Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre Serre, professeur

Le cours a été consacré aux *groupes discrets.* Il a comporté trois parties. Les deux premières ont été rédigées, sous forme de notes polycopiées, en collaboration avec H. Bass. La troisième a été résumée en une note aux *Comptes rendus.*

1. *Arbres et amalgames*

On a donné quelques propriétés élémentaires des *arbres* (graphes connexes non vides sans circuits) et de leurs groupes d'automorphismes. Par exemple :

1.1. Soit Γ un groupe. Pour qu'il existe un arbre X sur lequel Γ *opère librement,* il faut et il suffit que Γ soit un groupe *libre.*

(Cela revient à dire qu'un groupe est libre si et seulement si c'est le groupe fondamental d'un graphe connexe, ce qui est évident.)

On déduit de là le *théorème de Schreier* : tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

1.2. Si un groupe Γ opère sur un arbre X avec pour domaine fondamental un *segment* PQ, alors Γ est somme des stabilisateurs Γ_P et Γ_Q de P et Q, amalgamés suivant le stabilisateur $\Gamma_P \cap \Gamma_Q$ de l'arête PQ.

Réciproquement, toute somme amalgamée de deux groupes peut être obtenue par ce procédé, de façon essentiellement unique. Cela donne une méthode « géométrique » d'étude des sommes amalgamées, qui est souvent commode.

Les énoncés 1.1 et 1.2 ci-dessus sont des cas particuliers d'un théorème général, démontré par H. Bass, donnant la structure de tout groupe opérant sur un arbre.

2. *Le groupe* $\mathbf{SL}_2$

Soit K un corps muni d'une valuation discrète v, et soit O_v l'anneau de valuation correspondant. Le couple (K, v) définit un *arbre* X de la manière suivante : les sommets de X sont les *classes de* O_v*-réseaux* dans K^2 (deux réseaux étant considérés comme équivalents s'ils sont homothétiques), et deux sommets sont liés par une arête s'ils proviennent de réseaux L, L′ tels que L soit contenu dans L′ et que L′/L soit un O_v-module de longueur 1. Le groupe $\mathbf{PGL}_2(K)$, donc aussi le groupe $\mathbf{SL}_2(K)$, opère sur X. L'arbre X joue pour $\mathbf{SL}_2(K)$ le rôle que joue le demi-plan de Poincaré pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$; les stabilisateurs des sommets sont les sous-groupes bornés maximaux de $\mathbf{SL}_2(K)$; l'opérateur de Hecke « somme des sommets voisins d'un sommet donné » remplace le laplacien de la théorie classique.

De 1.1 et 1.2, on déduit les résultats suivants (dus à Y. Ihara) :

2.1. Soit Γ un sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(K)$ n'ayant pas de sous-groupe borné $\neq \{1\}$; alors Γ est un groupe *libre.*

2.2. Le groupe $\mathbf{SL}_2(K)$ est somme amalgamée de deux copies de $\mathbf{SL}_2(O_v)$; le sous-groupe suivant lequel se fait l'amalgamation est formé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbf{SL}_2(O_v)$ telles que $v(c) > 0$.

Prenons maintenant pour K un corps de fonctions d'une variable de corps des constantes k, la valuation v étant triviale sur k (elle correspond donc à un point P de la courbe C attachée à K). Soit A l'algèbre affine de la courbe C - {P}, et soit $\Gamma = \mathbf{SL}_2(A)$; c'est un sous-groupe discret de $\mathbf{SL}_2(K)$, muni de la topologie définie par v. Le groupe Γ opère sur l'arbre X défini par K et v ; les sommets du graphe quotient $X_\Gamma = X/\Gamma$ s'interprètent de façon simple en termes de classes de fibrés vectoriels de rang 2 sur C. On peut ainsi étudier la structure de X_Γ, donc aussi de Γ. On obtient notamment :

2.3. Supposons que C soit une *droite projective,* et que P soit de degré 1 ; on a alors $A = k[T]$, $\Gamma = \mathbf{SL}_2(k[T])$; le graphe X_Γ est réduit à une « pointe » :

$$\overset{0}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{2}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{3}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\cdots$$

On en déduit que $\mathbf{SL}_2(k[T])$ est somme de $\mathbf{SL}_2(k)$ et du groupe de Borel $B(k[T])$ amalgamés suivant leur intersection $B(k)$ (théorème de Nagao).

2.4. Supposons k fini. Alors X_Γ est réunion d'un graphe fini et d'un nombre fini de *pointes* (correspondant aux classes d'idéaux de A) du type ci-dessus. On peut tirer de là diverses propriétés de Γ ; par exemple, Γ *n'est pas un groupe de type fini* et Γ contient beaucoup de sous-groupes d'indice fini qui ne sont pas des groupes de congruence.

3. *Cohomologie des groupes discrets*

La *dimension cohomologique* d'un groupe Γ, notée $cd(\Gamma)$, est la borne supérieure des entiers m tels qu'il existe un Γ-module M avec $H^m(\Gamma, M) \neq 0$.

