RÉSUMÉ DES COURS
DE L'ANNÉE SCOLAIRE 1973 - 1974

I. SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES

Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre Serre, professeur

Le cours a complété celui de 1968-1969 sur les *groupes discrets*. Il a comporté trois parties.

1. *Amalgames et points fixes*

Soit Γ un groupe. Considérons la propriété suivante :

(FA) — *Pour tout arbre* X, *et toute action de* Γ *sur* X, *il existe un point de* X *invariant par* Γ.

Vu les relations élémentaires entre arbres et amalgames, la propriété (FA) entraîne :

(Am) — *Le groupe* Γ *n'est pas isomorphe à un amalgame* $\Gamma_1 *_A \Gamma_2$ (*avec* $\Gamma_1 \neq A \neq \Gamma_2$).

Lorsque Γ est de type fini, et que $\Gamma/(\Gamma,\Gamma)$ est fini, les propriétés (Am) et (FA) sont équivalentes. L'avantage de (FA) est qu'on peut souvent la vérifier par des arguments géométriques. Le cours en a donné divers exemples, notamment *celui du groupe* $\mathbf{SL}_m(\mathbf{Z})$, $m \geqslant 3$, et plus généralement celui de tout groupe $G(\mathbf{Z}[\frac{1}{n}])$, où n est un entier $\geqslant 1$, et G un schéma en groupes déployé, simple, simplement connexe, de rang $\geqslant 2$. Il est probable (mais non démontré — même pour $\mathbf{SL}_3(\mathbf{Z})$) que les sous-groupes d'indice fini de tels groupes jouissent aussi de la propriété (FA).

2. *Bouts*

Soit Γ un groupe infini de type fini. Choisissons un espace X connexe, non vide, localement compact, localement connexe, sur lequel Γ opère librement de telle sorte que X/Γ soit compact ; on peut par exemple prendre pour X le graphe de Γ relativement à un ensemble générateur fini. D'après Hopf et Freudenthal, l'espace des bouts X^b de X ne dépend que de Γ ; on le note Γ^b, et on l'appelle *l'espace des bouts* de Γ. On a des isomorphismes :

$$\mathrm{Ker}\ \{H^1_c(X,\mathbf{Z}) \to H^1(X,\mathbf{Z})\} \simeq H^1(\Gamma,\mathbf{Z}[\Gamma]) \simeq \mathrm{Coker}\ \{\mathbf{Z} \to H^\circ(\Gamma^b,Z)\},$$

où H^i_c (resp. H^i) désigne le i-ième groupe de cohomologie de Čech à supports compacts (resp. à supports quelconques).

Les principaux résultats sur Γ^b sont les suivants (cf. D. E. Cohen, *Groups of cohomological dimension one,* Lect. Notes in Math., n° 245) :

2.1 — rg. $H^1(\Gamma,\mathbf{Z}[\Gamma])$ = 0,1 *ou* ∞, *i.e.* Γ *a un, deux, ou une infinité de bouts.*

On peut préciser un peu ce résultat : si V est un ouvert non vide de Γ^b, et si $(U_i)_{i \in I}$ est une partition finie de Γ^b en ouverts non vides U_i, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $j \in I$ tels que $\gamma(U_i) \subset V$ pour tout $i \neq j$.

2.2 — *Pour que* Γ *ait deux bouts, il faut et il suffit qu'il possède un sous-groupe cyclique d'indice fini.*

2.3 (Stallings) — *Si* Γ *est sans torsion et a une infinité de bouts, il est isomorphe à un produit libre* $\Gamma_1 * \Gamma_2$, *avec* $\Gamma_1 \neq \{1\} \neq \Gamma_2$.

(Signalons que les « structures bipolaires » utilisées dans la démonstration de Stallings ont une interprétation simple en termes d'arbres.)

2.4 (Stallings) — *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) Γ *est libre.*

(ii) *est de dimension cohomologique* 1.

(iii) Γ *est sans torsion et possède un sous-groupe libre d'indice fini.*

Ce dernier résultat est valable même lorsque Γ n'est pas de type fini (Swan).

