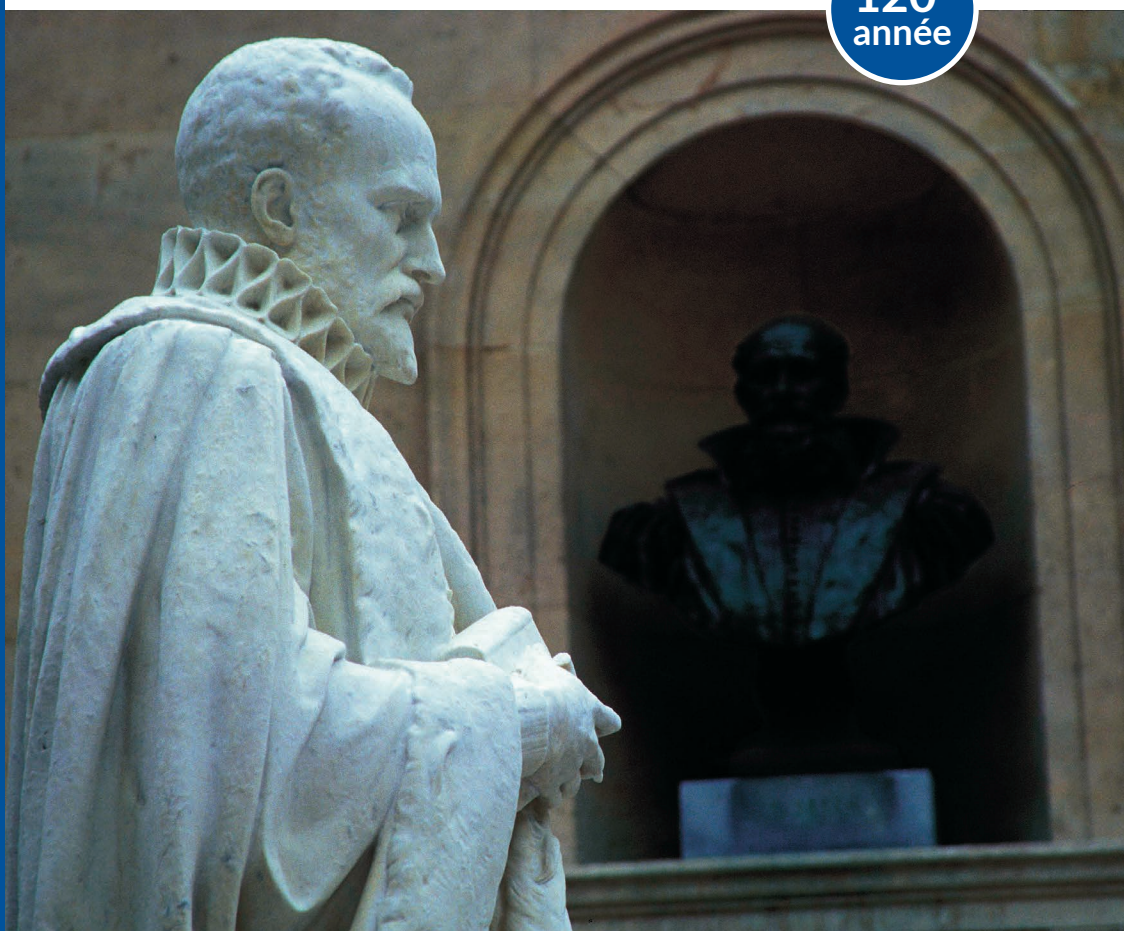


ANNUAIRE du **COLLÈGE DE FRANCE** 2019 - 2020

Résumé des cours et travaux

120^e
année



COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

PHYSIQUE STATISTIQUE

Bernard DERRIDA

Membre de l'Institut (Académie des sciences),
professeur au Collège de France

Mots-clés : physique, renormalisation

La série de cours et séminaires « Problèmes de réaction-diffusion : de la dynamique des fronts aux généalogies » est disponible en audio et vidéo, sur le site internet du Collège de France (<https://www.college-de-france.fr/site/bernard-derrida/course-2019-2020.htm>).

