + \sigma_{\alpha\beta}^s$; soit

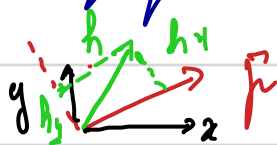
$$\sigma_{yx}^t = \sigma_{yx}^a + \sigma_{yx}^s = 0$$

L'équation constitutive pour la contrainte est $\sigma_{xy} = 2\eta\omega - S\Delta\mu\mu_x\mu_y + \frac{\nu_1}{2}(\mu_x\mu_y + \mu_y\mu_x)$. On suppose le système contractile $S \leq 0$.

On introduit les composantes du champ h perpendiculaires à $\vec{n}$ et parallèles à $\vec{n}$.

$$h_x = h_{\parallel} \cos \theta - h_{\perp} \sin \theta$$

$$h_y = h_{\parallel} \sin \theta + h_{\perp} \cos \theta$$



La contrainte antisymétrique est $\sigma_{yx}^a = \frac{1}{2}(\mu_x h_y - \mu_y h_x) = \frac{h_{\perp}}{2}$ et $h_{\perp} = 2\sigma_{yx}^a = 4\eta\omega - S\Delta\mu \sin 2\theta + \frac{\nu_1}{2}(h_{\parallel} \sin 2\theta + h_{\perp} \cos 2\theta)$.

L'équation constitutive pour $\vec{n}$ est $\frac{D\vec{n}}{Dt} = \omega_{\alpha\beta} \mu_{\beta} = \frac{h_{\perp}}{\gamma_1} - \nu_1 \sigma_{\alpha\beta} \mu_{\beta}$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha} v_{\beta} - \partial_{\beta} v_{\alpha})$$

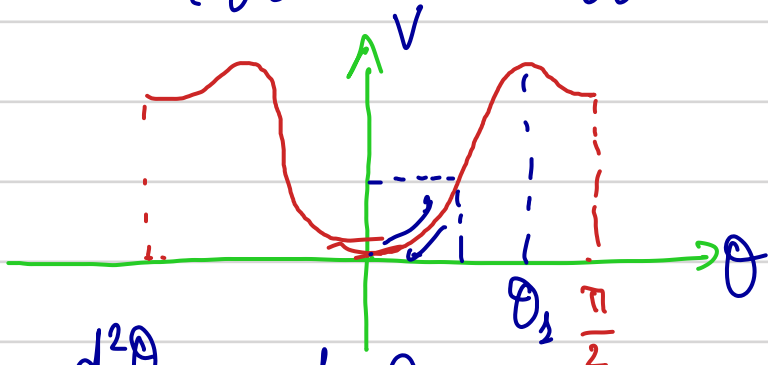
La matrice de rotation dans le liquide actif est $w_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}$
 soit $-w \sin \theta = \frac{h_x}{\gamma_1} - \gamma_1 w \sin \theta$
 $w \cos \theta = \frac{h_y}{\gamma_2} - \gamma_1 w \cos \theta$

On peut réécrire ces deux équations pour h_1 et h_2
 $w(1 + \gamma_1 \cos 2\theta) = \frac{h_1}{\gamma_2}$ $\frac{h_2}{\gamma_1} = \gamma_1 w \sin 2\theta = \frac{\gamma_1 \sin 2\theta}{1 + \gamma_1 \cos 2\theta} \frac{h_1}{\gamma_1}$

On peut alors substituer w et h_2 dans l'expression de h_1 obtenue à partir de la contrainte

$$h_1 \left[1 + \frac{4\eta}{\gamma_1} + 2\gamma_1 \cos 2\theta + \gamma_1^2 \right] = 5\Delta\mu \sin 2\theta (1 + \gamma_1 \cos 2\theta)$$

Or le champ perpendiculaire est $h_1 = K \frac{d^2\theta}{dx^2}$ et cela donne une équation pour θ
 $\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$ où $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-5\Delta\mu}{K} \frac{\sin 2\theta (1 + \gamma_1 \cos 2\theta)}{1 + \frac{4\eta}{\gamma_1} + 2\gamma_1 \cos 2\theta + \gamma_1^2}$
 $1 + \gamma_1 \cos 2\theta = 0$



Analogie au mouvement d'une particule dans le potentiel V

Linearisation $\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{L_0^2} \theta = 0$ $L_0^{-2} = \frac{-5\Delta\mu (1 + \gamma_1)}{1 + \frac{4\eta}{\gamma_1} + 2\gamma_1 + \gamma_1^2}$

Solution $\theta = \theta_0 \sin \frac{x}{L_0}$ et il n'y a de solution qui s'annule en $x = L$ que si $L \geq \pi L_0 = L_c$

Il y a donc une épaisseur critique $L_c = \pi L_0$

Si $L < L_c$ la seule solution est $\theta = 0$ et il n'y a pas de mouvement du film mince

Si $L \geq L_c$ θ varie avec x il y a un gradient d'orientation et h_1 est fini donc w est fini. Il y a apparition d'un écoulement spontané avec un flux fini sans gradient de pression
Rq Gradient de μ conduit à un écoulement.