Pour que $cd(\Gamma) \leqslant n$, il faut et il suffit qu'il existe une suite exacte de $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules

$$0 \to L_n \to \ldots \to L_1 \to L_o \to \mathbf{Z} \to 0,$$

où les L_i sont $\mathbf{Z}[\Gamma]$-projectifs (ou $\mathbf{Z}[\Gamma]$-libres, cela revient au même). Lorsque l'on peut choisir les L_i à la fois *libres* et *de type fini*, on dit que Γ a la propriété (FL). La somme alternée

$$\chi(\Gamma) = \sum (-1)^i \operatorname{rang}(L_i)$$

est alors appelée la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de Γ.

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ. On peut montrer que $cd(\Gamma)$ est égal à $cd(\Gamma')$ ou à $+\infty$ (resp. à $cd(\Gamma')$ si Γ est sans torsion). Lorsque l'on peut choisir un tel sous-groupe Γ' qui soit de dimension cohomologique finie n, et qui vérifie (FL), on dit que Γ vérifie (VFL), et l'on pose (d'après C. T. C. WALL)

$$vcd(\Gamma) = n \quad \text{et} \quad \chi(\Gamma) = \frac{1}{(\Gamma : \Gamma')}\, \chi(\Gamma').$$

L'entier $vcd(\Gamma)$ et le nombre rationnel $\chi(\Gamma)$ sont indépendants du choix de Γ'.

Exemples

a) Le groupe $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ vérifie (VFL) ; on a

$$cd(\Gamma) = \infty,\ vcd(\Gamma) = 1 \quad \text{et} \quad \chi(\Gamma) = -\frac{1}{12} = \zeta(-1).$$

(Plus généralement, il semble qu'il y ait des rapports étroits entre caractéristiques d'Euler-Poincaré des groupes arithmétiques et valeurs des fonctions zêta pour les entiers négatifs.)

b) Soient $p_1,\ldots,p_m$ des nombres premiers distincts. Le groupe

$$\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}[\frac{1}{p_1\cdots p_m}])$$

vérifie (VFL), et l'on a :

$$vcd(\Gamma) = m + 1 \quad \text{et} \quad \chi(\Gamma) = -\frac{1}{12}(1 - p_1)\ldots(1 - p_m).$$

(Cela se démontre par récurrence sur m, en utilisant une décomposition de Γ en somme amalgamée analogue à celle de 2.2.)

Dans ce dernier exemple, Γ est un sous-groupe discret du groupe

$$G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_{p_1}) \times \ldots \times \mathbf{SL}_2(\mathbf{Q}_{p_m}).$$

On peut traiter, plus généralement, le cas où Γ est un sous-groupe discret d'un produit fini $G = \prod G_\alpha$, où les G_α sont de l'un des types suivants :

(i) un groupe de Lie réel à nombre fini de composantes connexes ;

(ii) le groupe $L_\alpha(K_\alpha)$ des K_α-points d'un groupe algébrique semi-simple L_α sur un corps localement compact ultramétrique K_α.

A chaque G_α on attache son « espace symétrique » X_α, défini de la façon suivante :

— dans le cas (i), X_α est le quotient de G_α par l'un de ses sous-groupes compacts maximaux ;

— dans le cas (ii), X_α est le produit des *immeubles* de BRUHAT-TITS correspondant aux différents facteurs simples de L_α.

Posons $d_\alpha = \dim(X_\alpha)$ et $d = \sum d_\alpha$. Le groupe Γ opère proprement sur l'espace *contractile* $X = \prod X_\alpha$. Si l'on suppose en outre que G/Γ est *compact,* et Γ sans torsion, on en déduit :

3.1. Γ vérifie (FL) et $cd(\Gamma) \leqslant d$.

3.2. Il existe sur chaque G_α une mesure invariante μ_α telle que, si $\mu = \bigotimes \mu_\alpha$, on ait $\chi(\Gamma) = \mu(G/\Gamma)$.

(La mesure μ_α ne dépend pas de Γ, mais seulement de G_α ; j'ignore si l'on a toujours $\mu_\alpha \neq 0$ dans le cas (ii) ; c'est en tout cas vrai si L_α est *déployé.*)

L'énoncé 3.1 s'applique aussi aux *groupes de* S-*unités* d'un groupe semi-simple (sur un corps de nombres algébriques), même si G/Γ n'est pas compact ; il est probable (mais non démontré) qu'il en est de même de 3.2. En particulier, *tout sous-groupe sans torsion de* $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Q})$ *qui est de type fini est de dimension cohomologique finie.*

PUBLICATIONS

J.-P. SERRE et J. TATE, *Good reduction of abelian varieties* (*Ann. of Math.*, 88, 1968, p. 492-517).

J.-P. SERRE, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 34, 1968, p. 37-52).

— *Cohomologie des groupes discrets* (*C. R. Acad. Sci. Paris,* 268, 1969, p. 268-271).

Édition

G. F. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen* (*herausgegeben von* J.-P. Serre, Springer-Verlag, 1968).

Missions

Conférences à la Société mathématique du Japon et aux Universités de Tokyo, Ochanomizu, Osaka, Kyoto, Nagoya (octobre 1968).