ENSEIGNEMENT

COURS – PROBLÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION : DE LA DYNAMIQUE
DES FRONTS AUX GÉNÉALOGIES

Le cours a eu lieu du 13 janvier au 17 février 2020.

Introduction

Les modèles de type réaction-diffusion apparaissent dans de très nombreux domaines allant des mathématiques à la chimie, de la biologie à la sociologie. Il est remarquable que les mêmes équations et les mêmes modèles puissent être utilisés dans cette grande variété de contextes. Après avoir rappelé quelques résultats classiques sur les problèmes de réaction-diffusion, ce cours a présenté une série de développements récents sur l'équation de Fisher-KPP, initialement introduite à propos de la façon dont un gène se répand dans une population, sur les différents types de fronts de propagation, sur le mouvement brownien branchant et sur une modélisation des arbres généalogiques en l'absence ou en présence de sélection.

Cours du 13 janvier 2020

Après avoir rappelé les nombreuses situations pouvant être décrites par des équations de réaction-diffusion (chimie, physique, biologie, écologie, sociologie, généalogies) et les différents types d'approches théoriques utilisées (systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, équations stochastiques, approximations de champ moyen, solutions exactes, simulations, renormalisation), ce cours a commencé par présenter quelques exemples : les réactions chimiques avec la loi d'action de masse de Gulberg et Waage (1864), les modèles d'évolution en écologie comme les équations de Lotka-Volterra (1910) pour un système prédateurs-proies, les modèles d'infection en biologie.

Pour les problèmes de réaction-diffusion, deux aspects importants que les descriptions de type champ moyen négligent sont les fluctuations et les dépendances spatiales. Le cours s'est poursuivi par une discussion plus détaillée des réactions de type $A + A \rightarrow A$ qui apparaît dans des problèmes de polymérisation, de coagulation, de généalogies, $A + A \rightleftharpoons \emptyset$ qui décrit l'adsorption et la désorption de molécules diatomiques à la surface d'un métal, $A + B \rightarrow 2A$ qui modélise la propagation d'une infection ou d'une opinion dans une population, $A + B \rightarrow \emptyset$ qui représente les réactions dans un milieu composé de matière et d'antimatière. Pour tous ces modèles, les lois d'action de masse, obtenues en faisant une approximation de champ moyen, ne prédisent correctement les comportements aux longs temps qu'au-dessus d'une dimension critique supérieure d_c . Au-dessous de cette dimension critique ($d_c = 2$ pour $A + A \rightarrow A$ ou $A + A \rightarrow \emptyset$ et $d_c = 4$ pour $A + B \rightarrow \emptyset$), le rôle des fluctuations ne peut plus être négligé. Un argument simple permet cependant de prédire les comportements asymptotiques pour les dimensions inférieures à la dimension critique. Le cours s'est terminé en montrant comment des modèles microscopiques de réaction-diffusion peuvent être décrits de manière exacte par des équations aux dérivées partielles stochastiques, avec dans des cas comme $A + A \rightarrow \emptyset$ un bruit blanc gaussien imaginaire.

Cours du 20 janvier 2020

Le deuxième cours a été essentiellement consacré à l'équation de Fisher-KPP (Kolmogorov, Petrovski, Piscounov) qui date de 1937 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u(1 - u).$$

Cette équation fut introduite pour décrire la façon dont un gène favorable se répand dans une population. Elle apparaît dans bien d'autres contextes, comme par exemple les polymères dirigés en milieu aléatoire ou le mouvement brownien branchant. On peut montrer assez facilement qu'il existe une famille à un paramètre de solutions de la forme $u(x, t) = f_v(x - vt)$ indexées par leurs vitesses v . Une des questions centrales dans l'étude de l'équation de Fisher-KPP est celle des ondes progressives : par exemple pour une condition initiale avec $u(x, 0) = 1$ pour $x < 0$ et $u(x, 0) = 0$ pour $x > 0$, que peut-on dire de la position du front qui sépare au temps t la région où $u(x, t) \simeq 1$ de celle où $u(x, t) \simeq 0$? Pour cette condition initiale (ainsi que pour toutes les conditions initiales qui décroissent suffisamment vite), la solution de l'équation de Fisher-KPP conduit, dans la limite des temps longs, à la sélection d'une onde progressive particulière, f_2 avec $u(x, t) \simeq f_2(x - X_t)$ située à une position

