Chaire Atomes et rayonnement

Cours 2021-22

Jean Dalibard

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Prochains séminaires

Vendredi 1 avril : Anna Minguzzi, LPMMC, CNRS and Université Grenoble-Alpes
Tan contact in one-dimensional quantum gases

Vendredi 8 avril : Atac Imamoglu, Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, Suisse
Strongly correlated electrons in atomically thin semiconductors

Vendredi 15 avril : Leticia Tarruell, ICFO - The Institute of Photonic Sciences, Barcelone, Espagne
Realizing a one-dimensional topological gauge theory in an optically dressed Bose-Einstein condensate

Vendredi 15 avril, 14h00-18h00 : atelier **"New trends in quantum fluid physics: mixtures and spinor gases"**

Intervenants :
Bruno Laburthe-Tolra, Lauriane Chomaz, Goulven Quemener, Jérôme Beugnon, Thomas Bourdel, Alessandro Zenesini

https://www.college-de-france.fr/site/jean-dalibard/symposium-2021-2022.htm

Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques

Cours 4
L'état fondamental du gaz de Bose :
LHY, spectre d'excitation et gouttelettes quantiques

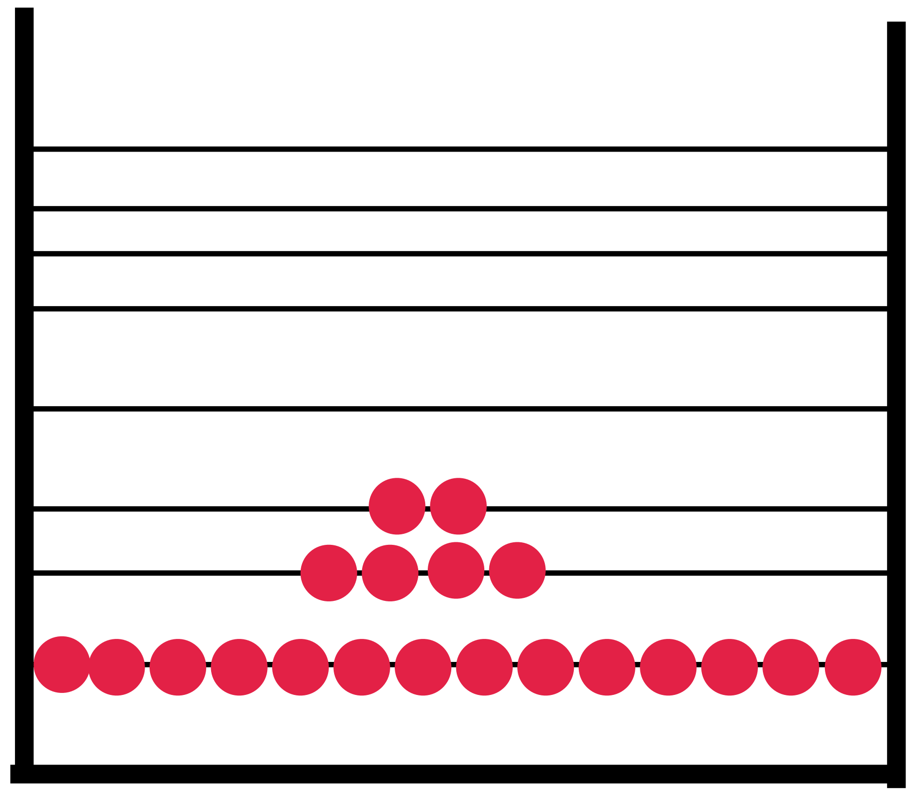
Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2021-22

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Bilan des cours précédents

Etude de l'état fondamental d'un gaz de Bose de densité n en présence d'interactions binaires $\sum_{i<j} V(r_{ij})$

Approche de Bogoliubov menée en supposant une faible déplétion de l'état $\boldsymbol{k} = 0$



$\epsilon_0 = 0$

$\longrightarrow$ Hamiltonien quadratique en $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}$ pour $\boldsymbol{k} \neq 0$

Valable pour une déplétion quantique $\frac{n'}{n} = \frac{N - N_0}{N} \ll 1$

Nous avons trouvé $\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}$ a : longueur de diffusion

Energie de l'état fondamental (Lee-Huang-Yang, 1957) : $\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2}gn^2\left[1 + \alpha\sqrt{na^3} + \ldots\right]$

$\alpha = \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \approx 4.81$

$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$

champ moyen + fluctuations quantiques

Bilan (suite) : Le spectre d'excitation

$$\hat{H}'' = E_0 + \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} \hbar\omega_k \, b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}$$

Relation de dispersion des excitations de Bogoliubov : $\hbar\omega_k = \left[\epsilon_k\left(\epsilon_k + 2ng\right)\right]^{1/2}$ avec $\epsilon_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\epsilon_k \ll gn$ | $\epsilon_k \gg gn$ | k

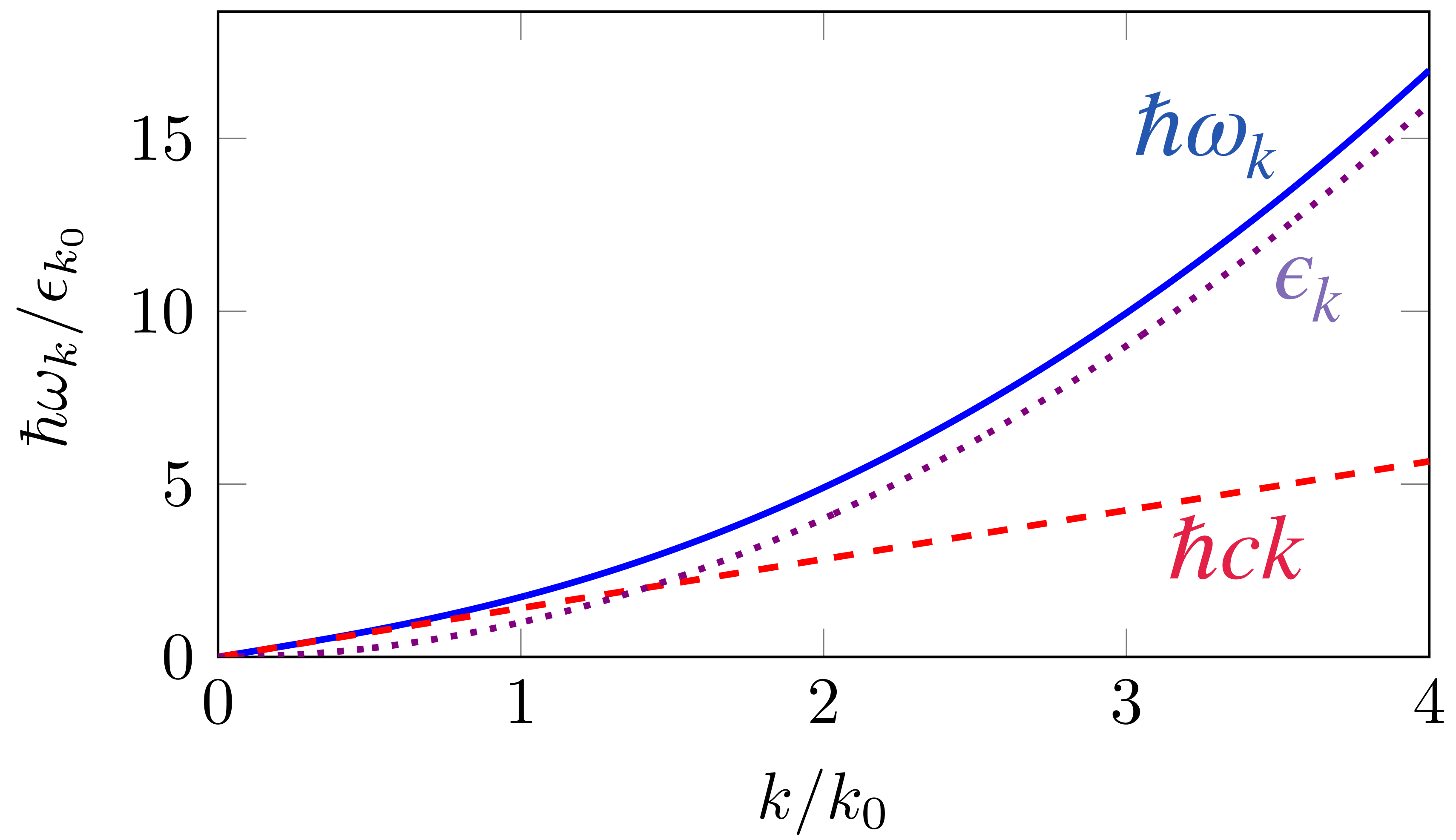
0 | $\hbar\omega_k \approx \hbar c k$ | $\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + gn$