3. *Dualité*

Soit Γ un groupe de type fini. Supposons que Γ soit *de type* (FP), autrement dit qu'il existe une résolution finie

$$(\mathrm{P}) \qquad 0 \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1} \to \dots \to \mathrm{P}_0 \to \mathbf{Z} \to 0$$

du $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module $\mathbf{Z}$ par des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules P_i projectifs de type fini. Si (P) est une telle résolution, le complexe (P*) formé par les duaux $\mathrm{P}_i^* = \mathrm{Hom}$ $(\mathrm{P}_i, \mathbf{Z}[\Gamma])$ des P_i mérite d'être appelé le *complexe dualisant* de Γ ; à homotopie près, il ne dépend pas du choix de (P). On a $\mathrm{H}^q(\mathrm{P}^*) = \mathrm{H}^q(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma])$.

[Lorsque Γ est de la forme $\pi_1(\mathrm{T})$, où T est un complexe simplicial fini tel que $\pi_i(\mathrm{T}) = 0$ pour $i \neq 1$ (i.e. un espace $\mathrm{K}(\Gamma,1)$ au sens d'Eilenberg-MacLane), on a

$$\mathrm{H}^q(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma]) = \mathrm{H}^q_c(\mathrm{X}, \mathbf{Z}),$$

où X est un revêtement universel de T. Pour $q = 1$, on retrouve la situation du n° 2 ci-dessus.]

Posons $\mathrm{I}^q = \mathrm{H}^q(\Gamma, \mathbf{Z}[\Gamma])$. Les I^q sont des Γ-modules ; ce sont même des modules sur le *groupe de commensurabilité* de Γ (classes d'équivalence d'isomorphismes $\Gamma' \to \Gamma''$, où Γ' et Γ'' sont des sous-groupes d'indice fini de Γ, deux isomorphismes étant équivalents s'ils coïncident sur un sous-groupe d'indice fini). Il serait intéressant d'étudier plus en détail la structure de ces modules, qui constituent une généralisation de la théorie des bouts ; des résultats dans cette direction viennent d'être obtenus par T. Farrell.

Soit maintenant M un Γ-module. Supposons que les I^q, ou M, soient sans torsion. On établit alors facilement l'existence d'une *suite spectrale de dualité*

$$(3.1) \qquad \mathrm{H}_p(\Gamma, \mathrm{I}^q \otimes \mathrm{M}) \Rightarrow \mathrm{H}^{q-p}(\Gamma, \mathrm{M}).$$

Un cas particulier important est celui, dû à R. Bieri et B. Eckmann (*Invent. Math.* 20, 1973, p. 103-124), où il existe un entier $d \geqslant 0$ tel que $\mathrm{I}^q = 0$

pour $q \neq d$ et que le groupe $\mathrm{I} = \mathrm{I}^d$ soit sans torsion. La suite spectrale (3.1) dégénère alors en un *isomorphisme*

$$\text{(3.2)} \qquad \mathrm{H}^p(\Gamma,\ \mathrm{M}) \simeq \mathrm{H}_{d-p}(\Gamma,\ \mathrm{I} \otimes \mathrm{M}),$$

valable pour tout entier p, et tout Γ-module M. On dit alors que Γ est un *groupe à dualité,* de dimension d, et de *module dualisant* I. Bieri-Eckmann démontrent :

3.3 — La dimension cohomologique de Γ est égale à d.

3.4 — L'isomorphisme (3.2) peut être défini par le cap-produit avec la classe fondamentale de $\mathrm{H}_d(\Gamma,\ \mathrm{I})$.

Signalons aussi :

3.5 — Si Ω est un module injectif sur un anneau commutatif k, et si M est un $k[\Gamma]$-module, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{H}^p(\Gamma,\mathrm{M}),\Omega) \simeq \mathrm{H}^{d-p}(\Gamma,\mathrm{Hom}_k(\mathrm{M},\ \mathrm{I}_\Omega)), \qquad \text{où } \mathrm{I}_\Omega = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{I},\Omega).$$

Lorsque I est isomorphe à **Z**, on dit que Γ est un *groupe de Poincaré* (Bieri, Johnsson-Wall). Ces groupes posent des problèmes intéressants, tel le suivant : est-il vrai que tout groupe de Poincaré de dimension 2 soit isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte ? On l'ignore, même lorsque le groupe peut être défini par une seule relation.

