I. SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES

Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre SERRE, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours a été consacré aux *méthodes adéliques* en géométrie algébrique et théorie des nombres. Il a comporté deux parties :

1. *Intégration locale*

Notations

Soient :

K	un corps local ultramétrique,
O_K	l'anneau des entiers de K,
v	la valuation discrète de K,
π	une uniformisante de K,
$k = O_K/\pi O_K$	le corps résiduel de K, supposé fini,
$q = \|k\|$	le nombre d'éléments de k.

On munit le groupe additif de K de la mesure de Haar $\mu = dx$ telle que $\mu(O_K) = 1$. Si $x \in K$, on pose :

$$\|x\| = \mu(xO_K) = q^{-v(x)} ;$$

c'est la valeur absolue normalisée de x.

Mesure associée à une forme différentielle de degré maximum
(cf. Bourbaki, FRV, § 10)

Soit X une variété K-analytique, de dimension n en tout point, et soit α une forme différentielle analytique de degré n sur X. On associe à α la mesure positive $||\alpha||$ définie en coordonnées locales par :

$$||\alpha|| = ||f|| \; dx_1 \dots dx_n \quad \text{si} \quad \alpha = f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Les mesures ainsi définies jouissent de diverses propriétés simples, notamment :

(i) *Masse totale*

Si X est compacte non vide, et α partout non nulle, la masse totale $\int_X ||\alpha||$ de la mesure $||\alpha||$ est un nombre rationnel de la forme a/q^m, avec $a, m \in \mathbf{Z}$. L'image de cet élément dans $\mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$ ne dépend pas du choix de α ; c'est un *invariant* de X, qui caractérise X à isomorphisme près, cf. *Topology* 3 (1965), p. 409-412.

(Lorsque α s'annule en certains points de X, la masse de $||\alpha||$ n'est plus nécessairement de la forme a/q^m. Toutefois, lorsque la caractéristique de K est 0, les méthodes d'Igusa citées ci-dessous permettent de montrer que cette masse est un nombre *rationnel* ; il est probable que ce résultat subsiste en caractéristique $p \neq 0$; il serait intéressant d'en avoir une démonstration directe.)

(ii) *Formule de masse pour les extensions de degré donné de* K

Comme l'a remarqué HarishChandra, la *formule d'intégration de Hermann Weyl* est valable sur le corps K ; cette formule permet d'intégrer les fonctions centrales sur un groupe réductif, lorsque l'on connaît leurs restrictions aux divers sous-groupes de Cartan. En appliquant ce résultat au groupe multiplicatif d'un corps gauche de degré r^2 sur K, on obtient une *formule de masse* pour les extensions totalement ramifiées de degré r de K :

$$\sum_{L} q^{-c(L)} = r,$$

où L parcourt l'ensemble de ces extensions (dans une clôture séparable fixée de K), et où $c(L)$ désigne la « partie sauvage » de la valuation du discriminant de L sur K (cf. C.R. 286 (1978), p. 1031-1036).

(iii) *Bonne réduction*

Soit S un schéma lisse sur O_K, de dimension relative n, et prenons pour X la variété $S(O_K)$ des O_K-points de S. Prenons pour α une forme différentielle provenant d'une section inversible du faisceau des n-formes différentielles de S sur O_K. La mesure $||\alpha||$ correspondante est alors la mesure « canonique » de $X = S(O_K)$; elle est caractérisée par la propriété suivante : pour tout $m \geqslant 1$, les fibres de l'application :

$$X = S(O_K) \rightarrow S(O_K/\pi^m O_K) \quad (\text{« réduction mod } \pi^m \text{ »})$$

ont pour mesure q^{-nm}. On a en particulier :

$$\int_X ||\alpha|| = q^{-n}\,|S(k)|,$$

où $|S(k)|$ désigne le nombre de k-points du schéma S.

