

# Turbulence active et défauts topologiques

## I - Statistique des vortex, théorie de champ moyen L. Gioni Phys.

Res X 2017

Pour identifier les vortex, L. Gioni utilise la fonction  $\bar{Q}$  de Okubo-Weiss. Un vortex correspond à une région où la valeur de  $\bar{Q}$  est négative (les trajectoires de deux particules ne divergent pas). Il fait une simulation numérique et identifie les vortex. Les simulations sont montrées pour des systèmes extensifs (2)

### 1. Statistique de l'aire des vortex

Dans un système de taille  $L^2$  il y a  $N$  vortex et on appelle  $n(a)$  le nombre de vortex de taille  $a$ . Gioni trouve entre une valeur  $a_{\min}$  et une valeur  $a_{\max}$  une distribution exponentielle  $a_{\min} \propto L_c^2$  et  $a_{\max} \propto L^2$

$$n(a) = N/a_0 \exp\left(-\frac{a}{a^*}\right) \quad \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{1}{a_0} \exp\left(-\frac{a}{a^*}\right) da = 1$$

L'aire typique  $a^*$  et  $a_0$  sont proportionnelles à  $L_c^2$ . On définit dans un vortex donné la vorticité moyenne  $\omega_0 = \frac{1}{a} \int d\vec{r} \omega(\vec{r})$  et on écrit  $\omega(\vec{r}) = \omega_0 f\left(\frac{\vec{r}}{R}\right)$

La vorticité moyenne dépend peu de  $a$  et  $\omega_0 \propto 1/L_c^2 = |\nabla \Delta \mu| \propto \frac{|\mu| |\nabla|^2}{\eta}$

### 2. Théorie de champ moyen (i)

La vorticité totale est  $\omega(\vec{r}) = \sum_{\text{vortex}} \omega_0^i f\left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{R_i}\right)$ . En prenant la transformée de Fourier.

$$\tilde{\omega}(k) = \sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \omega_0^i R_i^2 f(k R_i)$$

L'entrophie est définie par  $\Omega = \frac{1}{2} \int \omega^2(\vec{r}) d\vec{r} = \frac{1}{2} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\omega}(k)|^2$

On définit le spectre d'entrophie par  $\Omega = \int d\vec{k} \tilde{\Omega}(k)$   $\tilde{\Omega}(k) \propto k |\tilde{\omega}(k)|^2$

$$\tilde{\Omega}(k) \sim \sum_{i,j} \omega_i \omega_j R_i^2 R_j^2 e^{i\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \tilde{f}(kR_i) \tilde{f}(kR_j)^* k$$

On suppose que les vortex ne sont pas coriélés et seul les termes diagonaux contribuent

$$\tilde{\Omega}(k) \sim \sum_i \omega_i^2 R_i^4 |\tilde{f}(kR_i)|^2 k$$

On regroupe tous les vortex de même taille  $n(a)$   $n(R) dR = n(a) da$   
 $n(R) \sim R^{-2} n(a)$

$$\tilde{\Omega}(k) \sim \int dR \omega_i^2 R^5 \frac{N}{a_0} e^{-\frac{\pi R^2}{a^*}} k |\tilde{f}(kR)|^2$$

On pose  $R = \frac{R}{\sqrt{a^*}} \sim \frac{R}{L_c}$  et  $q = k L_c$

$$\tilde{\Omega}(k) \sim \frac{N}{a_0} \omega_i^2 L_c^5 q \int e^{-q^2} |\tilde{f}(qR)|^2 dR R^5$$

$\tilde{f}\left(\frac{q}{R}\right)$  décrit la variation de vorticité dans un vortex, en gros  
 $f=1$  si  $R < R$  et  $f=0$  si  $R > R$   $\tilde{f}(kR) = \frac{J_1(kR)}{\ln kR}$  fonction de

diffraction d'un trou.