$X_t \approx 2t - \frac{3}{2} \log t$ comme cela a été démontré par Bramson au début des années 1980. Après avoir expliqué comment ce résultat est modifié pour des conditions initiales qui décroissent plus lentement ou en dimension d'espace supérieure à 1, le cours s'est terminé par une discussion du processus de contact dont l'équation de Fisher-KPP représente l'approximation de champ moyen.

Cours du 27 janvier 2020

Le modèle d'Ising, introduit il y a un siècle, est un des modèles les plus étudiés en physique statistique. À l'équilibre, il permet de comprendre aussi bien la transition ferromagnétique-paramagnétique, que la transition liquide-gaz ou la transition ordre-désordre d'un alliage. Selon le cas considéré, il faut utiliser une dynamique appropriée (dynamique de Glauber pour les systèmes magnétiques, dynamique de Kawasaki pour un alliage, dynamique moléculaire pour la transition liquide-gaz). On peut montrer qu'à grande échelle, la dynamique de Glauber conduit à l'équation de Allen-Cahn et celle de Kawasaki à celle de Cahn-Hilliard. Pour des conditions initiales inhomogènes, dans le cas de l'équation de Allen-Cahn, les parois de domaines sont des fronts bistables dont on sait calculer la vitesse et la forme. Le cours s'est poursuivi par la discussion des fronts stable-instable dans le cas poussé puis s'est terminé par la description d'un modèle à frontière libre qui permet de faire de nombreux calculs explicites, dont celui de la forme des ondes progressives dans le cas de fronts tirés et de fronts poussés.

Cours du 3 février 2020

Le quatrième cours a été entièrement consacré au mouvement brownien branchant. Après avoir rappelé la théorie d'Einstein du mouvement brownien, le cours a commencé par une discussion des processus de branchement comme le processus de Galton-Watson. Le lien entre le mouvement brownien branchant et l'équation de Fisher-KPP. Le lien (McKean 1975) entre le mouvement permet de déterminer la distribution de la position de la particule la plus à droite. Il permet aussi de comprendre la distribution des distances entre les particules les plus à droite et de relier les moyennes de ces distances au décalage de la position du front quand on modifie la condition initiale de l'équation de Fisher-KPP. Cette distribution des distances est donnée par un processus de Poisson décoré de densité exponentielle. Le cours s'est terminé en montrant comment les résultats connus sur le mouvement brownien branchant peuvent s'étendre au cas de marches aléatoires branchantes et comment les questions relatives aux extrêmes du mouvement brownien branchant se généralisent au cas du champ libre gaussien et aux temps de première visite d'une marche aléatoire sur un réseau bidimensionnel.

Cours du 10 février 2020

Le cinquième cours a commencé par la description de quelques modèles d'évolution avec ou sans sélection. Dans le cas neutre, comme dans le modèle de Wright Fisher, l'évolution stochastique de la proportion d'une population portant un allèle est donnée par l'équation de Kimura. En présence de sélection, le modèle le plus simple où la fécondité (*fitness*) est indépendante du temps et en l'absence de

mutations, on peut montrer que la fécondité moyenne de la population augmente avec le temps comme le prédit le théorème de la sélection naturelle de Fisher. Si on prend en compte les mutations, on aboutit à la notion de *quasi-espèce* de Eigen autour des points de fécondité localement maximale, avec des transitions rares d'un maximum vers un maximum plus élevé dues aux mutations. La dynamique de ces modèles d'évolution rappelle beaucoup la dynamique des verres qui se bloquent dans des minima locaux d'énergie libre avant que des fluctuations rares leur permettent de trouver des minima plus profonds. Le cours s'est poursuivi en introduisant des modèles d'évolution avec sélection comme le problème de la propagation d'un gène dans une population ou le N -BBM (le N mouvement brownien branchant). Ces modèles aboutissent à des équations de type Fisher-KPP bruitées, un sujet qui a motivé de nombreux travaux au cours de ces dernières années. Après avoir introduit l'idée du *cut-off* qui permet d'expliquer la vitesse de ces fronts en présence de bruit, le cours s'est terminé en discutant un modèle de sélection plus simple que le N -BBM, avec un mouvement brownien branchant où la sélection est due à un mur absorbant qui avance à une vitesse constante.