phonons | **particules libres**

$$k_0 = \frac{1}{\xi} \equiv \sqrt{8\pi n a}$$

$$\frac{a}{\xi} = \sqrt{8\pi n a^3} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\xi} \ll \frac{1}{a}$$

Typiquement, $\xi \sim 500$ nm, $a \sim 5$ nm



Plan du cours

1. Mesures de l'énergie de Lee-Huang-Yang

Le problème des pertes à trois corps, mode de respiration et équation d'état

2. Le spectre d'excitation d'un condensat

Le régime "habituel" $ka \ll 1$ *: phonons vs. particule libre*

Le régime $ka \sim 1$ *: un problème encore ouvert …*

3. Les gouttelettes quantiques

Comment rendre l'énergie LHY dominante tout en restant à basse densité ?

Le problème des pertes à trois corps

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2} g n^2 \left[1 + \alpha \sqrt{n a^3} + \dots\right]$$

$$\alpha = 128/15\sqrt{\pi}$$

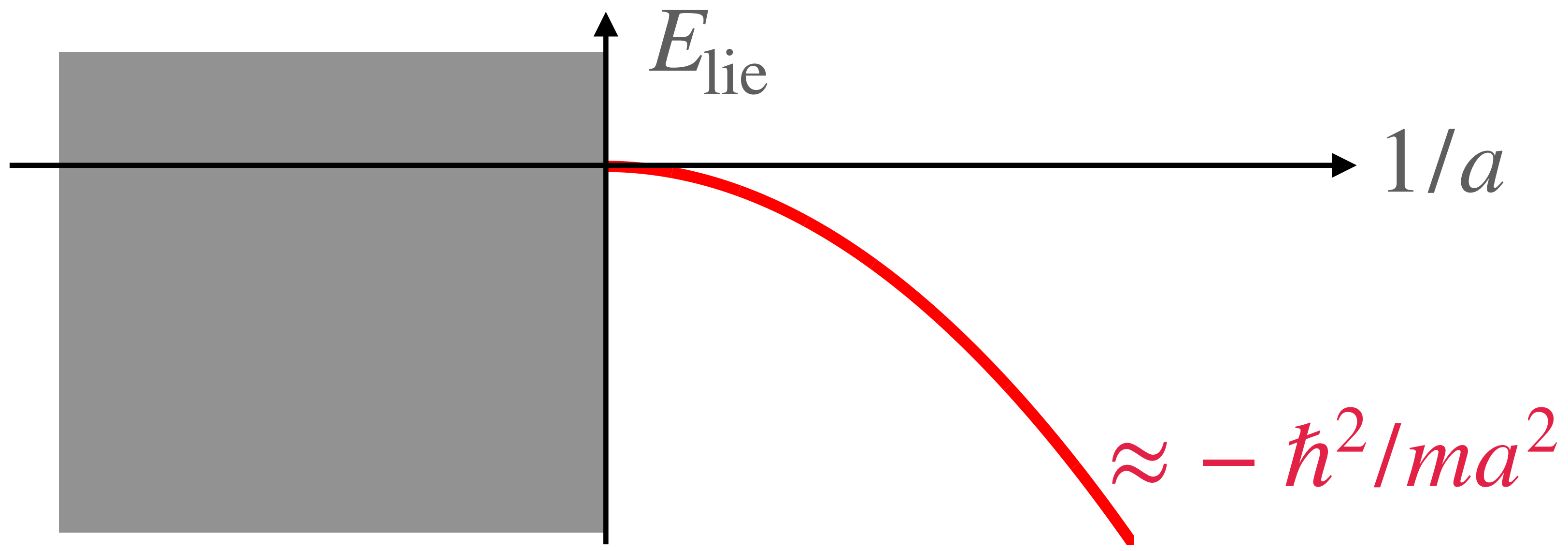
Pour observer les effets au delà du champ moyen, on a intérêt à prendre na^3 pas trop petit

Utilisation d'une résonance de Fano-Feshbach pour augmenter a

On doit par ailleurs choisir $a > 0$ pour avoir un condensat stable

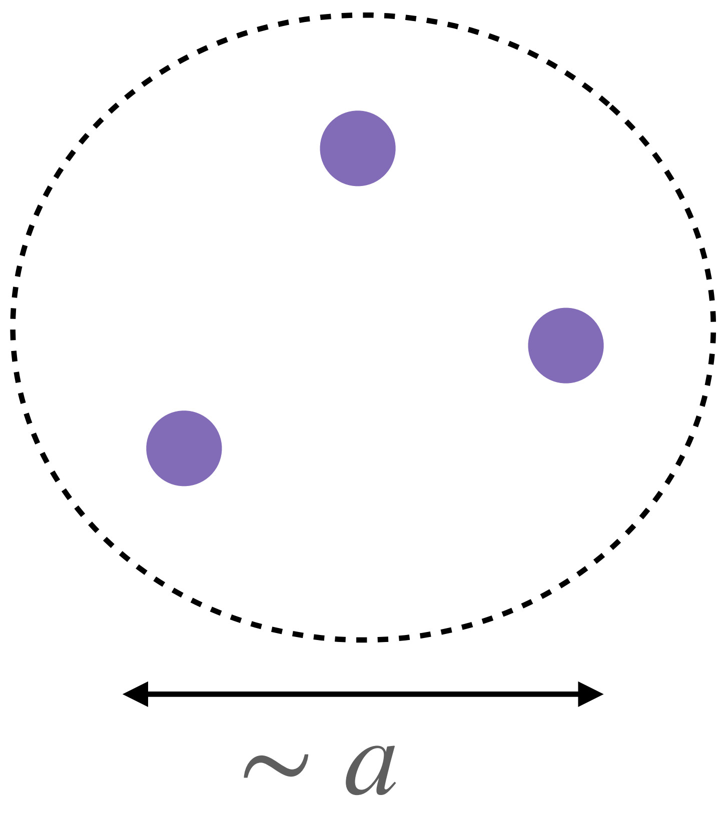
Si $a < 0$, *le terme de champ moyen* $\dfrac{g}{2}\dfrac{N^2}{L^3}$ *tend à faire "effondrer" le gaz sur lui-même ("Bose nova")*

On sait qu'on a dans ce cas un dimère de grande extension ($\sim a$) et faiblement lié



Une fois ce dimère formé via une collision à trois corps, il peut relaxer vers des états liés plus profonds

Contrainte sur la densité



Formation du dimère possible si 3 atomes sont à une distance $\lesssim a$

Taux de pertes : $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -L_3 n^2 N$ $\qquad L_3 \approx 3.9\,\dfrac{\hbar a^4}{m}$ Fedichev *et al.*

