Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre SERRE, professeur

Soit K un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel k. On suppose que K est de caractéristique zéro et que k est algébriquement clos de caractéristique p. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et soit G le groupe de Galois de $\bar{K}$ sur K. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps p-adique $\mathbf{Q}_p$, et soit

$$\varrho : G \to \mathrm{Aut}(V)$$

un homomorphisme continu. On dit alors que V (ou ϱ) est une *représentation p-adique* de G.

Soit χ l'homomorphisme de G dans le groupe des unités p-adiques correspondant à l'action naturelle de G sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. Soit C le complété de $\bar{K}$. Si V est, comme ci-dessus, une représentation p-adique de G, posons $V_C = C \otimes V$ (le produit tensoriel étant pris sur $\mathbf{Q}_p$) ; pour tout $n \in \mathbf{Z}$, soit V_C^n le K-sous-espace de V_C formé des éléments x tels que $\varrho(s)x = \chi(s)^n x$ pour tout $s \in G$, et soit $V_C(n) = C \otimes_K V_C^n$. D'après un résultat de TATE, la somme directe des $V_C(n)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de V_C. On dit que V admet une *décomposition de Hodge p-adique* (ou que V est un *module de Hodge*) si ce sous-espace vectoriel est égal à V_C, autrement dit si l'on a :

$$V_C = \sum_{n \in \mathbf{Z}} V_C(n).$$

Soit V un tel module, soit $G_V = \varrho(G)$ le sous-groupe correspondant de Aut(V), et soit H_V *l'enveloppe algébrique* de G_V, autrement dit le plus petit sous-groupe algébrique (sur $\mathbf{Q}_p$) du groupe linéaire $\mathbf{GL}_V$ dont le groupe des points contienne G_V.

Le sujet du cours a été l'étude du groupe H_V, et en particulier la démonstration des résultats suivants :

1) Le groupe G_V est un sous-groupe *ouvert* du groupe $H_V(\mathbf{Q}_p)$ des points de H_V à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$.

Il revient au même de dire que l'algèbre de Lie du groupe analytique p-adique G_V est *algébrique*, au sens de Chevalley.

2) La décomposition $V_C = \sum V_C(n)$ définit un homomorphisme

$$h : \mathbf{G}_m/_C \to \mathbf{GL}_V/_C$$

de groupes algébriques sur C. Soit H_V^0 la composante neutre de H_V, et soit $H_V^0/_C$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_V/_C$ déduit de H_V^0 par extension des scalaires de $\mathbf{Q}_p$ à C. Alors $H_V^0/_C$ *contient le groupe* $h(\mathbf{G}_m/_C)$, image de h.

Lorsque de plus G_V est *résoluble*, on peut caractériser H_V^0 comme *le plus petit sous-groupe algébrique* R sur $\mathbf{Q}_p$ de $\mathbf{GL}_V$ *tel que* $R/_C$ *contienne* $h(\mathbf{G}_m/_C)$; c'est l'analogue p-adique du *groupe de Mumford-Tate.*

Il est probable que cette caractérisation de H_V^0 vaut sans supposer G_V résoluble ; on pourrait le prouver si l'on savait que $V_C = V_C(0)$ entraîne que G_V est fini.

3) Lorsque V varie, les groupes H_V forment un système projectif ; leur limite projective est un *groupe proalgébrique* H sur $\mathbf{Q}_p$, muni d'un homomorphisme $h : \mathbf{G}_m/_C \to H/_C$. La catégorie des modules de Hodge est équivalente à celle des H-modules de dimension finie ; si H° désigne la composante neutre de H, le groupe H/H° est le groupe de dimension zéro associé au groupe profini G ; le groupe H° ne change pas lorsqu'on remplace K par une extension finie.

4) Soit Θ le plus grand quotient commutatif du groupe proalgébrique H°. Le groupe Θ est une limite projective de tores ; il ne dépend que de p (mais pas de K) ; on a :

$$\Theta = \varprojlim T_E$$

où E parcourt l'ensemble des extensions finies de $\mathbf{Q}_p$.

(Si E est une extension de $\mathbf{Q}_p$ de degré n, on note T_E le tore $R_{E/\mathbf{Q}_p}(\mathbf{G}_m/_E)$ défini par E ; sa dimension est n, et $T_E(\mathbf{Q}_p)$ est canoniquement isomorphe à E^*.)