Cours du 17 février 2020

Le dernier cours a porté sur les généalogies dans des modèles d'évolution sexuée et asexuée. Dans le cas d'une reproduction sexuée, l'arbre des ancêtres fait très vite apparaître des boucles quand on remonte vers le passé. Dans le cas d'une évolution neutre, pour une population de taille N constante, il faut remonter de l'ordre de $1,44 \log N$ générations pour trouver un ancêtre commun à toute la population et $2,55 \log N$ générations pour que toute la population ait tous ses ancêtres en commun. Dans le cas d'une reproduction asexuée, le modèle de Wright-Fisher, qui décrit une évolution neutre, prévoit des temps de coalescence beaucoup plus longs, d'ordre N , la taille de la population. Ces temps fluctuent même quand la taille de la population est grande et les arbres ont une statistique donnée par le coalescent de Kingman. Dans le cas d'une évolution asexuée en présence de sélection comme dans le N -BBM, plusieurs approches soit numériques soit analytiques indiquent que la statistique des arbres est modifiée par la sélection et est donnée par le coalescent de Bolthausen-Sznitman. Les temps de coalescence, en présence de sélection, sont alors beaucoup plus courts, de l'ordre de $(\log N)^3$.

SÉMINAIRES – PROBLÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION :
DE LA DYNAMIQUE DES FRONTS AUX GÉNÉALOGIES

Séminaire 1 – Formation de motifs dans des systèmes de type réaction-diffusion

Michel Droz (université de Genève), le lundi 13 janvier 2020

Depuis les travaux de Turing en 1952, on sait expliquer la formation de motifs comme ceux présents sur le pelage des animaux par l'apparition d'instabilités périodiques des solutions d'équations aux dérivées partielles décrivant la diffusion et la réaction d'espèces chimiques. Après avoir rappelé le cadre mathématique de ces instabilités, Michel Droz a présenté ses travaux sur le phénomène de Liesegang où un motif est créé dans le sillon d'un front qui avance.

Séminaire 2 – Propagation de fronts dirigés par une ligne de diffusion rapide

Jean-Michel Roquejoffre (Institut de mathématiques, université Paul Sabatier, Toulouse), le lundi 20 janvier 2020

Le séminaire de Jean-Michel Roquejoffre a été consacré au problème suivant : une ligne, sur laquelle se déroule un processus diffusif, échange avec un demi-plan dans lequel se produit un phénomène de réaction-diffusion du type Fisher-KPP. Il a étudié ce modèle en collaboration avec H. Berestycki et L. Rossi pour comprendre l'influence d'un réseau de transport sur une invasion biologique. Leurs résultats montrent comment, même en l'absence de réaction le long de la ligne de transport, la diffusion le long de cette ligne peut accélérer la propagation des fronts.

Séminaire 3 – Réaction-diffusion en présence d'obstacles : effets de la géométrie

Henri Berestycki (École des hautes études en sciences sociales, Paris), le lundi 27 janvier 2020

L'exposé de Henri Berestycki a été consacré à des équations de réaction-diffusion dans des domaines qui ne sont pas l'espace entier. Dans le cas d'une non-linéarité bistable, il a décrit les effets de la géométrie sur les phénomènes de propagation. Pour des ondes rencontrant des obstacles, dans le cas d'obstacles bornés dans une direction et formant un réseau périodique, il a donné les conditions géométriques qui impliquent soit le blocage, soit la propagation au-delà des obstacles. Certains de ces résultats sont liés à une conjecture célèbre de De Giorgi.