Pour que l'expérience se fasse à densité $\approx$ constante, il faut limiter la durée τ de l'expérience :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \times \tau \ll N \qquad\qquad \tau \ll \frac{1}{L_3 n^2}$$

Il faut par ailleurs que le condensat atteigne son état d'équilibre : $\tau > \dfrac{\hbar}{\mu} \approx \dfrac{\hbar}{gn}$

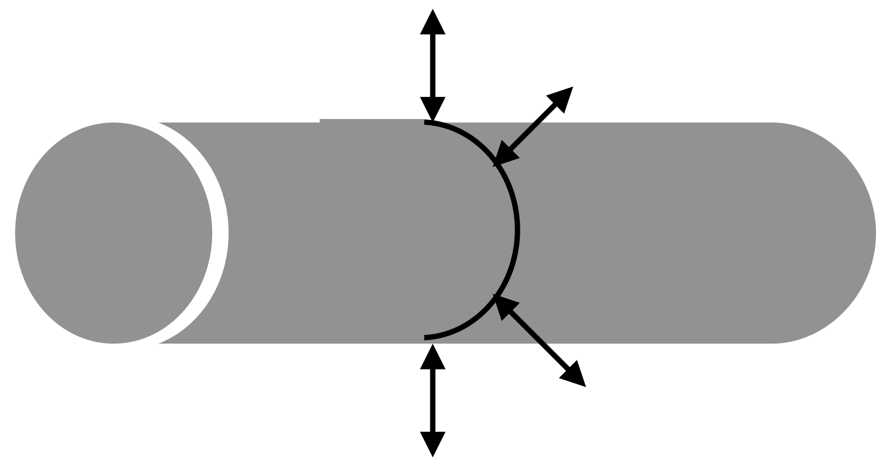
$$\frac{\hbar}{gn} \ll \frac{1}{L_3 n^2} \longrightarrow na^3 \ll 1$$

A basse température, on ne peut produire un gaz de Bose à l'équilibre que dans le régime d'interaction faible

Une première approche de E_{LHY}

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2} g n^2 \left[1 + \alpha \sqrt{n a^3} + \ldots \right]$$
$$\alpha = 128/15\sqrt{\pi}$$

Mode de respiration avec un confinement harmonique transverse isotrope de pulsation ω



géométrie "cigare"

Traitement "champ moyen" avec $\mu = gn$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + gN|\psi|^2 \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi$$

On prédit que la fréquence du mode de respiration est $\omega_{\mathrm{resp.}} = 2\omega$

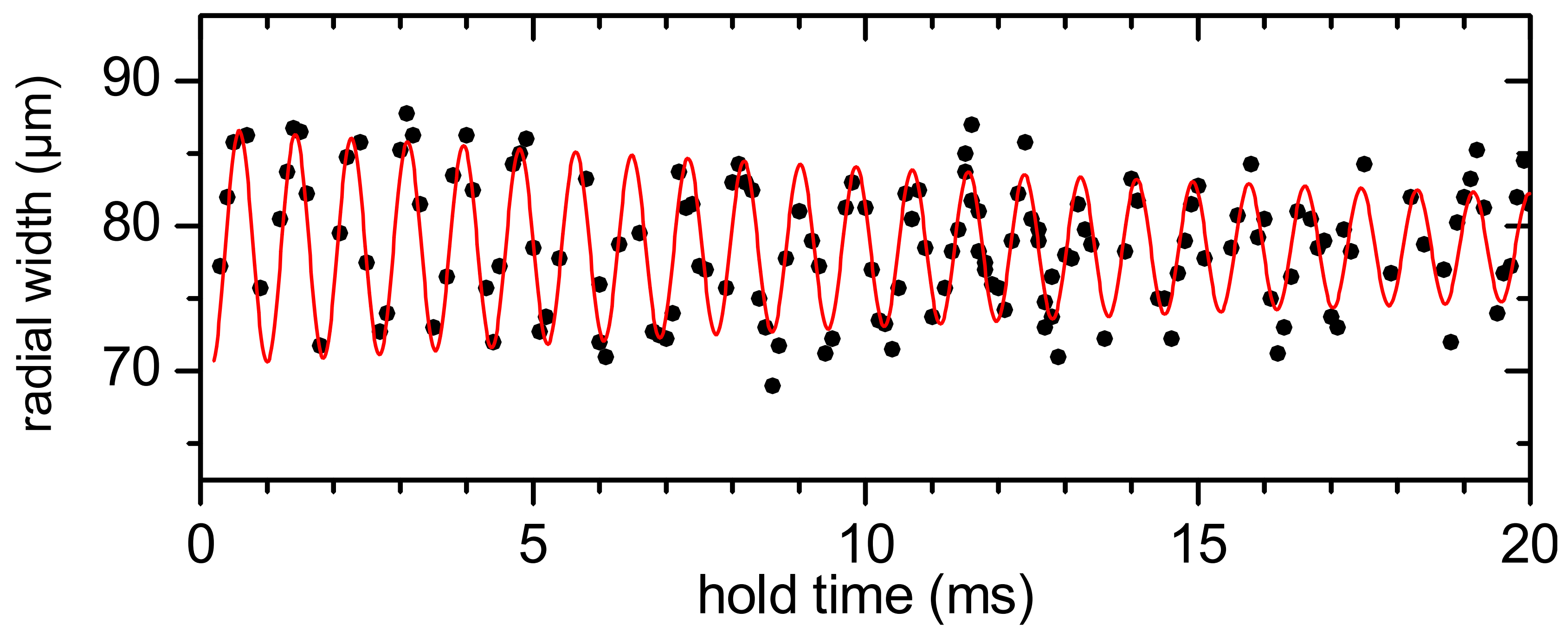
Pitaevskii & Rosch
Chevy, Bretin *et al.*

Une déviation par rapport à cette prédiction pour un gaz de bosons peut être la signature d'une contribution au delà du champ moyen

L'expérience d'Innsbruck : bosons "composites"

