Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre SERRE, professeur

On rencontre en arithmétique deux types de fonctions zêtas :

1) Celles de la géométrie algébrique. Elles sont associées aux variétés algébriques sur les corps de nombres, et à leur cohomologie. On les définit par des développements eulériens qui convergent absolument lorsque la partie réelle $R(s)$ de la variable est assez grande. On a prouvé dans divers cas particuliers que ces fonctions se prolongent analytiquement à tout le plan complexe et y vérifient une équation fonctionnelle du type usuel (avec certains facteurs gammas). On conjecture que c'est là un fait général.

2) Les séries de Dirichlet associées, par la transformation de Mellin, aux formes modulaires des groupes semi-simples (relativement à leurs sous-groupes arithmétiques). On sait dans de nombreux cas effectuer le prolongement analytique de ces fonctions, démontrer leur équation fonctionnelle et les exprimer comme combinaisons linéaires de fonctions ayant un développement eulérien.

Il semble maintenant raisonnable d'espérer que les fonctions du second type *contiennent comme cas particuliers celles du premier type.* Un tel résultat constituerait un progrès considérable. Nous en sommes loin ; mais les résultats de WEIL (*Math. Annalen*, 1967) relatifs aux courbes elliptiques sont fort encourageants, d'autant plus qu'ils ont été complétés par des résultats numériques très poussés (SWINNERTON-DYER, non publié).

Ce sont ces résultats de WEIL qui ont fait l'objet du cours. Il a fallu d'abord exposer, en une dizaine de séances, la théorie classique des formes automorphes (analytiques) d'une variable complexe : structure de l'espace quotient, caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe discret étudié, faisceaux de formes automorphes, lien avec le théorème de Riemann-Roch sur les courbes algébriques, cas particulier du groupe $SL(2, \mathbf{Z})$ et applications aux fonctions thêta, théorie des opérateurs de Hecke pour le groupe $\Gamma_0(N)$. La théorie de WEIL proprement dite a été exposée ensuite (4 séances) ; sous sa forme la plus frappante, elle conduit à conjecturer que toute courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ est isogène à un facteur de la jacobienne de la courbe modulaire correspondant à $\Gamma_0(N)$, où N est le « conducteur » de la courbe.

Une dernière séance a été consacrée à des conjectures sur la forme générale du conducteur, des facteurs locaux, et des facteurs gammas des fonctions zêtas des variétés projectives non singulières. Les facteurs gammas sont particulièrement intéressants ; il semble bien qu'ils ne dépendent que de la *décomposition de Hodge* en types (*p. q*) de la cohomologie considérée, et, pour une place réelle, de l'involution de la cohomologie définie par la conjugaison complexe.

Séminaire

Armand Brumer, *Travaux d'Iwasawa et Leopoldt sur les corps cyclotomiques* (6 exposés).

Roger Godement, *Interprétation adélique de la jubilation de Siegel* (1 exposé).

John Labute, *Groupes de Demuškin* (2 exposés).

Jean-Pierre Serre, *Groupes de Coxeter hyperboliques* (2 exposés).

Publications

A. Borel, S. Chowla, C. S. Herz, K. Iwasawa et J.-P. Serre, *Seminar on Complex Multiplication* (*Lecture Notes in Maths.*, n° 21, Springer-Verlag, 1966).

J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes* (W. A. Benjamin Publ., New York, 1966).

— *Prolongement de faisceaux analytiques cohérents* (*Ann. Inst. Fourier*, 16, 1966, p. 363-374).

Missions

Conférences à l'Ecole d'Eté de Driebergen, Pays-Bas (septembre 1966).