(iv) *Intégration sur les fibres*

Soit $f : X \rightarrow Y$ une submersion, Y étant une variété de dimension m en tout point. Supposons X et Y munies de formes différentielles α et β, de degrés n et m respectivement, avec β partout $\neq 0$. Si y est un point de Y, et $X_y = f^{-1}(y)$ la fibre correspondante, on définit sur X_y une forme $\theta_y = \alpha/\beta$ de degré $n - m$, par « division » de α par β. La mesure $||\alpha||$ est l'intégrale des mesures $||\theta_y||_{y \in Y}$ par rapport à la mesure $||\beta||$: pour toute fonction continue Φ sur X, à support compact, on a :

$$\int_X \Phi(x)\,||\alpha(x)|| = \int_Y \Big(\int_{X_y} \Phi(x)\,||\theta_y(x)||\Big)\,||\beta(y)||.$$

Lorsque $||\alpha||$ est partout non nulle, et que f est propre, la masse totale $F(y)$ de $||\theta_y||$ est une fonction localement constante de y ; on a :

$$F(y) = \operatorname{mes}(f^{-1}(U))/\operatorname{mes}(U),$$

pour tout voisinage ouvert U assez petit de y dans Y.

Les fonctions F, F* *et* Z *de Weil et Igusa*

Supposons K *de caractéristique zéro.* Soient X et α comme ci-dessus, avec X compacte et α partout $\neq 0$; notons dx la mesure $||\alpha||$. Soit $f : X \rightarrow K$ une fonction analytique ; on suppose que f n'est localement constante en aucun point de X. L'ensemble C_f des points critiques de f (i.e. des points où $df = 0$) est alors un sous-ensemble analytique de X d'intérieur vide et de mesure 0 ; son image $V_f = f(C_f)$ est une partie finie de K (c'est l'ensemble des « valeurs critiques » de f).

A ces données, sont attachées trois fonctions :
F, « série singulière locale »,
F*, « somme exponentielle »,
Z, « fonction zêta locale ».

Leur définition est la suivante (cf. Weil, *Œuvres Sci.* III, p. 71-157 ainsi que Igusa, *Forms of Higher Degree*, Springer-Verlag, 1978) :

Définition de F

La restriction de f à $X - C_f$ est une submersion :

$$X - C_f \rightarrow K - V_f .$$

On en déduit, cf. (iv) ci-dessus, une famille de mesures $\|\theta_y\| = \|dx/df\|$ sur les fibres X_y de f, pour $y \in K - V_f$. Par définition, F(y) est la *masse totale de* $\|\theta_y\|$, autrement dit la « densité des solutions » de l'équation $f(x) = y$.

Ainsi, F(y) est une fonction de $y \in K$, définie en dehors de l'ensemble fini V_f des valeurs critiques . C'est une fonction positive, localement constante sur $K - V_f$, sommable, et à support borné. On peut la caractériser par la formule :

$$\int_X \varphi(f(x))dx = \int_K \varphi(y)F(y)dy,$$

formule qui est (par exemple) valable pour toute fonction positive mesurable φ sur K.

On s'intéresse au comportement de F(y) quand y tend vers un point de V_f ; on peut d'ailleurs se restreindre au cas où V_f est réduit à $\{0\}$: c'est ce que fait le plus souvent Igusa.

Définition de F*

C'est la transformée de Fourier de F :

$$F^*(t) = \int_K F(y)\psi(ty)dy = \int_X \psi(tf(x))dx \qquad (t \in K),$$

où ψ est un caractère additif non trivial de K, fixé une fois pour toutes. La fonction F* est localement constante, et bornée ; on s'intéresse à son comportement pour $\|t\| \rightarrow \infty$.

On reconstitue F à partir de F* par la formule d'inversion :

$$F(y) = \int_{\pi^{-e}O_K} F^*(t)\psi(-ty)dy,$$

valable pour tout e assez grand (dépendant de y).

Définition de Z

C'est une fonction (méromorphe) d'un caractère multiplicatif $\omega : K^* \rightarrow \mathbf{C}^*$. Or un tel caractère est bien déterminé par sa restriction χ au groupe U_K des unités de K, ainsi que par sa valeur $t = \omega(\pi)$ en l'uniformisante π. On peut donc considérer Z comme une fonction $Z(\chi,t)$ des deux variables χ et t.