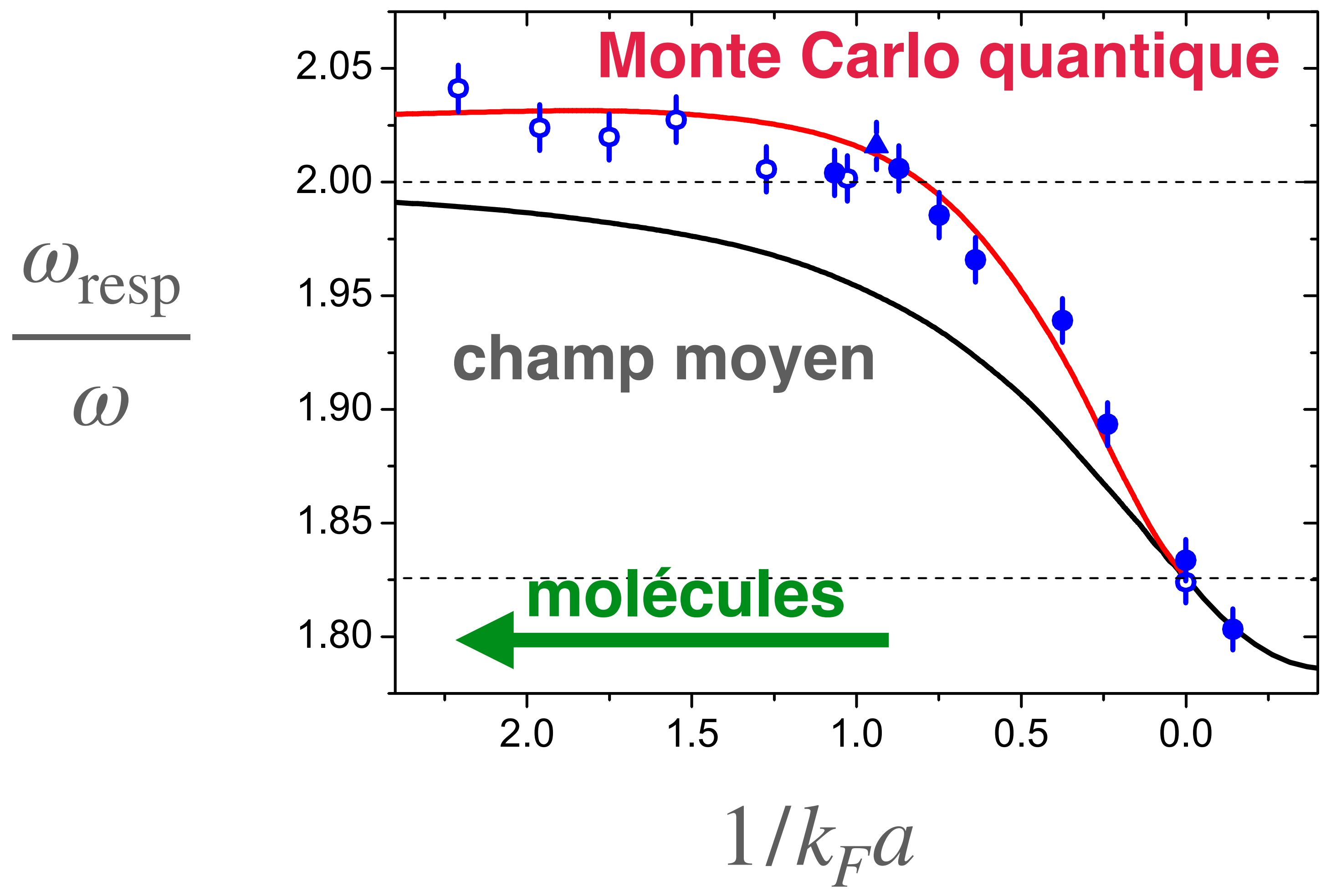
Altmeyer, Riedl *et al.*, PRL **98** 040401 (2007)

Gaz de fermions (^{6}Li) sur la partie "moléculaire" d'une résonance de Feshbach $\longrightarrow$ $\approx$ $^6Li_2$ (dimère bosonique)



Ici $\dfrac{\omega}{2\pi} = 1185$ Hz précision 10^{-3}

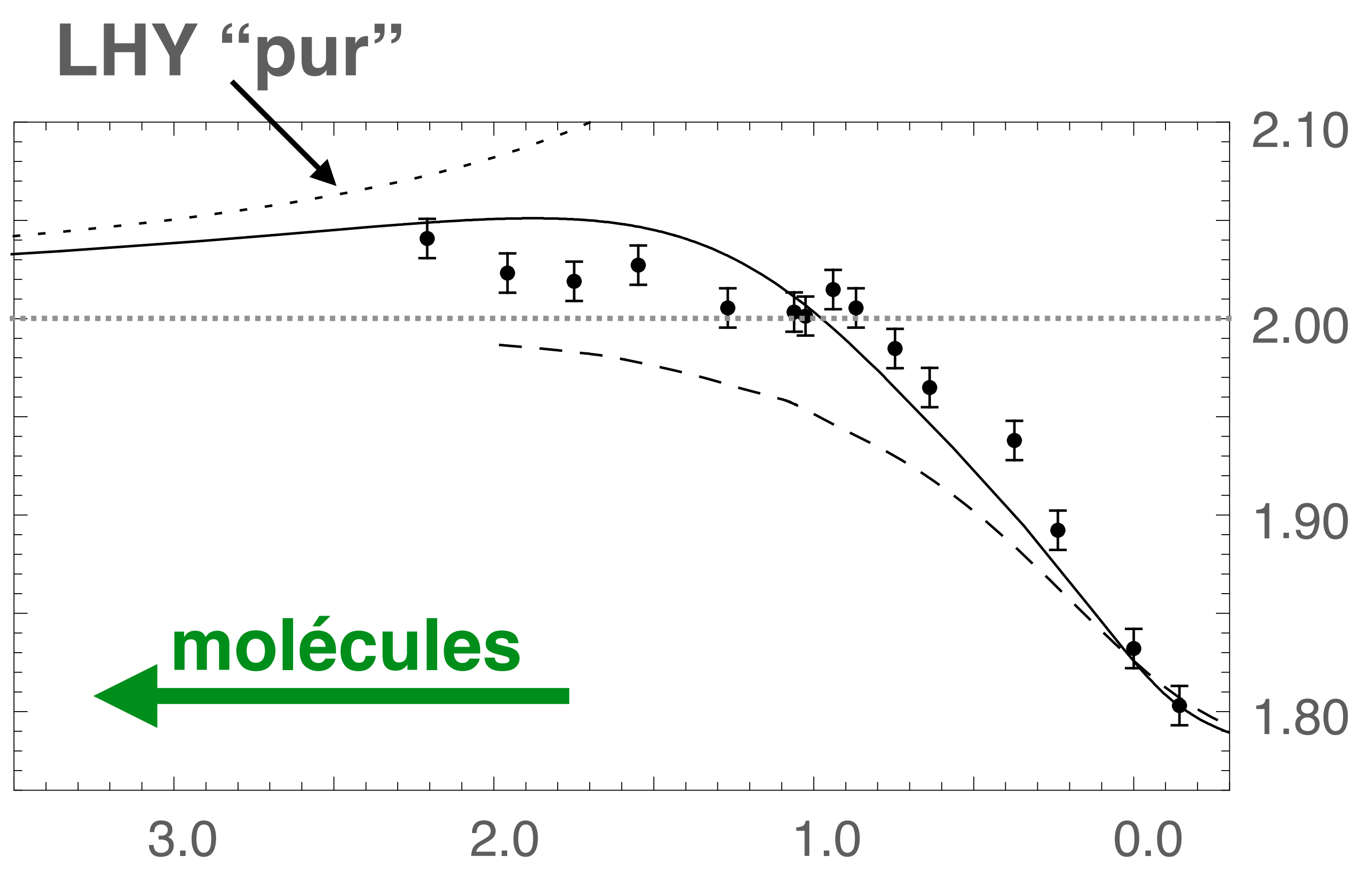
Analyse des résultats



Déviation claire par rapport au champ moyen :

$$\omega_{\rm resp} > 2\omega$$

mais est-ce dû à LHY ?



extrait de la thèse de S. Nascimbene (calculé d'après S. Stringari)