Eckmann-Bieri donnent de nombreux exemples de groupes à dualité. En voici d'autres (Borel-Serre) :

(i) sous-groupes *arithmétiques* sans torsion des groupes algébriques linéaires (sur un corps de nombres) ;

(ii) sous-groupes S-*arithmétiques* sans torsion des groupes algébriques réductifs.

Seul, le type (i) a été exposé dans le cours ; il repose sur l'adjonction de « coins » à certaines variétés $\mathrm{T} = \mathrm{X}/\Gamma$, ainsi que sur le théorème de Solomon-Tits donnant le type d'homotopie des immeubles à groupe de Coxeter fini.

Le cours a été complété par quelques exposés à l'I.H.E.S. sur les *caractéristiques d'Euler-Poincaré* des groupes S-arithmétiques, et les résultats récents de K. Brown (à paraître aux Invent. Math.). L'un des théorèmes de Brown affirme que, si Γ est « de type (VFL) », et si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est de la forme N/p^a, p premier, $a \geqslant 0$, $(N,p) = 1$, alors Γ contient un sous-groupe d'ordre p^a. Combiné à des résultats de Harder, ceci entraîne l'existence de « gros » p-groupes dans certains groupes de Chevalley. Par exemple, $E_8(\mathbf{Z})$ contient des p-groupes d'ordre 2^{30}, 3^{10}, 5^4, 7^4, 11^2, 13^2, 19, 31 ; une méthode de réduction (mod.l) due à Minkowski montre d'ailleurs que ces p-groupes sont d'ordre maximal (comme sous-p-groupes de $E_8(\mathbf{Q})$) pour $p \neq 3,5$. Il serait intéressant d'étudier ces sous-groupes plus en détail, et notamment celui d'ordre 31 : est-il vrai que son action sur toute *représentation fondamentale* de E_8 soit un multiple de la représentation régulière ?

Séminaire

Il a comporté 14 exposés, faits par Y. Amice (1), G. Ligozat (5), J.-P. Serre (1) et J. Vélu (7). Le sujet en était un travail récent de Y. Manin : *Périodes des formes paraboliques et séries de Hecke p-adiques,* Math. Sbornik 92, 1973. Si $f = \Sigma\, a_n q^n$ est une forme parabolique normalisée de poids k, Manin étudie les valeurs des séries de Dirichlet $\varphi_{f,\chi}(s) = \Sigma\, a_n\, \chi(n)\, n^{-s}$ aux points entiers s de l'intervalle $[0, k-2]$; il montre que ce sont des nombres algébriques (à des facteurs de normalisation près), en donne des expressions explicites (nouvelles, même dans le cas de la fonction τ de Ramanujan), et en déduit des fonctions analytiques p-adiques à la Kubota-Leopoldt-Iwasawa.

Publications

A. Borel et J.-P. Serre, *Corners and arithmetic groups* (*Comm. Math. Helv.*, 48, 1973, p. 436-491).

J.-P. Serre, *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques* (*Lect. Notes in Math.* n° 350, Springer-Verlag, 1973, p. 191-268).

Édition

W. Kuyk et J.-P. Serre, *Modular Functions of One Variable* III (*Lect. Notes in Math.* n° 350, Springer-Verlag, 1973, 350 p.).

Missions et conférences

Cours :

— *Propriétés de congruence des formes modulaires,* Université d'Utrecht, septembre 1973.

Exposés :

— *Variétés algébriques sur les corps finis,* King's College, Londres, novembre 1973 ;

— *Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius* (*d'après P. Deligne*), Séminaire N. Bourbaki, Paris, février 1974 ;

— *La fonction de Ramanujan,* Grenoble, mars 1974 ;

— *Formes modulaires de poids* 1, British Mathematical Colloquium, avril 1974, et Ecole Polytechnique Fédérale, Zürich, juin 1974 ;

— *Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo l,* Journées arithmétiques, Bordeaux, mai 1974.

Distinctions

Election comme membre correspondant de l'Académie des Sciences, membre honoraire de la London Mathematical Society, et membre étranger de la Royal Society.