Rq : - ∇^2 peut apparaître pour des épaisseurs plus grandes des modes plus élevés
 $\theta = \theta_0 \sin \frac{k\pi x}{L_c}$. Il y a alors des bandes d'écoulement

- On peut changer les conditions aux limites par exemple 2 surfaces libres et il apparaît un écoulement spontané avec des bandes avec des vitesses opposées (cisaillement). L'épaisseur critique est la même à un coefficient numérique près.

Expérience avec des cellules P. Silberman et al

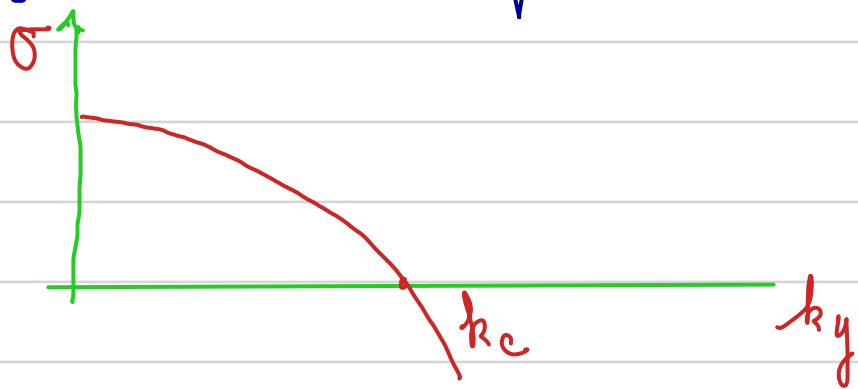
II Stabilité d'un liquide nématique actif. (Contractile $S\Delta\mu < 0$)

On peut de la même manière étudier la stabilité d'un liquide actif infini à 2 dimensions. On suppose le directeur $\vec{r}$ parallèle à x ($\theta = 0$) et qu'il n'y a pas d'écoulement.

En perturbant cet état stationnaire si θ et $\vec{v}$ sont petits on trouve un taux de croissance pour une perturbation de vecteur d'onde $\vec{q}$

$$\sigma(\vec{k}) = \frac{S\Delta\mu}{\eta} \frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} - K k^2 \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{4\eta} \right) \quad (v_1 = 0)$$

Le taux de croissance dépend de la direction de $\vec{k}$. Si $\vec{k}$ est suivant y (comme pour le film) et S négatif (système contractile)



Tous les modes $k < k_c$ sont instables

$$k_c \sim \frac{1}{L_c} \sim |S\Delta\mu|^{1/2}$$

Tous les systèmes actifs à 2 dimensions de taille plus grande que L_c n'ont pas d'état stationnaire sans écoulement.

Rq : Mode le plus instable $q=0 \rightarrow q = \frac{2\pi}{L}$ taille du système

III Turbulence active

R. Abert, J. Casademunt, JF.

1- Conservation de l'énergie

L'énergie injectée dans le système actif est $\int d\vec{x} \, \kappa \Delta \mu$

L'énergie dissipée est $\int d\vec{x} \left\{ \kappa^d \Delta \mu + \sigma_{\alpha\beta}^d v_{\alpha\beta} + P_{\alpha}^d h_{\alpha} \right\}$

L'énergie dans le système est l'énergie de Frank du ménisque F

$$\frac{dF}{dt} = \int d\vec{x} \left\{ \kappa \Delta \mu - \Lambda \Delta \mu^2 - 2\eta v_{\alpha\beta} v_{\beta\alpha} - \frac{h_{\alpha} h_{\alpha}}{\gamma_1} \right\}$$

mais $\kappa = \Lambda \Delta \mu + \sum g_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}$

Dans un état stationnaire $\int \left\{ \underbrace{2\eta v_{\alpha\beta} v_{\beta\alpha}}_{D_{\eta}} + \underbrace{\frac{h_{\alpha} h_{\alpha}}{\gamma_1}}_{D_{\gamma}} \right\} d\vec{x} = \int \underbrace{\Lambda \Delta \mu v_{\alpha\beta}}_I d\vec{x}$

$g_{\alpha\beta} d\vec{x}$. Localement l'énergie est fournie par la puissance de la contrainte active et il y a deux sources de dissipation associées à la viscosité translationnelle et à la viscosité de rotation (2)

2- Turbulence active R. Abert J. Casademunt

On considère un matériau actif à 2 dimensions. On mesure l'activité par $A = \frac{L^2}{L_c^2}$ où $L_c \propto \frac{\eta}{q_c}$ et L est la taille du système. A est

proportionnel à la contrainte active. Montrer les simulations numériques en disant qu'il y a du bruit (méthodes sophistiquées pour éviter le bruit numérique)

Si $A \geq A_c$, le système homogène est instable et l'instabilité apparaît dans la direction $y \perp$ à $\vec{p}_0$ et n'a pas de longueur d'onde caractéristique. Le mode le plus instable est $q_y = 0$ soit en pratique $q_y = q_y^{min} = \frac{2\pi}{L}$.

Le scénario plausible de transition vers la turbulence est le suivant.