Détermination de l'équation d'état

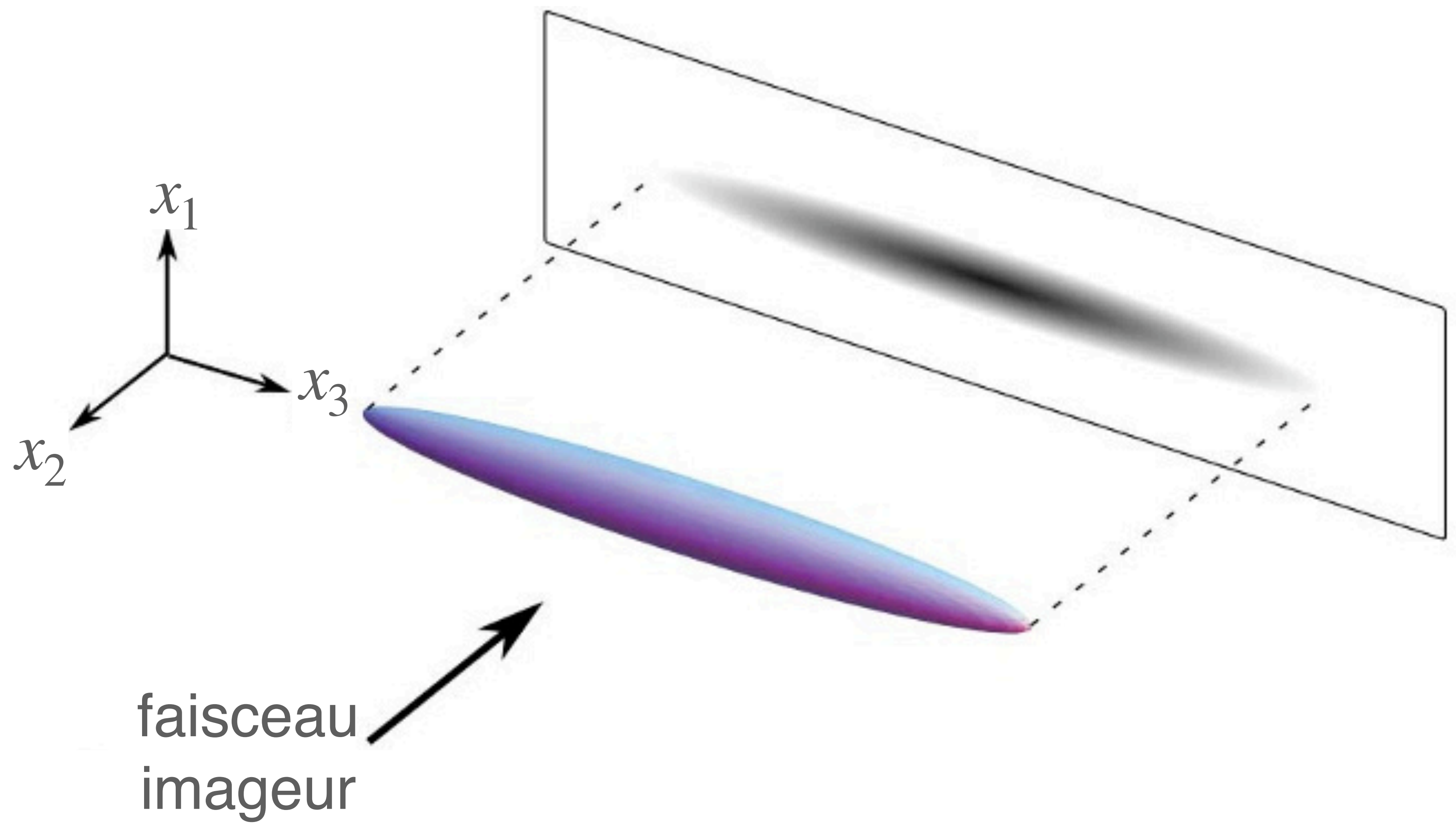
$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2} g n^2 \left[1 + \alpha\sqrt{na^3} + \ldots\right]$$

$$\alpha = 128/15\sqrt{\pi}$$

Rappel du cours 1 : la mesure de

$$\bar{n}(x_3) = \int_0^\infty n(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2$$

donne accès à la pression $\bar{n}(x_3) = \dfrac{2\pi}{\omega^2} P[T, \mu(x_3)]$



On est ici à température nulle : $P(\mu)$

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial L^3}\right)_{S,N} = \frac{1}{2} g n^2 \left(1 + \frac{3}{2}\alpha\sqrt{na^3} + \ldots\right)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,L^3} = g n \left(1 + \frac{5}{2}\alpha\sqrt{na^3} + \ldots\right)$$

$$\xrightarrow[\text{de } n]{\text{élimination}}$$

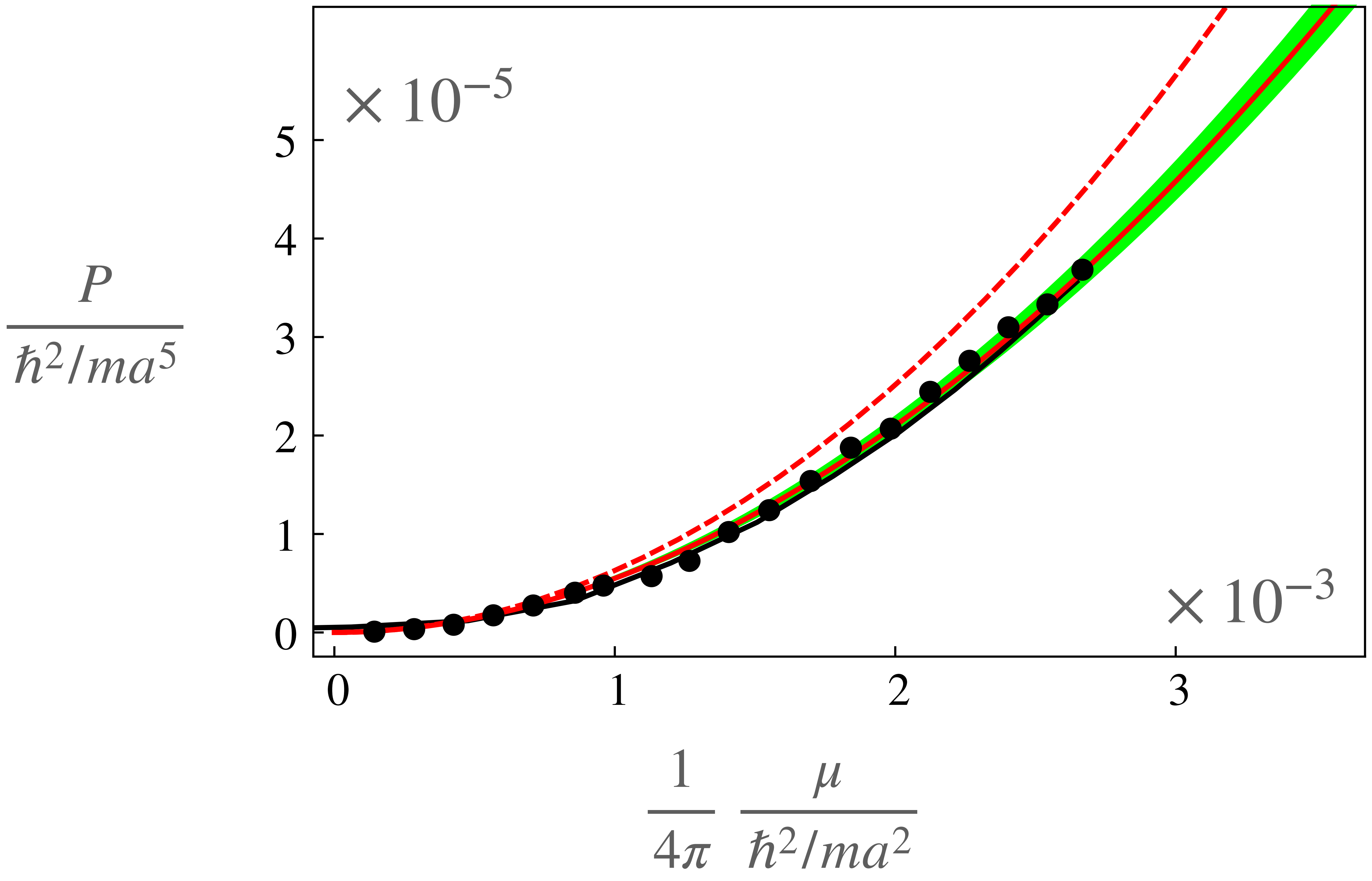
$$P = \frac{\mu^2}{2g}\left(1 - \alpha\sqrt{\mu a^3/g}\right)$$

