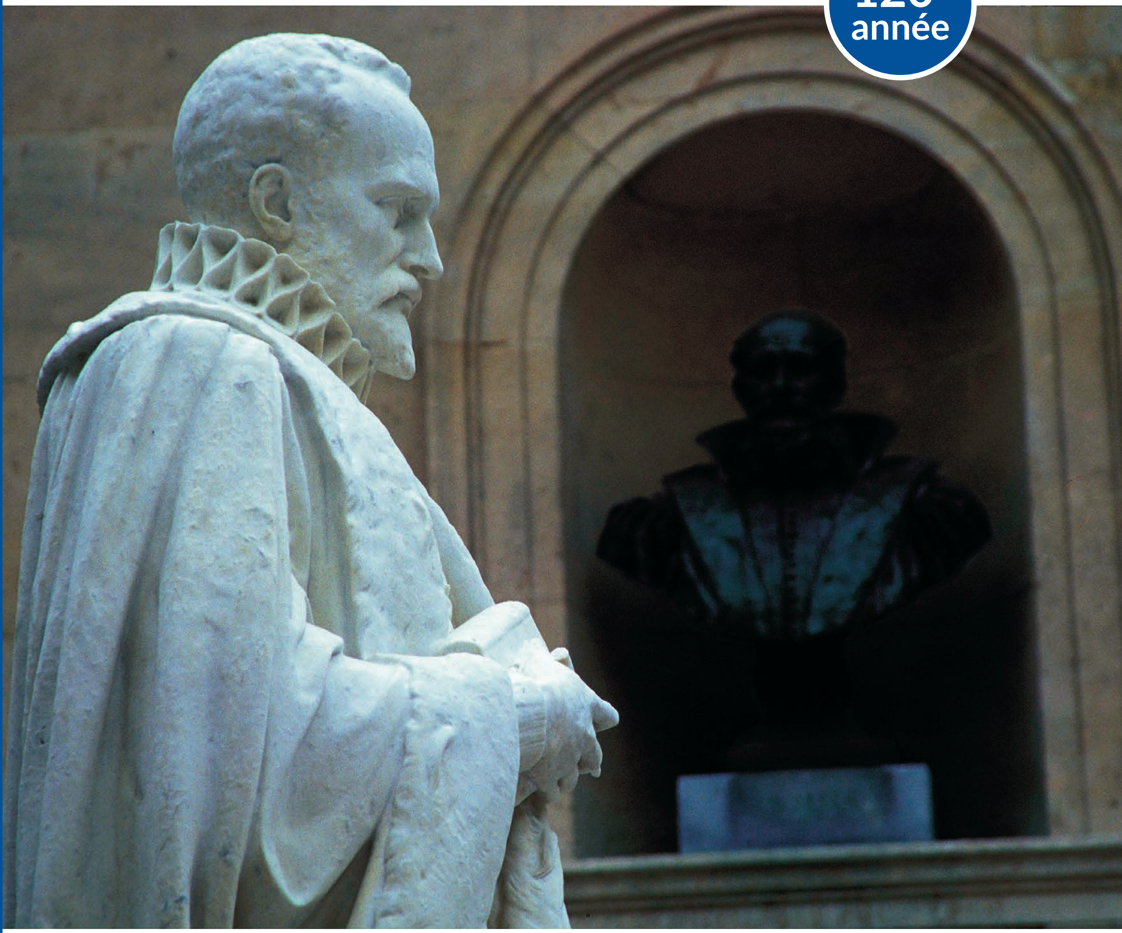
ANNUAIRE du COLLÈGE DE FRANCE 2019 - 2020

Résumé des cours et travaux

120e année



COLLÈGE DE FRANCE 1530

Équations aux dérivées partielles et applications

Pierre-Louis Lions

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : équations de HJB, théorie des jeux, équations aux dérivées partielles

La série de cours et séminaires « HJB, MFG et les autres (suite) » est disponible, en vidéo, sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/course-2019-2020.htm).

Enseignement

Cours – HJB, MFG et les autres (suite)

Le cours a eu lieu du 8 novembre 2019 au 17 janvier 2020.

Introduction

Le cours de cette année a porté essentiellement sur des méthodes de régularisation d'équations « aux dérivées partielles » non linéaires en dimension infinie. Notre motivation provient de l'étude des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB en abrégé) en dimension infinie et des équations de type jeux à champ moyen (MFG en abrégé, pour *Mean Field Games*) dans la formulation dite « hilbertienne ». En dimension finie, une méthode classique de régularisation consiste à rajouter à l'équation un « petit » opérateur de Laplace *i.e.* $(-\varepsilon\Delta)$ (avec $\varepsilon > 0$) où $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N)$. Dans un espace de Hilbert H séparable (par

P.-L. Lions, « Équations aux dérivées partielles et applications », *Annuaire du Collège de France 2019-2020. Résumé des cours et travaux*, 120e année, Paris, Collège de France, 2023, p. 23-26, https://doi.org/10.4000/annuaire-cdf.18070.

exemple), cet opérateur n'est pas défini sans hypothèse supplémentaire : en effet cela revient à remplacer la somme finie par la somme d'une suite qui est en général divergente (où à faire tendre N vers l'infini dans l'expression précédente).