Si on augmente A au dessus de A_c il y a un régime en augmentant la contrainte active (L_c diminue)

stationnaire jusqu'à une deuxième instabilité qui se fait dans la direction perpendiculaire avec une longueur d'onde plus petite $L/2$. Il y a ensuite une cascade d'instabilités qui tendent à rendre le système isotrope. Entre deux instabilités, le système est stationnaire. La figure montre les états stationnaires pour $A=200$ et $A=500$. Le système est spatialement "chaotique" si $A=500$. Il y a des domaines orientés qui génèrent une structure en tourbillons du champ de vitesse ($A \approx 100$ pour la figure)

Au delà d'une valeur A^* , il n'y a plus d'états stationnaires et les régions orientées apparaissent et disparaissent de manière aléatoire. Le système est dans un état de chaos spatio-temporel. Nous avons étudié cet état pour $A \approx 3,5 \cdot 10^5$. Comme montré sur la figure - C'est un exemple nouveau de turbulence à faible nombre de Reynolds. (Exemple bidimensionnel) Comme cela est en général fait pour un écoulement turbulent il est utile d'étudier la conservation de l'énergie pour une bande de vecteur d'onde entre k et $k+dk$ dans l'espace réciproque ($\tilde{v}(k) = \int e^{ik \cdot r} v(r) dr$)

$$F = \int \tilde{F}(k) dk. \text{ Les deux dissipation s'écrivent } D_\eta = \int \tilde{D}_\eta(k) dk$$

et $D_\nu = \int \tilde{D}_\nu(k) dk$ et la puissance injectée $I = \int \tilde{I}(k) dk$ (5)
On peut écrire explicitement chaque terme en fonction de $\tilde{v}(k)$ et $\tilde{\theta}(k)$
La conservation d'énergie dans l'espace réciproque s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial t} = -\tilde{D}_\eta(k) - \tilde{D}_\nu(k) + \tilde{I}(k) + \tilde{T}(k)$$

où $\tilde{T}(k)$ est le flux d'énergie entre les échelles. $\int \tilde{T}(k) dk = 0$
En écrivant explicitement $\tilde{T}(k)$ et en utilisant les symétries du problème, on montre que $\tilde{T}(k) = 0$. Tous ces termes sont montrés sur la figure. Il n'y a pas de cascade d'énergie et l'énergie est dissipée à l'échelle où elle est injectée. (Kolmogorov). Cela nécessite que le champ de vitesse soit isotrope.

L'énergie cinétique ne joue aucun rôle mais on peut calculer
 $E_c = \frac{1}{2} \int \vec{v}^2(r) dr = \int dk \bar{E}_c(k) \quad \bar{E}_c(k) \sim |\vec{v}(k)|^2 k$

A faible vecteur d'onde, on montre que $E_c(k) \sim 1/k$ (à deux dimensions si $k \rightarrow 0$). Cela découle directement de $|\vec{\theta}(k)|^2 \sim e^{-k^2}$ (décroissance exponentielle des corrélations de $\langle \theta(0) \theta(r) \rangle$)

On a là une turbulence active à faible nombre de Reynolds avec une transition vers la turbulence tout à fait originale.

Rq Nous avons considéré un système où $|\vec{p}| = 1$ et dans lequel aucun défaut topologique ne peut apparaître. Un scénario de transition vers la turbulence dans les systèmes extensibles par apparition de paires de défauts a été proposé par le groupe de J. Yeomans J. Yeomans
Dootmohammadi



(2) $h_\alpha h_\alpha = h_\parallel^2 + h_\perp^2$ mais on peut éliminer $h_\parallel$. $P_\alpha \cdot p_\alpha \approx 0$ car $|\vec{p}| = 1$ et en multipliant l'équation de $\vec{p}$ par p_α $\frac{D p^2}{Dt} = 0$
 $\frac{h_\parallel}{\gamma_1} = + \gamma_1 \sigma_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$. En reportant dans $\sigma_{\alpha\beta}$ on trouve

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\eta \sigma_{\alpha\beta} + \nu_1^2 \gamma_1 \left\{ p_\alpha p_\beta + p_\alpha p_\delta \sigma_{\delta\beta} - \frac{1}{3} \sigma_{\alpha\delta} \sigma_{\delta\beta} p_\gamma p_\gamma \right\}$$

+ $h_\parallel \dots - 5 \Delta \mu q_{\alpha\beta}$

$h_\parallel$ induit donc une viscosité anisotrope

(3) Prendre $\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{L_0^2} \theta = 0 \quad \theta = \theta_0 \frac{\rho R \pi a}{L} \quad \text{si } L \approx L_c$

$\Theta_0 \sim \left(\frac{L - L_c}{L_c} \right)^{1/2}$. Si L est très supérieur à L_c il apparaît de modes

$\Theta = \Theta_0 \sin \frac{n\pi x}{L}$ et chaque mode à un seul A_n^c

(4) On augmente A en diminuant la longueur L , le scénario de transition vers la turbulence n'a pas été vérifié explicitement

(5) Par exemple $D_T = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{h}(k)^2}{\gamma}$