Séminaire 4 – Mouvement brownien branchant et champ libre gaussien : nombre de valeurs extrêmes

Zhan Shi (Laboratoire de probabilités, statistique et modélisation, Sorbonne Université, Paris), le lundi 3 février 2020

Le mouvement brownien branchant et le champ libre gaussien ont des propriétés statistiques très voisines. Dans son exposé, Zhan Shi a présenté quelques résultats récents sur les fonctions de grandes déviations du nombre de particules du mouvement brownien branchant et sur le champ libre gaussien, en esquissant les principales idées qui permettent d'établir une preuve mathématique de ces résultats.

Séminaire 5 – Une revue des résultats mathématiques autour du N -BBM et de l'équation de F-KPP bruitée

Jean Bérard (Institut de recherche mathématique avancée, université de Strasbourg), le lundi 10 février 2020

Ces dernières années de nombreux travaux ont porté sur l'équation de Fisher-KPP bruitée ou en présence d'un mur absorbant et sur le N -BBM (le mouvement brownien branchant où on maintient fixe le nombre N de particules en éliminant, lors de chaque branchement, celle des N particules qui se trouve le plus à gauche). Après avoir rappelé un certain nombre de prédictions obtenues au cours des dernières années par des méthodes, non rigoureuses, de la physique théorique, Jean Bérard a fait une revue des principales avancées mathématiques récentes sur ces problèmes.

Séminaire 6 – *The effects of spatial structure and selection on genealogies*

Nicholas H. Barton (Institute of Science and Technology Austria, Klosterneuburg, Autriche), le lundi 18 février 2020

Nicholas Barton a commencé par expliquer comment une sélection défavorable aux hétérozygotes conduit à une formation de motifs spatiaux dans une population avec des zones de transition entre les domaines dont on peut prédire la taille caractéristique en fonction des paramètres qui quantifient l'effet de la diffusion et de la sélection. Il a ensuite montré comment l'invasion d'une région par une mutation favorable a des effets sur la généalogie d'une population près de la zone de transition.

COURS À L'EXTÉRIEUR

Trois cours donnés au Tokyo College en octobre 2019 dans le cadre d'un échange avec le Collège de France.

Problèmes de réaction-diffusion : les différents visages de l'équation de Fisher-KPP

Le jeudi 24 octobre 2019

Ce premier cours a porté sur les problèmes de réaction-diffusion. Il s'est poursuivi par une présentation des nombreuses situations où apparaît l'équation de Fisher-KPP et d'une série de résultats récents sur cette équation.

Problèmes de réaction-diffusion : modèles simples d'évolution et généalogies

Le jeudi 24 octobre 2019

Beaucoup de modèles d'évolution peuvent se formuler comme des problèmes de réaction-diffusion. Les propriétés statistiques des arbres généalogiques qui apparaissent dans ces modèles peuvent se calculer. Cela permet en particulier de prédire la façon dont l'âge des ancêtres communs à toute une population dépend de sa taille. On peut également prévoir l'effet de la sélection sur les propriétés statistiques des arbres généalogiques.

Renormalisation et désordre : un modèle simplifié

Le mercredi 30 octobre 2019

Ce cours a surtout été consacré à présenter les principaux résultats de nos travaux de ces dernières années sur le problème de dépiégeage en présence de désordre. Après avoir fait un historique des principaux résultats connus sur cette question vieille d'une quarantaine d'années, il a été montré comment une version simplifiée du problème permet de prédire une transition du type Berezinsky-Kosterlitz-Thouless et comment la nature de cette transition peut être modifiée pour certaines distributions du désordre présentant une décroissance en loi de puissance.

RECHERCHE

Mes travaux de recherche au cours de l'année 2019-2020 ont été dans le prolongement de ceux qui ont été entrepris des années précédentes.