Mesure de l'équation d'état

$$P = \frac{\mu^2}{2g}\left(1 - \alpha\sqrt{\mu a^3/g}\right)$$

Gaz de ^{7}Li (bosons) préparé avec une longueur de diffusion "modeste", $a \simeq 10$ nm, puis augmentée adiabatiquement grâce à une résonance de Fano-Feshbach (30 à 100 nm)

Navon, Piatecki et al., PRL**107** 135301



: champ moyen $P = \mu^2/2g$

: Monte Carlo quantique

: LHY

$\alpha_{\text{fit}} = 4.5(7)$ $\quad\quad$ $\alpha_{\text{LHY}} = \frac{128}{15\sqrt{\pi}} = 4.81...$

Energie cinétique d'un condensat

Rappel : population moyenne d'un état d'impulsion $\hbar \boldsymbol{k}$

$$\bar{n}_k = |v_k|^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k}} - 1\right]$$

$$E_{\text{cin}} = \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\, \bar{n}_k \; \mathrm{d}^3 k$$

0		$k_0 = \sqrt{8\pi n a}$		$1/b$		k
	$\epsilon_k \ll gn$		$\epsilon_k \gg gn$ $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$		$\epsilon_k \gg gn$ $\tilde{V}_k \neq \tilde{V}_0$	
	$\bar{n}_k \sim 1/k\xi$		$\bar{n}_k \sim \tilde{V}_0^2/k^4$		$\bar{n}_k \sim \tilde{V}_k^2/k^4$	

Energie cinétique (2)

$$E_{\text{cin}} = \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\, \bar{n}_k \, \mathrm{d}^3 k$$

0		$k_0 = 1/\xi$		$1/b$	
	$\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$		$\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$		$\tilde{V}_k \neq \tilde{V}_0$
	$\bar{n}_k \sim 1/k\xi$		$\bar{n}_k \sim \tilde{V}_0^2/k^4$		$\bar{n}_k \sim \tilde{V}_k^2/k^4$

$$\int_0^{k_0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{1}{k\xi}\, 4\pi k^2 \mathrm{d}k$$

converge en $k = 0$

$$\tilde{V}_0^2 \int_{k_0}^{1/b} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{1}{k^4}\, 4\pi k^2 \mathrm{d}k$$

intégrande constante

$$\int_{k_0}^{1/b} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\tilde{V}_k^2}{k^4}\, 4\pi k^2 \mathrm{d}k$$

converge si $\tilde{V}_k$ décroît assez vite

Pour le pseudo-potentiel, $1/b = +\infty$: l'énergie cinétique diverge !

$$E_{\text{LHY}} = \underbrace{E_{\text{cin}}}_{+\infty} + \underbrace{E_{\text{int}}}_{-\infty}$$

La prise en compte de la portée finie du potentiel est indispensable pour donner un sens à chacune des deux contributions

Plan du cours

1. Mesures de l'énergie de Lee-Huang-Yang

Le problème des pertes à trois corps, mode de respiration et équation d'état

2. Le spectre d'excitation d'un condensat

Le régime "habituel" $ka \ll 1$: phonons vs. particule libre

Le régime $ka \sim 1$: un problème encore ouvert …

3. Les gouttelettes quantiques

Comment rendre l'énergie LHY dominante tout en restant à basse densité ?

Spectre d'excitation et développement de Born

On se limite pour l'instant aux domaines 1 et 2 : $k \ll 1/b$, c'est-à-dire $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$

Pour un potentiel régulier à l'approximation de Born : $\hbar\omega_k = \left[\epsilon_k \left(\epsilon_k + 2n\tilde{V}_0\right)\right]^{1/2}$

Beliaev : *pour remplacer* $\tilde{V}_0$ *par* $g = 4\pi\hbar^2 a/m$, *il faut décrire plus précisément l'interaction entre l'atome d'impulsion* $\hbar\boldsymbol{k}$ *et les atomes du condensat, d'impulsion nulle*

$$\hbar\boldsymbol{k},\ (N-1)\,\boldsymbol{0} \xrightarrow{\quad a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_2} a_{\boldsymbol{k}} a_0 \quad} \hbar\boldsymbol{k}_1,\ \hbar\boldsymbol{k}_2,\ (N-2)\,\boldsymbol{0} \xrightarrow{\quad a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_0 a_{\boldsymbol{k}_1} a_{\boldsymbol{k}_2} \quad} \hbar\boldsymbol{k},\ (N-1)\,\boldsymbol{0}$$

au delà de l'approximation quadratique

Une fois ces processus resommés, on fait apparaître l'amplitude de diffusion $f(k_r)$ avec $k_r = k/2$

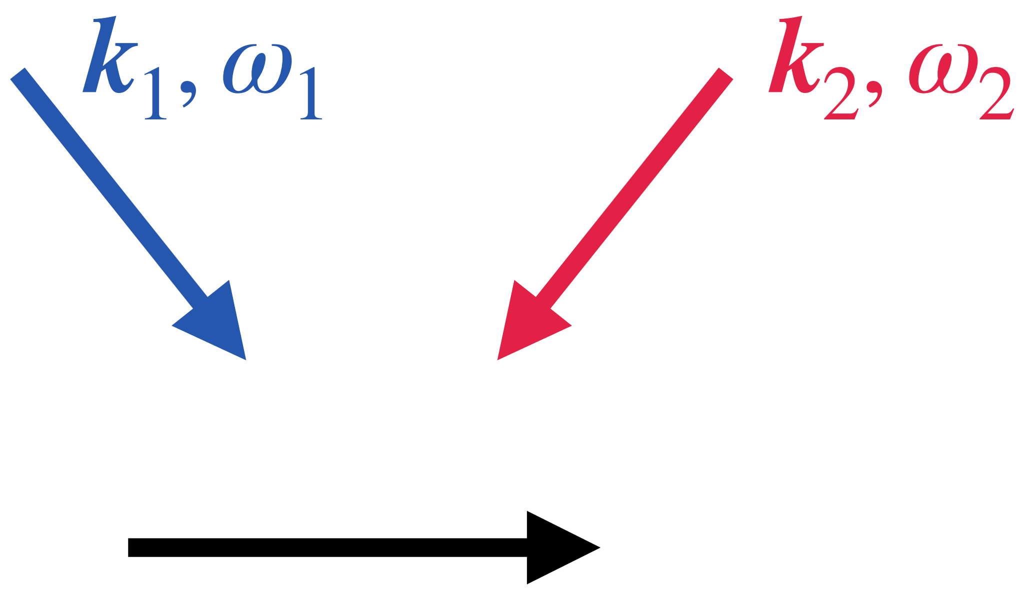
A basse énergie ($k \ll 1/b,\ 1/a$), on a alors : $f(k_r) = -a$

Mesure du spectre de Bogoliubov : Weizmann (2002)