$$\tilde{\Omega}(k) \sim \frac{N}{q a_0} \omega_i^2 L_c^5 \int_0^{+\infty} dR e^{-\pi R^2} J_1^2(qR) R^3$$

si  $k \rightarrow 0$   $q \rightarrow 0$   $J_1(qR) \sim qR$  et  $\tilde{\Omega}(k) \sim k$

si  $k \rightarrow +\infty$   $J_1^2(qR) \sim \frac{1}{qR}$  et  $\tilde{\Omega}(k) \sim \frac{1}{k^2}$

Ces lois d'échelles sont bien vérifiées à la fois dans les simulations de Goumi et dans celles faites avec R. Albert et J. Casademunt.

L'énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2} \int \vec{v}^2 d\vec{r}$  (Bq sans le p)  $\tilde{\Omega}(k) \sim \frac{1}{k} \tilde{\omega}(k)$

Si on définit le spectre de la vitesse par  $E_c = \int dk E_c(k)$

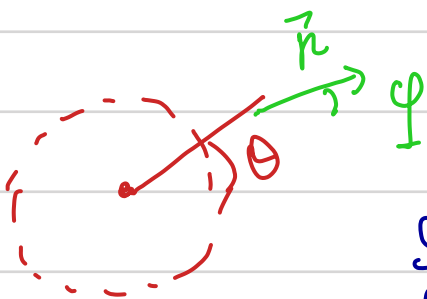
$E_c(k) \sim \frac{1}{k}$  qui est le résultat annoncé plus haut si  $k \rightarrow 0$

$E_c(k) \sim \frac{1}{k^4}$  si  $k \rightarrow +\infty$

## II Défauts topologiques (1)

### 1. Définitions

Dans une phase ordonnée nématique ou polaire il peut exister des défauts topologiques qui sont des points ou des lignes... ou le paramètre d'ordre s'annule (ou n'est pas défini)



Si on fait 1 tour autour d'un défaut l'angle  $\phi$  du paramètre d'ordre tourne de  $S \cdot 2\pi$

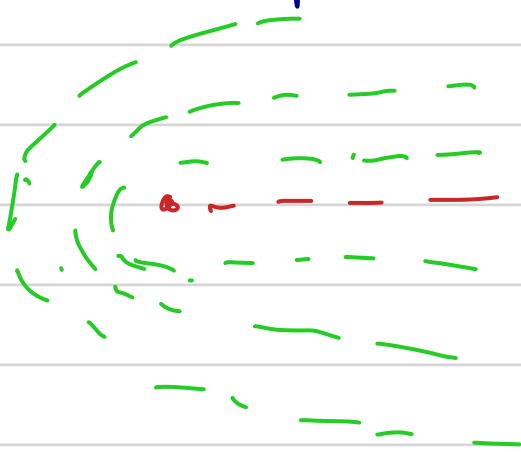
Si le système est polaire  $S$  est entier

Si le système est nématique  $S$  peut être  $\frac{1}{2}$  entier

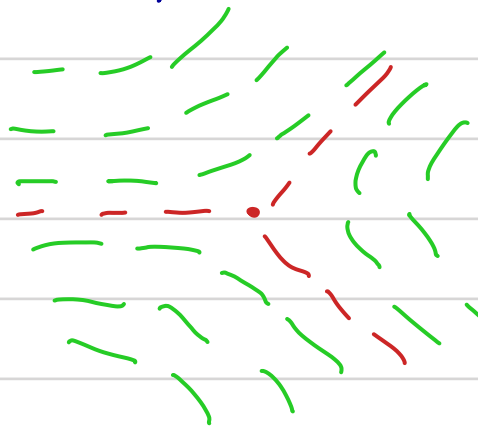
au bout d'un tour  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ .  $S$  est la charge topologique

Dans un système à l'équilibre on doit avoir  $n_1 \rightarrow 0$  et la solution est  $\phi = S\theta + \phi_0$

