Algèbre et géométrie

M. Jean-Pierre SERRE, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

L'un des exposés du Colloque sur les Motifs de Seattle (à paraître dans les publications de l'Amer. Math. Soc.) a pour titre : « *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques* ».

Le cours s'est proposé de détailler les conjectures en question, et d'expliquer les relations qu'elles ont entre elles. Il a comporté deux parties.

1. Structure des groupes de Galois motiviques

Le corps de base k est un sous-corps de $\mathbf{C}$. On admet les « conjectures standard » de Grothendieck, ainsi que la conjecture de Hodge. La catégorie des motifs sur k est isomorphe, grâce au foncteur fibre « réalisation de Betti », à celle des représentations linéaires d'un certain groupe proalgébrique sur $\mathbf{Q}$, le *groupe de Galois motivique* G_M. Ce groupe est pro-réductif. Ses principales propriétés (conjecturales) sont les suivantes :

1.1 ? – La composante neutre G_M^o de G_M est le groupe motivique relatif à la fermeture algébrique $\bar{k}$ de k dans $\mathbf{C}$. Le quotient G_M/G_M^o s'identifie à $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, vu comme groupe proalgébrique de dimension 0.

Comme G_M^o est pro-réductif connexe, on peut l'écrire $G_M^o = C.D$, où C est la composante neutre du centre de G_M^o, et D le groupe dérivé de G_M^o.

1.2 ? – Le groupe des caractères de C est indépendant de k, et peut être complètement explicité (en termes de la plus grande extension de $\mathbf{Q}$ de type CM). Il en est de même de $C \cap D$ et de $S = C/(C \cap D)$.

1.3 ? – Le groupe D est *simplement connexe.*

Cette dernière conjecture est particulièrement optimiste.

2. Représentations ℓ-adiques associées aux motifs

On suppose maintenant que k est de type fini sur $\mathbf{Q}$. Si E est un motif sur k, on note G_E le quotient de G_M défini par E. Pour tout nombre premier ℓ, on dispose d'une représentation ℓ-adique :

$\rho_{\ell,E} : \Gamma_k \rightarrow G_E(\mathbf{Q}_\ell)$.

On conjecture :

2.1 ? – L'image de $\rho_{\ell,E}$ est *ouverte* dans $G_E(\mathbf{Q}_\ell)$.

Supposons que G_E soit connexe, ainsi que le noyau de $G_M \rightarrow G_E$. Alors :

2.2 ? – Les $\rho_{\ell,E}$, pour ℓ variable, définissent un homomorphisme de Γ_k dans le groupe adélique $G_E(\mathbf{A}^f)$, dont l'image est *ouverte* pour la topologie adélique (on note $\mathbf{A}^f$ l'anneau $\mathbf{Q} \otimes \hat{\mathbf{Z}}$ des adèles finis de $\mathbf{Q}$).

Les conjectures ci-dessus sont liées à la suivante :

2.3 ? – L'ensemble des $\mathbf{Z}$-formes de E est *fini*, modulo l'action de Aut(E). (Une « $\mathbf{Z}$-forme » de E est la donnée, pour tout nombre premier ℓ, d'un $\mathbf{Z}_\ell$-réseau de la réalisation ℓ-adique de E, stable par Γ_k, et coïncidant avec le $\mathbf{Z}_\ell$-réseau standard pour presque tout ℓ.)

Supposons maintenant que k soit un corps de nombres.

2.4 ? – Si v est une place de k non ramifiée dans E, de caractéristique résiduelle p_v, l'élément de Frobenius correspondant à v et à un nombre premier $\ell \neq p_v$ est une classe de conjugaison semi-simple de G_E, qui est rationnelle sur $\mathbf{Q}$ et indépendante de ℓ.

Supposons que E domine le motif de Tate, et notons G_E^1 le noyau de l'homomorphisme $\mathbf{t} : G_E \rightarrow \mathbf{G}_m$ correspondant. Soit K un sous-groupe compact maximal de $G_E^1(\mathbf{C})$.

2.5 ? – Les classes des éléments de Frobenius (convenablement normalisées) appartiennent à l'espace Cl K des classes des conjugaisons de K. Elles sont *équiréparties* pour la mesure de Cl K qui est l'image de la mesure de Haar de K.

Ce dernier énoncé généralise la *conjecture de Sato-Tate* sur les courbes elliptiques (pour laquelle $G_E = \mathbf{GL}_2$, $G_E^1 = \mathbf{SL}_2$ et $K = \mathbf{SU}_2(\mathbf{C})$).

Le cours s'est achevé par une discussion des résultats partiels connus sur cette dernière conjecture, lorsque $k = \mathbf{Q}$ et que E est une courbe elliptique « de Weil ».

MISSIONS

Cours

Cohomological invariants and characteristic classes in algebra and algebraic geometry, Harvard, octobre-décembre 1992.

Exposés

— *Répartitions asymptotiques de valeurs propres de graphes et d'opérateurs de Hecke,* Strasbourg, juin 1992.

— *Représentations ℓ-adiques attachées aux motifs,* Univ. Paris 7, juillet 1992.

— *Invariants cohomologiques des algèbres étales*, Univ. Paris 7, septembre 1992.

— *An application of Hypothesis* (H) *to Manin's obstructions,* Harvard, septembre 1992.

— *On Galois cohomology,* Columbus, octobre 1992 ; Madison, novembre 1992 ; Ottawa, novembre 1992.

— *Cohomological invariants of étale algebras,* Columbus, octobre 1992 ; Princeton, novembre 1992.

— *The use of Dirichlet series in number theory,* Harvard, octobre 1992.

— *Characteristic classes in Galois cohomology,* Princeton, novembre 1992.

— *Negligible cohomology classes,* Madison, novembre 1992.

— **C** *is algebraically closed,* Harvard, novembre 1992 ; Ottawa, novembre 1992.

— *Asymptotic distribution of eigenvalues of Hecke operators,* Princeton, novembre 1992 ; Boulder, décembre 1992.

— *Cohomological invariants of* G-*torsors*, Harvard, décembre 1992.

— *Algèbres étales : forme trace, invariants cohomologiques,* Besançon, mai 1993.

— *Semi-simplicité des produits tensoriels de représentations en caractéristique p*, ENS, mai 1993.

— *Exemples de courbes à jacobienne complètement décomposable,* Univ. Paris 7, mai 1993.

— *Semisimplicity of tensor products of group representations in characteristic p*, ETH, Zürich, mai 1993.

— *Le rôle des séries de Dirichlet en théorie des nombres,* ENS, juin 1993.