La difficulté essentielle est donc de donner un sens à des équations du type de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad x \in H,\ t > 0 \tag{1}$$

avec $u|_{t=0} = u_0$ (toujours supposé appartenir au moins à $BUC(H)$. L'inconnue u est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Deux méthodes ont été introduites dans le cours :

i) résoudre (1) pour la plus grande classe possible de données initiales u_0,

ii) résoudre la variante de (1) qui suit sans hypothèse supplémentaire sur u_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (Ax, \nabla u) = 0 \quad x \in H,\ t > 0 \tag{2}$$

où Ax un opérateur auto-adjoint positif de H dans H dont les propriétés sont détaillées plus bas et (x, y) désigne le produit scalaire dans $H(|x| = (x,x)^{1/2})$.

Une fois les équations (1) ou (2) résolues, on peut alors régulariser les équations de HJB ou les équations de type MFG en ajoutant à ces équations le terme $(-\varepsilon\Delta)$ ou le terme $[-\varepsilon\Delta + (Ax, \nabla u)]$. Nous avons expliqué dans le cours comment obtenir alors pour ces équations régularisées des résultats d'existence et d'unicité de solutions régulières.

Équation (1)

Il a tout d'abord été montré dans le cours que l'équation (1) n'a pas de solution sans hypothèse supplémentaire et que la question intrinsèquement reliée de l'existence d'un mouvement Brownien dans H a également une réponse négative. Et nous avons expliqué pourquoi il était naturel de considérer l'espace des données initiales u_0 ayant la propriété suivante :

$$\begin{cases} \exists\, B = B^{\mathrm{T}} > 0 \in L(H,H), TrB^2 < \infty \ \text{ tel que} \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0_+} \ \sup\{|u_0(x) - u_0(y)| \,/\, |B(x-y)| \leq \varepsilon\} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

i.e. $|u_0(x) - u_0(y)| \leq \omega(|B(x-y)|)\ \forall x, y \in H$ où ω est croissante continue sur $[0, +\infty[$ avec $\omega(0) = 0$.

Nous avons démontré dans le cours les résultats suivants :

i) si u_0 vérifie (3), alors (1) admet une unique solution u_0 $BUC(H \times [0,+\infty[)$ vérifiant (3) uniformément en $t \geq 0$,

ii) $u_0 \in C_b^{\infty}(H)$ (dérivable à tout ordre, de dérivées bornées)

iii) si le module ω peut être choisi linéaire ("$B_0^{-1}\forall u$" est borné) alors $B^{-1}\nabla u$ est borné sur $H \times]0,+\infty[$ et $Tr(|D^2 u|)$ est bornée sur $H \times [\delta,+\infty[$ $(\forall \delta > 0)$.

D'autres propriétés qualitatives des solutions ont été données dans le cours.

ÉQUATION (2)

On considère maintenant l'équation (2) en supposant que l'opérateur A vérifie

$$A = A^* > 0 \quad , \quad Tr(A^{-1}) < \infty. \tag{4}$$

Et nous avons démontré le résultat suivant d'existence, d'unicité et de régularité des solutions. Là encore, d'autres propriétés qualitatives des solutions ont été étudiées dans le cours. Pour une condition initiale quelconque $u_0 \in BUC(H)$, il existe une unique solution $u \in BUC(H)$ uniformément en t > 0 vérifiant en outre :

$$\sup\{|u(x,t) - u(e^{-A(t-\delta)}x,\delta)|/0 \leq \delta \leq t \leq \delta + \varepsilon\} \to 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon \to 0_+,$$

$u \in C_b^\infty(H \times]0,+\infty[)$ et $A^n \nabla u$ est borné sur $H \times [\delta,+\infty[$ ($\forall \delta > 0$, $\forall n \geq 0$). De plus des estimations semblables sont possibles sur les dérivées d'ordre supérieur.