LES GRANDES DÉVIATIONS POUR LES SYSTÈMES HORS D'ÉQUILIBRE

Avec Tridib Sahu du Tata Institute à Bombay, en visite au Collège de France pendant la période 2017-2020, nous avons poursuivi nos travaux sur les systèmes hors d'équilibre. Nous avons publié deux longs articles consacrés au calcul de fonctions de grandes déviations et de mesures conditionnées par ces grandes déviations. Dans le premier article, nous avons considéré le cas de systèmes stochastiques ayant un petit nombre de degrés de liberté, en particulier le cas d'un processus de Markov et celui d'une équation de Langevin, et montré comment calculer les mesures stationnaires dont la dynamique est conditionnée par la valeur empirique d'une quantité mesurée sur une longue fenêtre de temps. Le second article a été consacré au cas de systèmes diffusifs comportant un grand nombre de degrés de liberté.

LE CAS DE FAIBLES COUPLAGES AVEC DES RÉSERVOIRS

Avec Ori Hirshberg et Tridib Sadhu, nous avons montré comment plusieurs résultats sur les fonctions de grandes déviations de la densité et du courant peuvent se généraliser au cas de faibles couplages avec des réservoirs. Il faut alors inclure explicitement les couplages avec les réservoirs pour décrire aussi bien les grandes déviations que les fluctuations.

LA MÉTHODE DES RÉPLIQUES À DEUX TEMPÉRATURES

Avec Peter Mottishaw de l'université d'Édimbourg nous avons poursuivi nos travaux sur les verres de spins et la méthode des répliques. Nous avons essayé de comprendre comment fonctionne la méthode des répliques quand on s'intéresse aux *overlaps* entre deux températures, dans le cas le plus simple, celui du modèle à énergies aléatoires. Nous avons montré que le schéma de brisure de symétrie des répliques inventé par Parisi il y a quarante ans doit être modifié, en laissant la taille des blocs fluctuer, pour pouvoir retrouver les résultats exacts obtenus pour le modèle d'énergies aléatoires.

DÉSORDRE ET RENORMALISATION

Avec mon étudiant Victor Dagard, et en étroite collaboration avec Zhan Shi, professeur de probabilités de Sorbonne Université et son collaborateur Xinxing Chen, nous avons continué à travailler sur la transition de dépiégeage en présence de désordre. Nous avons surtout étudié une équation de coalescence directement liée à ce problème de dépiégeage. Cette équation possède une famille de solutions invariantes d'échelle. Chacune de ces solutions correspond à un comportement critique différent et est caractérisée par la décroissance de la distribution du désordre

à l'infini. Nous avons montré, en particulier par des simulations numériques, que ces solutions décrivent bien le comportement asymptotique de conditions initiales sur la variété critique. À chacune de ces solutions, on peut associer un arbre aléatoire dont les propriétés de branchement peuvent être complètement décrites à partir de nos solutions invariantes d'échelle.

PUBLICATIONS

DERRIDA B. et SADHU T., « Large deviations conditioned on large deviations II : Fluctuating hydrodynamics », *Journal of Statistical Physics*, vol. 177, n° 1, 2019, p. 151-182, [<https://arxiv.org/abs/1905.07175>], [<https://doi.org/10.1007/s10955-019-02363-8>] [arXiv : 1905.07175].

DERRIDA B. et SADHU T., « Large deviations conditioned on large deviations I : Markov chain and Langevin equation », *Journal of Statistical Physics*, vol. 176, n° 4, 2019, p. 773-805, [<https://doi.org/10.1007/s10955-019-02321-4>] [arXiv : 1807.06543].

DERRIDA B., CHEN X., DAGARD V. et SHI Z., « The critical behaviors and the scaling functions of a coalescence equation », *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 53, n° 19, 2020, art. 195202, [<https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab8134>].

DERRIDA B., CHEN X., HU Y., LIFSHTS M. et SHI Z., « A max-type recursive model: Some properties and open questions », in V. SIDORAVICIUS (dir.), *Sojourns in Probability Theory and Statistical Physics - III*, Singapore, Springer, coll. « Springer Proceedings in Mathematics & Statistics », vol. 300, 2019, p. 166-186, [https://doi.org/10.1007/978-981-15-0302-3_6] [arXiv : 1705.04787].