Dans un nématique les deux défauts les plus simples sont  $S = \pm \frac{1}{2}$



$$S = +\frac{1}{2}$$



$$S = -\frac{1}{2}$$

Deux défauts de charge  $S_1$  et  $S_2$  interagissent et l'énergie d'interaction est  $V(\vec{r}) = -2\pi K S_1 S_2 \text{Log } r$

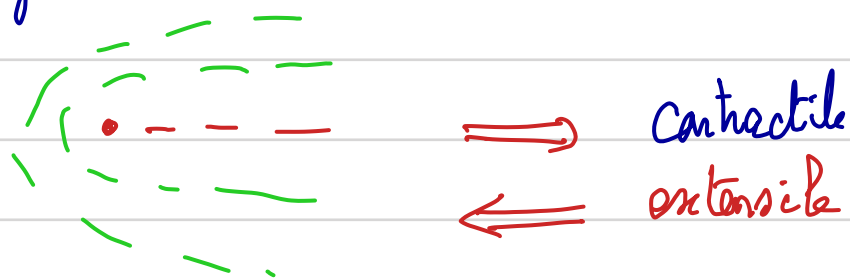
Si on suppose que la dissipation est due à une friction  $\zeta$  l'équilibre des forces conduit à

$$\zeta \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\pi K \frac{S_1 S_2}{r} \vec{e}_r$$

Un défaut  $\pm \frac{1}{2}$  et un défaut  $-\frac{1}{2}$  s'attirent et la distance varie comme  $r^2 = \left(R_0^2 - \frac{4\pi K}{\eta} t\right)^{1/2}$ . Les défauts se rencontrent et s'annihilent si  $t = \frac{\eta R_0^2}{4\pi K}$ . Les défauts  $+$  et  $-$  s'annihilent

## 2. Défauts dans un système actif

Le défaut  $\pm \frac{1}{2}$  a une planité et a donc une vitesse nulle le long de cet axe



Les défauts  $-\frac{1}{2}$  n'ont pas d'axe de symétrie et ont une vitesse nulle. En utilisant les équations de la théorie des gels actifs on trouve

$$V_0 = -\frac{\eta \Delta \mu}{\eta} \propto \text{cste} \times R \text{ où } R \text{ est une taille macroscopique}$$

due soit à la taille du système soit à la friction sur un substrat

## 3. Turbulence active et défauts

Les simulations de L. Giomi ne supposent pas que le nématique est parfaitement ordonné. Elles prennent en compte le paramètre d'ordre nématique  $Q_{\alpha\beta}$  qui peut s'annuler.  $Q_{\alpha\beta}$  s'annule au cœur des défauts et les défauts peuvent apparaître et disparaître.

- Les défauts disparaissent par annihilation de disclinaisons  $\pm \frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$
- Au moins pour un système extensible  $\Delta \mu > 0$ , les défauts apparaissent à partir d'un flambage local qui génère en paire des disclinaisons  $\pm \frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$ . Ce mécanisme a été observé expérimentalement dans les expériences de Z. Dogic (Sanchez et al Science 2010) et la dynamique d'apparition et de disparition

des défauts a été étudié par simulation par le group de J. Yeomans.

Les défauts sont associés aux vortex venant de "template" à la structure des vortex  $N_d \propto N$ . Ils jouent un rôle important dans la transition vers la turbulence mais pas sur les spectres et les lois d'échelles.

Si on impose  $|H|=1$ , la création de défauts n'est pas autorisée et les défauts ne peuvent apparaître que par les bords du système.

Les lois d'échelle pour les spectres d'énergie (et de dissipation) ne semblent pas dépendre de la présence ou non de défauts.

(1) Garder  $1/2$  h pour les défauts

(2) Gromm mentionne que les résultats sont les mêmes pour des systèmes contractiles

(3) - Rôle de la vitesse spatiale

- Différence de scénario entre système extensile et contractile ?