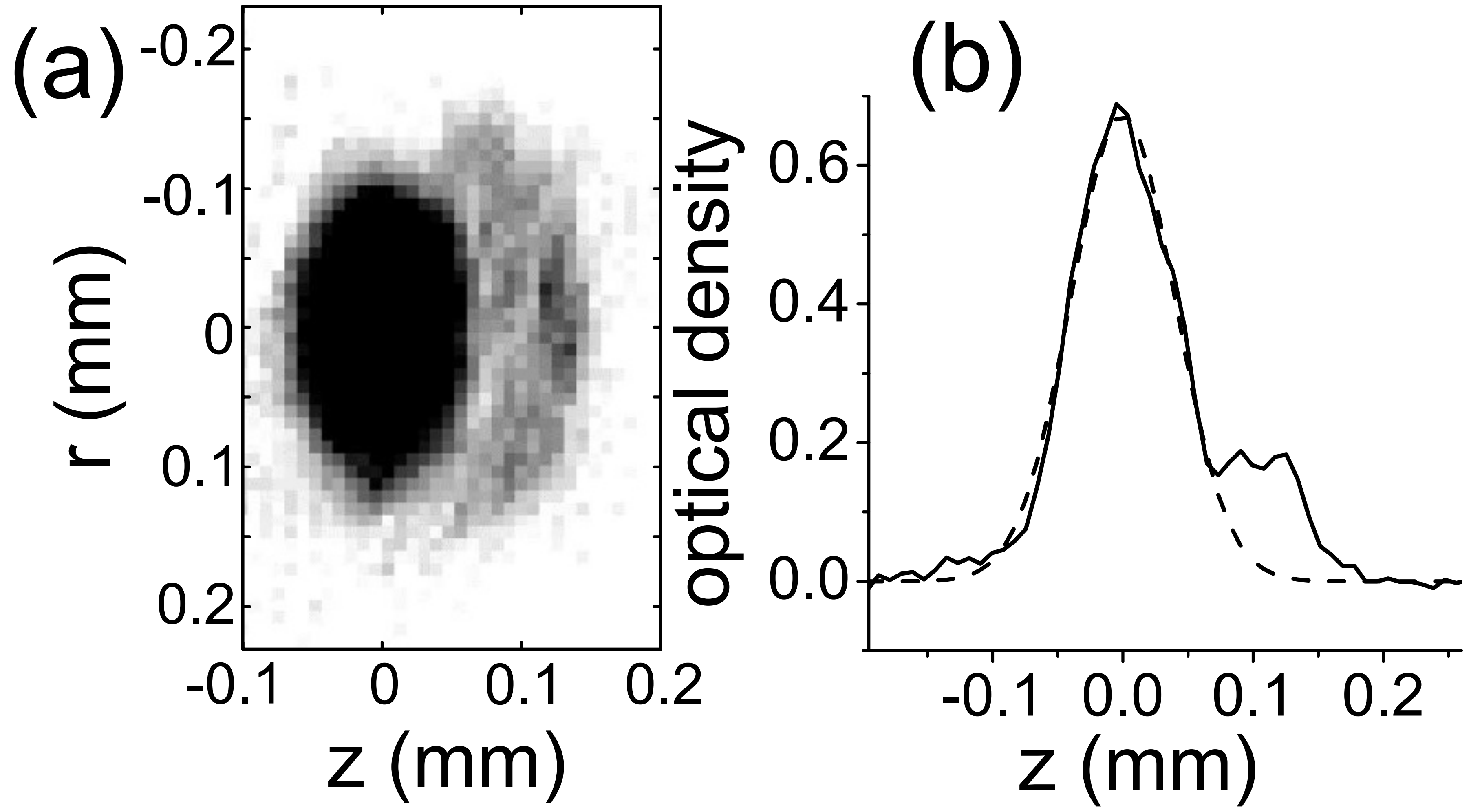
Utilisation de la diffraction de Bragg : absorption - émission stimulée

Condensat de rubidium, $\xi \approx 0.25\ \mu\text{m}$

Steinhauer et al., PRL 88, 120407 (2002)



$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$$
$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

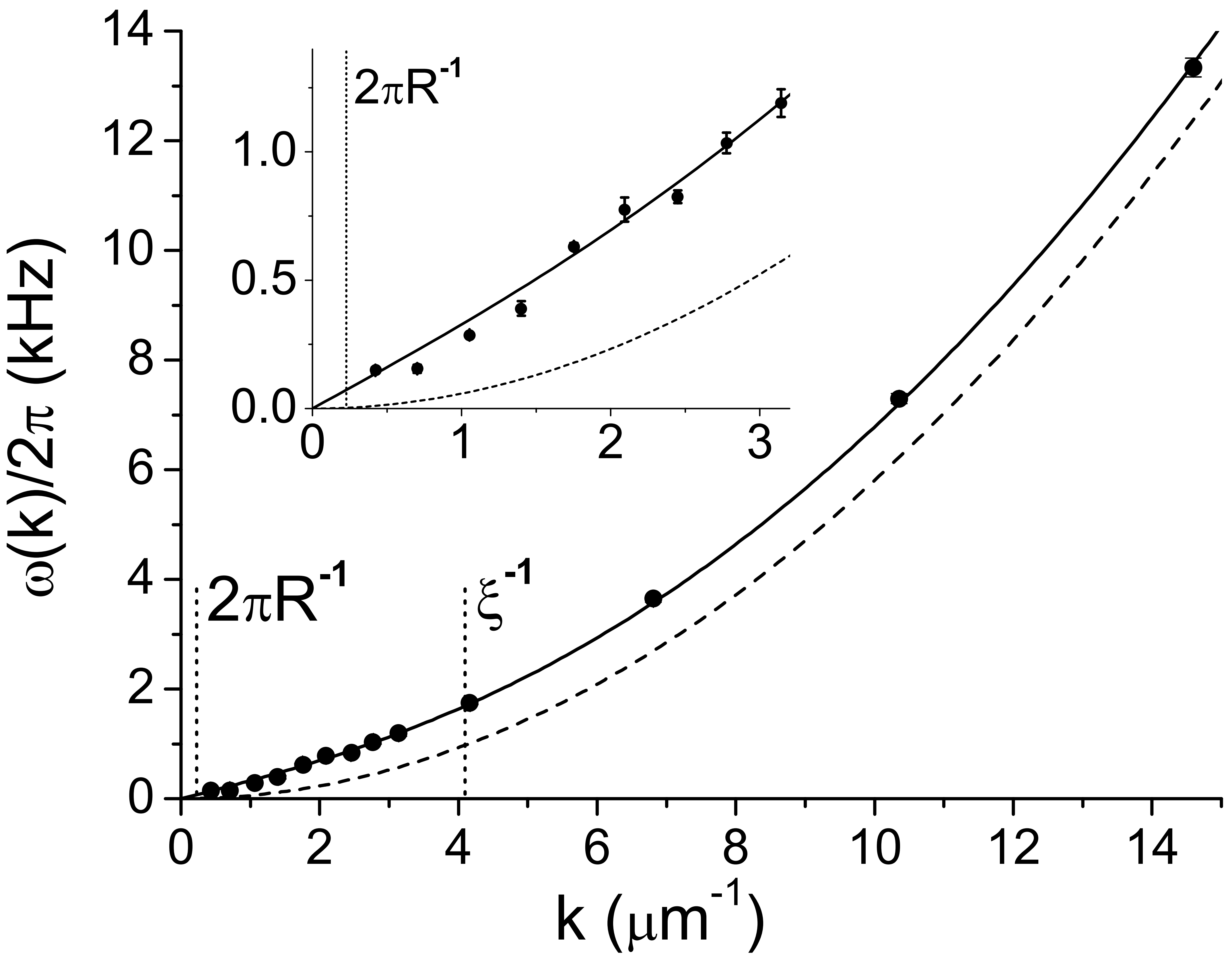


Le transfert de moment k est varié de 0.4 à 15 μm^{-1}

$k\xi$ varie de 0.1 (phonons) à 4 (particules libres)

Mesure du spectre de Bogoliubov (2)

Steinhauer et al., PRL 88, 120407 (2002)