Lorsque $|t| \leqslant 1$, $Z(\chi,t)$ est définie par les intégrales et séries (absolument convergentes) :

$$Z(\chi,t) = \int_X \omega(f(x))dx = \int_K \omega(y)F(y)dy$$

$$= \sum_{e \in \mathbf{Z}} t^e q^{-e} \int_{U_K} \chi(u)F(u\pi^e)du.$$

Pour χ fixé, $Z(\chi,t)$ est une *fonction rationnelle* de t ; ce résultat fondamental a été démontré par Igusa en utilisant *la résolution des singularités* (cela lui permet, *grosso modo,* de se ramener au cas où C_f est un diviseur à croisements normaux). Ceci fait, on peut définir $Z(\chi,t)$ par prolongement analytique pour tout $t \in \mathbf{C}$ distinct des pôles. De plus, lorsque V_f est réduit à $\{0\}$, Igusa montre que $Z(\chi,t) = 0$ *pour presque tout* χ. Ces résultats lui permettent, par transformation de Mellin et transformation de Fourier, d'obtenir des développements asymptotiques de $F(y)$ pour $y \to V_f$ et de $F^*(t)$ pour $||t|| \to \infty$. Les exposants qui figurent dans ces développements sont liés aux multiplicités des diviseurs qui apparaissent dans la résolution des singularités de C_f.

Exemple

Lorsque f est une *fonction de Morse,* i.e. n'a que des points critiques ordinaires, on a :

$$F^*(t) = O(||t||^{-n/2}) \qquad \text{pour } ||t|| \to \infty.$$

Si $n \geqslant 3$, cela montre que F^* est sommable, donc que F se prolonge en une fonction continue sur K tout entier.

Le cas archimédien

Des résultats analogues valent lorsque l'on remplace K par **R** ou **C**. Les fonctions F^* et Z prennent alors les formes suivantes, plus classiques :

$$F^*_\Phi(t) = \int_X \Phi(x)\mathbf{e}(tf(x))dx \qquad \text{(intégrale oscillante)}$$

$$Z_\Phi(s) = \int_X \Phi(x)|f(x)|^s\, dx,$$

où Φ est une fonction de Schwartz-Bruhat sur X (cela revient à considérer $F^*(t)$ et $Z(s)$ comme des *distributions*). Ici encore, F et F^* ont des développements asymptotiques, et Z un prolongement analytique. Cela se démontre, soit au moyen de la résolution des singularités, soit par la théorie des *polynômes de Bernstein* (cf. J.E. Björk, *Rings of Differential Operators*, North Holland, 1979).

2. *Adèles et nombres de Tamagawa*

Notations

Soit K un corps global, i.e. un corps de nombres algébriques ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini. On note Σ_f (resp. Σ_∞) l'ensemble des places ultramétriques (resp. archimédiennes) de K, et l'on pose $\Sigma = \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$. Si $v \in \Sigma$, on note K_v le complété de K pour v, et O_v l'anneau des entiers du corps local K_v, si $v \in \Sigma_f$.

L'anneau A_K des adèles de K est le produit restreint des (K_v, O_v) ; un adèle est un élément $x = (x_v)$ de $\prod_{v \in \Sigma} K_v$ tel que $x_v \in O_v$ pour presque tout v. Si S est une partie finie de Σ contenant Σ_∞, l'anneau produit :

$$A_K(S) = \prod_{v \in S} K_v \times \prod_{v \in \Sigma - S} O_v$$

est un sous-anneau de A_K ; quand S varie, la réunion des $A_K(S)$ est égale à A_K. On munit A_K de la topologie dans laquelle les $A_K(S)$, munis de leur topologie naturelle de produit, sont des sous-espaces ouverts ; c'est un espace localement compact. Le corps K se plonge diagonalement dans A_K ; il est discret dans A_K et le quotient A_K/K est compact.

Points adéliques des variétés algébriques

Soit X une variété algébrique sur K. L'espace $X(A_K)$ des *points adéliques* de X se définit, suivant les goûts, comme :

(style Grothendieck) l'ensemble des points du schéma X à valeurs dans la K-algèbre A_K,

(style Weil) le produit restreint des $X(K_v)$ vis-à-vis des sous-espaces de « points entiers ».

(L'équivalence de ces deux définitions se vérifie sans difficulté.)

L'espace $X(A_K)$ est localement compact. Il contient l'ensemble $X(K)$ des K-points de X. Quand X est affine, $X(K)$ est discret dans $X(A_K)$.

Tout K-morphisme $f : X \to X'$ définit une application continue :

$$f_A : X(A_K) \to X'(A_K).$$

Si f est une immersion fermée (au sens algébrique), ou est propre (au sens algébrique), il en est de même de f_A (au sens topologique). L'énoncé analogue pour les immersions ouvertes est inexact ; toutefois, si f est lisse à fibres absolument irréductibles, on peut montrer, en utilisant un théorème de Lang-Weil, que f_A est ouverte.