Ce résultat est essentiellement équivalent à un théorème exposé par TATE dans le séminaire 1965/66. Il est intimement lié aux propriétés des « multiplications complexes formelles » des groupes p-divisibles.

5) Faisons maintenant l'hypothèse que V ne fait intervenir que les exposants 0 et 1, autrement dit que $V_C = V(0) + V_C(1)$; posons

$$n_o = \dim_C V_C(0) \text{ et } n_1 = \dim_C V_C(1).$$

(Le module p-adique attaché à un groupe p-divisible est de ce type, l'entier n_1 étant égal à la dimension du groupe.)

Supposons que $n_1 = 1$ et que V soit un H_V^o-module simple. Alors le commutant de H_V^o dans End(V) est un corps commutatif E de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$, et H_V^o est égal au groupe algébrique des E-automorphismes de V ; il en résulte, conformément à ce qu'avaient conjecturé LUBIN et TATE, que le groupe G_V contient un sous-groupe *ouvert* de $\mathrm{Aut}_E(V)$.

Le cours s'est achevé par un essai de classification dans le cas $n_1 > 1$ (en supposant V absolument simple sur H_V^o), basé sur le fait que $H_V^o/_C$ contient un tore de dimension 1 *n'ayant que deux poids.*

SÉMINAIRE

Le séminaire a continué celui de 1965/66, relatif aux *groupes* p-*divisibles.* Il a comporté neuf exposés : quatre par Michel RAYNAUD et cinq par John TATE (qui en avait fait dix en 1965/66).

Michel RAYNAUD a rappelé les notions préliminaires nécessaires : schémas en groupes finis, dualité de Cartier, quotients. Il a ensuite donné la définition des groupes p-divisibles, et montré leur interprétation comme groupes formels. Dans son dernier exposé, il a démontré le théorème fondamental, dû à TATE, qui affirme que, en inégale caractéristique, le passage de l'anneau des entiers au corps des fractions définit un foncteur *pleinement fidèle* sur la catégorie des groupes p-divisibles. Il est possible que sa démonstration, différente de celle de TATE, puisse être adaptée au cas d'égale caractéristique.

Les exposés de John TATE ont eu pour thème le *théorème de relèvement* des variétés abéliennes, autrement dit le fait que relever une variété abélienne revient à relever le groupe p-divisible correspondant (la caractéristique résiduelle étant égale à p). A Woods Hole, en 1964, TATE en avait donné une démonstration basée sur une certaine construction cohomologique. Dans le séminaire, il a proposé une autre méthode, où variété abéliennes et groupes p-divisibles n'interviennent que par les *faisceaux* correspondants (pour des topologies d'ARTIN-GROTHENDIECK convenables). Cette méthode, malgré des difficultés techniques qui n'ont pas été entièrement résolues, paraît plus naturelle que la précédente, et de portée plus générale.

Un cas particulier intéressant est celui où la variété abélienne est *ordinaire*, autrement dit a le maximum possible de points d'ordre p. Il existe alors un *relèvement canonique* que l'on peut caractériser de diverses manières ; dans le cas des courbes elliptiques, ce relèvement avait été signalé en 1933 par H. HASSE (qui se plaçait à un point de vue quelque peu différent).

PUBLICATIONS

H. BASS, J. MILNOR et J.-P. SERRE, *Solution of the congruence subgroup problem for* SL_n ($n \geqslant 3$) *and* Sp_{2n} ($n \geqslant 2$) (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 33, 1967, p. 59-137).

J.-P. SERRE, *Local Class Field Theory* ; *Complex Multiplication* (chap. VI et XIII de J. CASSELS et A. FRÖHLICH, *Algebraic Number Theory*, Acad. Press, New York, 1967).

— *Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles* (*Proc. Conf. Local Fields,* Driebergen, 1966, Springer-Verlag, p. 118-131).

— *Commutativité des groupes formels de dimension* 1 (*Bull. Sci. math.*, 91, 1967, p. 113-115).

— *Représentations linéaires des groupes finis* (Paris, Hermann, 1968).

— *Abelian l-adic representations and elliptic curves* (Notes rédigées avec la collaboration de W. KUYK et J. LABUTE, W. A. Benjamin Publ., New York, 1968).

MISSIONS

Cours à McGill University, Montréal (septembre 1967).

Conférences à l'Université de Montréal (septembre 1967), à Haverford College (octobre 1967), à l'Institute for Advanced Study de Princeton (octobre-décembre 1967) et à l'Université de Grenoble (juin 1968).