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Le séminaire a eu lieu du 15 novembre 2019 au 6 mars 2020 :

– Laure Saint-Raymond (ENS Lyon), le 15 novembre 2019 : « Dynamique d'un gaz de sphères dures : analyse des corrélations » ;

– Thierry Bodineau (CMAP, École polytechnique), le 22 novembre 2019 : « Dynamique d'un gaz de sphères dures : fluctuations et grandes déviations » ;

– Benjamin Seeger (FSMP, Ceremade, université Paris-Dauphine, Collège de France), le 13 décembre 2019 : « *Scaling limits and homogenization of Hamilton-Jacobi equations with stochastic forcing* » ;

– Pierre-Louis Lions (Collège de France), le 10 janvier 2020 : « Remarques sur les premières valeurs et fonctions propres » ;

– Charles Bertucci (CMAP, École polytechnique, CNRS), le 17 janvier 2020 : « Transport optimal et problème de planification dans un cadre stochastique en espace d'états fini » ;

– Yann Brenier (DMA, ENS Ulm), le 24 janvier 2020 : « Résolution de problèmes de Cauchy par minimisation convexe et généralisations matricielles de jeux à champ moyen » ;

– Guillaume Carlier (Ceremade, université Paris-Dauphine), le 31 janvier 2020 : « Autour des barycentres dans l'espace de Wasserstein » ;

– Shi Jin (Shanghai JiaoTong University), le 6 mars 2020: « *Interacting particle systems: Fast algorithms for classical and quantum N-body problems and non-convex optimization* ».

RECHERCHE

MISSIONS, INVITATIONS, CONFÉRENCES

– Exposé à Huawei France (Boulogne-Billancourt), le 1er juillet 2019 ;

– exposé au colloque FIME-FDD, EDF R&D (Palaiseau), le 8 juillet 2019 ;

– exposé au colloque en l'honneur d'A. Figalli (École polytechnique, Palaiseau), le 9 juillet 2019 ;

– série de quatre exposés à l'université de Chicago, (États-Unis), entre le 1er et le 9 octobre 2019 ;

– conférence (Lezioni Leonardo da Vinci) à l'Istituto Lombardo (Milan, Italie), le 29 octobre 2019 ;

– conférence au Colloque des « 50 ans du laboratoire J.-L. Lions » (université P. et M. Curie, Paris), le 21 novembre 2019 ;

– série de trois exposés à l'université de Chicago (États-Unis), entre le 28 janvier et le 8 février 2020 ;

– conférence au Colloque MFG (université de Chicago, États-Unis), le 7 février 2020 ;

– série de deux exposés à l'université de Chicago (États-Unis), entre le 2 et le 9 mars 2020.

Publications

Le Bris C. et Lions P.-L., *Parabolic Equations with Irregular Data and Related Issues: Applications to Stochastic Differential Equations*, Berlin, De Gruyter, coll. « Series in Applied and Numerical Mathematics », vol. 4, 2019, https://doi.org/10.1515/9783110635508.

Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M. et Lions P.-L., *The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games*, Princeton/Oxford, Princeton University Press, coll. « Annals of Mathematics studies », nº 201, 2019 [arXiv : 1509.02505].

Gassiat P., Gess B., Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Speed of propagation for Hamilton-Jacobi equations with multiplicative rough time dependence and convex Hamiltonians », *Probability Theory and Related Fields*, vol. 176, nº 1, 2020, p. 421-448, https://doi.org/10.1007/s00440-019-00921-5 [arXiv :1805.08477].

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « New regularity results for Hamilton-Jacobi equations and long time behavior of pathwise (stochastic) viscosity solutions », *Research in the Mathematical Sciences*, vol. 7, nº 3, 2020, art. 17, https://doi.org/10.1007/s40687-020-00214-7 [arXiv :1909.05672].

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Extended mean-field games », *Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni*, vol. 31, nº 3, 2020, p. 611-625, https://doi.org/10.4171/RLM/907.

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Effective transmission conditions for second-order elliptic equations on networks in the limit of thin domains », *CRAS. Mathématique*, t. 358, nº 7, 2020, p. 797-809, https://doi.org/10.5802/crmath.83.

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « The asymptotics of stochastically perturbed reaction-diffusion equations and front propagation », *CRAS. Mathématique*, t. 358, nº 8, 2020, p. 931-938, https://doi.org/10.5802/crmath.117 [arXiv : 1909.05673].

Bertucci C., Bertucci L., LASRY J.-M. et Lions P.-L., « Mean field game approach to bitcoin mining », 2020, https://arxiv.org/abs/2004.08167.

Achdou Y., Bertucci C., Lasry J.-M., Lions P.-L., Rostand A. et Scheinkman J., « A class of short-term models for the oil industry addressing speculative storage », 2020, https://arxiv.org/abs/2003.11790.

Lions P.-L. et Souganidis P.E., « Homogenization of the backward-forward mean-field games systems in periodic environments », *European Mathematical Society*, vol. 31, nº 4, 2021, p. 733-755, https://doi.org/10.4171/RLM/912 [arXiv : 1909.01250v2].

Lasry J.-M., Lions P.-L. et Seeger B., « Dimension reduction in deterministic mean field games », 2020, https://arxiv.org/abs/2105.02718 (preprint).

Lions P.-L., Carmona R. et Laurière M., « Non-standard stochastic control with nonlinear Feynman-Kac costs », 2020 (preprint).