Mesures adéliques

Supposons X lisse et absolument irréductible de dimension n. Pour tout $v \in \Sigma_f$, soit q_v le nombre d'éléments du corps résiduel k_v de K_v, et soit $N_v(X)$ le nombre de k_v-points de la « réduction de X en v » (cette réduction dépend du choix d'un modèle, mais deux choix différents conduisent aux mêmes $N_v(X)$, à un nombre fini d'exceptions près). Faisons *l'hypothèse* :

$$\text{(C)} \qquad N_v(X) = q_v^n + O(q_v^{n-3/2}) \qquad \text{quand } q_v \to \infty.$$

Cette hypothèse entraîne que le produit des $N_v(X)/q_v^n$ est absolument convergent ; d'après Deligne, elle est satisfaite lorsque les nombres de Betti $B^1(X)$ et $B^2(X)$ sont nuls.

Soit alors α une forme différentielle de degré n sur X, partout $\neq 0$, et soit $\|\alpha\|_v$ la mesure définie par α sur $X(K_v)$, cf. § 1. Vu (C), le produit tensoriel restreint des $\|\alpha\|_v$ converge absolument, et définit une mesure :

$$\|\alpha\|_A = \bigotimes_{v \in \Sigma} \|\alpha\|_v$$

sur l'espace adélique $X(A_K)$. D'après une remarque de Tamagawa, on a :

$$\|\lambda\alpha\|_A = \|\alpha\|_A \qquad \text{pour tout } \lambda \in K^*.$$

Nombre de Tamagawa

Ce qui précède s'applique au cas où X est un groupe algébrique linéaire connexe G qui est extension d'un groupe semi-simple par un groupe unipotent ; on choisit pour α une forme biinvariante $\neq 0$ du groupe G ; la mesure correspondante $\|\alpha\|_A$ est indépendante du choix de α. On définit alors la *mesure de Tamagawa* μ_G sur le groupe adélique $G(A_K)$ par la formule :

$$\mu_G = c_K^{-n} \|\alpha\|_A \qquad (n = \dim G),$$

où le facteur de normalisation c_K est donné par :

$$c_K = \begin{cases} |d|^{1/2} & \text{si K est un corps de nombres de discriminant } d, \\ q^{g-1} & \text{si K est un corps de fonctions de genre } g \text{ sur } \mathbf{F}_q. \end{cases}$$

Le volume de $G(A_K)/G(K)$ pour μ_G est fini ; c'est le *nombre de Tamagawa* de G ; on le note $\tau(G)$. Il jouit des propriétés suivantes :

(a) $\tau(G_a) = 1$, G_a désignant le *groupe additif* ;

(b) $\tau(G_1 \times G_2) = \tau(G_1) \times \tau(G_2)$;

(c) τ ne change pas par *restriction des scalaires* $R_{K'/K}$, où K′ désigne une extension finie (non nécessairement séparable) de K.

(On peut définir des « nombres de Tamagawa » pour des groupes plus généraux, ne vérifiant pas la condition (C), par exemple des tores. Il faut alors introduire des facteurs de convergence convenables. Signalons à ce sujet que, lorsque K est un corps de fonctions, les facteurs proposés par Ono ne conviennent pas toujours ; il est nécessaire de les modifier. Cette question n'a pas été abordée dans le cours.)

Groupes unipotents

Soit U un groupe unipotent connexe. Si U est déployé, i.e. extension successive de groupes G_a, on a $\tau(U) = 1$; cela résulte facilement de (a) ci-dessus. Par contre, si U n'est pas déployé (ce qui est possible si K est un corps de fonctions), on peut avoir $\tau(U) \neq 1$. Il serait intéressant de voir si la valeur de $\tau(U)$ peut se calculer à partir de la cohomologie galoisienne de U ; peut-être y a-t-il une formule analogue à celle d'Ono pour les tores ?

Groupes semi-simples

A. Weil a conjecturé que :

$$\tau(G) = 1$$

quand G est semi-simple simplement connexe. Ceci a été démontré pour les groupes classiques (Weil, Mars — du moins si caract. $K \neq 2$), pour certains groupes exceptionnels (Demazure, Mars), pour les groupes déployés (Langlands, Harder), et pour les groupes quasi-déployés sur les corps de nombres (Lai).

Exemple : le groupe $\mathbf{SL}_n$

C'est un cas très simple : on démontre ue $\tau(\mathbf{SL}_n) = 1$ par récurrence sur n, en utilisant la formule de Poisson, suivant une méthode introduite par Siegel et améliorée par Weil. On en a donné deux applications :

(a) $K = \mathbf{Q}$ (cf. Siegel, *Ges. Abh.* III, p. 39-46)

Soit M_n l'espace des réseaux de volume 1 de $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. On peut identifier M_n à l'espace homogène $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$, ce qui le munit d'une mesure invariante μ (on prend sur $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$ la mesure de Haar qui donne le volume 1 au réseau des points entiers de son algèbre de Lie). On a :

$$\mu(M_n) = \zeta(2) \ldots \zeta(n) ;$$

cela équivaut au fait que $\tau(\mathbf{SL}_n) = 1$. De plus, si φ est une fonction intégrable à support compact sur $\mathbf{R}^n$, on a :

$$(*) \qquad \int \varphi(x)dx = \mu(S_\varphi)/\mu(M_n),$$

où S_φ désigne la fonction sur M_n qui associe à un réseau L la somme des valeurs de φ en les points $\neq 0$ de L.

On tire de là le *théorème de Minkowski-Hlawka* : si Ω est une partie mesurable de $\mathbf{R}^n$ telle que $\text{mes}(\Omega) < 1$, il existe un réseau $L \in M_n$ qui ne rencontre pas Ω en dehors de 0. (L'hypothèse $\text{mes}(\Omega) < 1$ n'est d'ailleurs pas optimale. Pour $n = 2$, par exemple, W. Schmidt a montré qu'on peut la remplacer par $\text{mes}(\Omega) < 16/15$.)

(b) K = corps de fonctions d'une courbe C de genre g sur $\mathbf{F}_q$

(cf. Harder, *J. Crelle* 242 (1970), p. 16-25)

Dans ce cas, la formule $\tau(\mathbf{SL}_n) = 1$ se traduit par une *formule de masse* pour les fibrés vectoriels E de rang n sur C tels que det E soit isomorphe à un fibré L de rang 1 donné.

Si $M_n(L)$ désigne un ensemble de représentants de tels fibrés, on a :

$$\sum_{E \in M_n(L)} 1/w(E) = \frac{1}{q-1} q^{(n^2-1)(g-1)} \zeta_C(2) \ldots \zeta_C(n),$$

où $w(E)$ est l'ordre du groupe d'automorphismes du fibré E, et ζ_C est la fonction zêta de la courbe C.

Il y a aussi un analogue de la formule d'intégration (*). On en déduit par exemple que, si $s(E)$ désigne le *nombre de sections* $\neq 0$ du fibré E, on a (pour $n \geqslant 2$) :

$$(\sum_E s(E)/w(E))/(\sum_E 1/w(E)) = q^{c+n(1-g)}, \text{ où } c = \deg L.$$

(En d'autres termes, la « valeur moyenne » de $s(E)$ sur $M_n(L)$ est égale à $q^{c+n(1-g)}$.)

Le cours s'est terminé par l'application de la formule de masse de Harder au calcul des nombres de Betti des variétés de modules de fibrés vectoriels stables (cf. Harder-Narasimhan, *Math. Ann.*, 212 (1975), p. 215-248).

D'autres exemples de calculs de nombres de Tamagawa seront donnés dans le cours de 1982-1983.

Publication

J.-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, 54, 1981, p. 323-401).

Missions

Cours

— *Selected Topics in Algebraic Geometry and Number Theory,* Harvard, septembre-décembre 1981.

Exposés

— *Kajdan's Property,* Harvard, septembre 1981 ;

— *Bounds for the Eigenvalues of the Hecke Operators,* Harvard, octobre 1981 ;

— *Integral Points on Algebraic Varieties,* Penn. State University, décembre 1981 ; Göttingen, avril 1982 ;

— *The Ramanujan Function,* Penn. State University, décembre 1981 ;

— *Sommes de trois carrés dans* $F_q[T]$, Marseille, janvier 1982 ; Madrid, mai 1982 ; Bordeaux, juin 1982 ;

— *Le groupe* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, séminaire de K-théorie, Paris, avril 1982 ;

— *Points rationnels sur les variétés algébriques* (3 exposés), Madrid, avril 1982 ;

— *Points entiers sur les variétés algébriques,* Barcelone, mai 1982 ;

— *La fonction de Ramanujan, Barcelone,* mai 1982 ;

— *Bornes pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke,* Bâle, juin 1982.