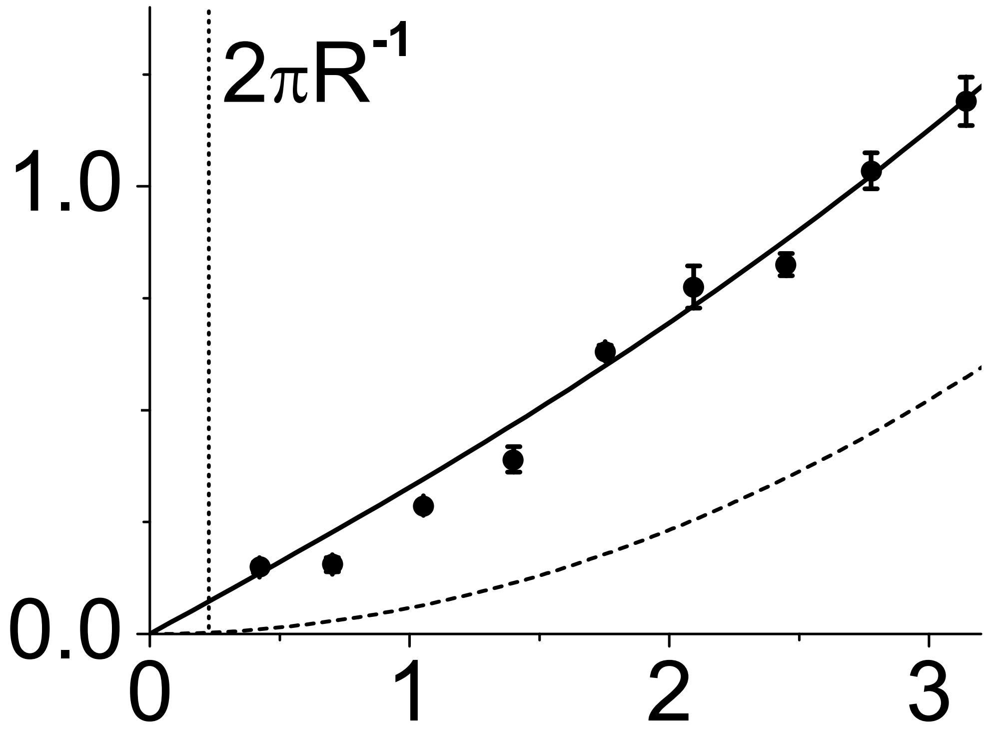


Accord quantitatif avec la théorie de Bogoliubov

phonons $\hbar\omega_k \approx \hbar ck$ $k \ll 1/\xi$

particules libres $\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + gn$ $k \gg 1/\xi$

Effets au delà du champ moyen ?



Dans le régime de phonons $\omega_k = ck$ avec $c = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_S}$

On a vu que

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial L^3}\right)_{S,N} = \frac{1}{2}gn^2\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\sqrt{na^3} + \dots\right) \qquad \alpha = 128/15\sqrt{\pi}$$

On en déduit la modification de la vitesse du son par les effets au delà du champ moyen :

$$c = \sqrt{\frac{gn}{m}}\left[1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}\right]$$

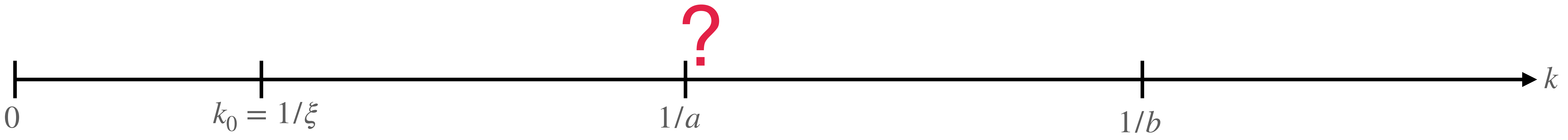
Pas d'expérience à ce jour sur les gaz de Bose dilués

Excitations de grande impulsion $\hbar k$

Boulder, 2008 : Papp, Pino *et al*, PRL 101, 135301

Cambridge, 2017 : Lopes, Eigen *et al*, PRL 118, 210401

Utilisation d'une résonance de Fano-Feshbach pour avoir $a \gg b$: $b \sim 5$ nm, $a \sim 50$ nm, $\xi \sim 500$ nm

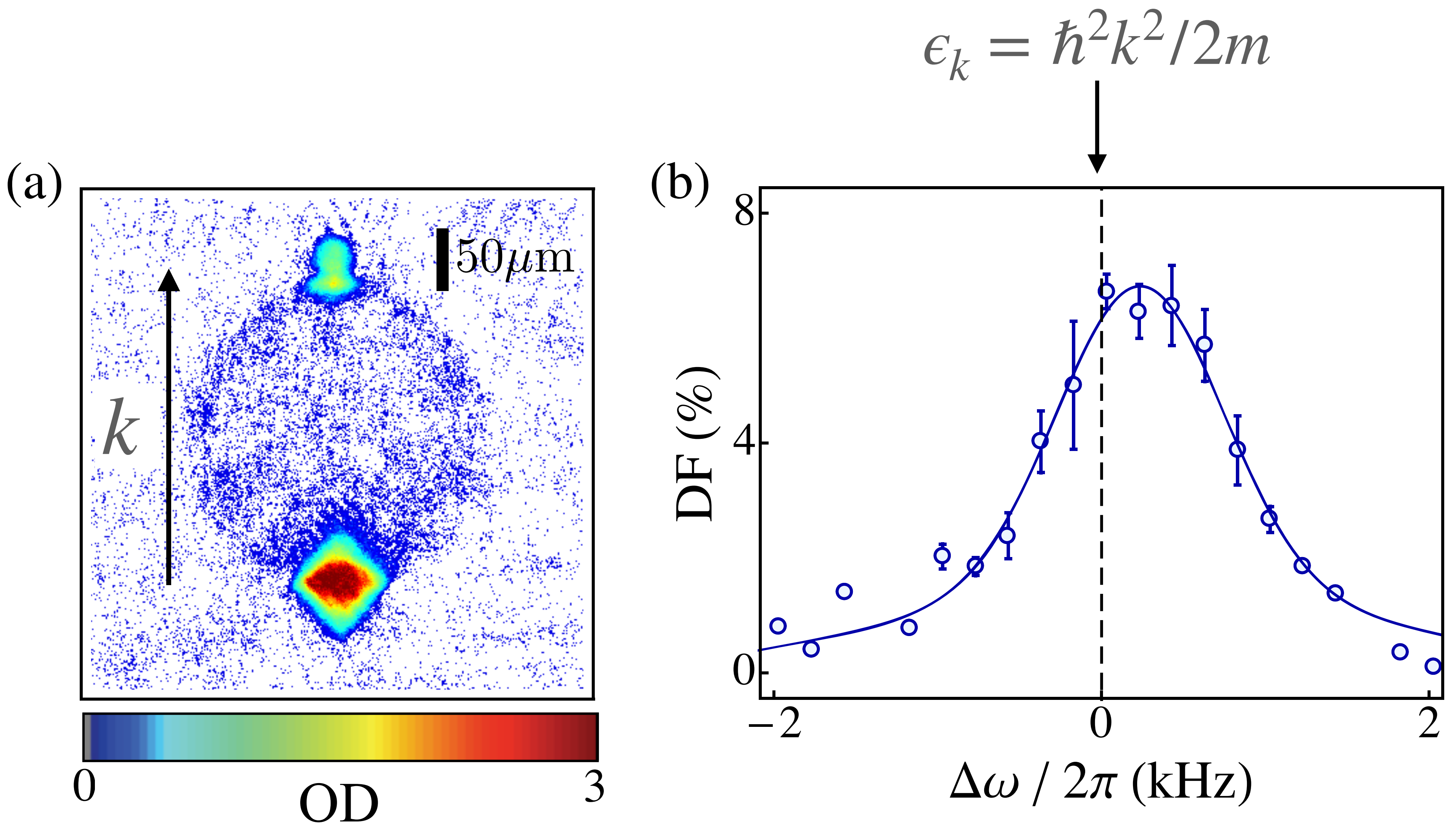


Spectroscopie de Bragg sur un gaz uniforme

$n = 2 \times 10^{12}$ cm^{-3} $\qquad \sqrt{na^3} = 0.016$

Halo de collisions en onde s bien visible

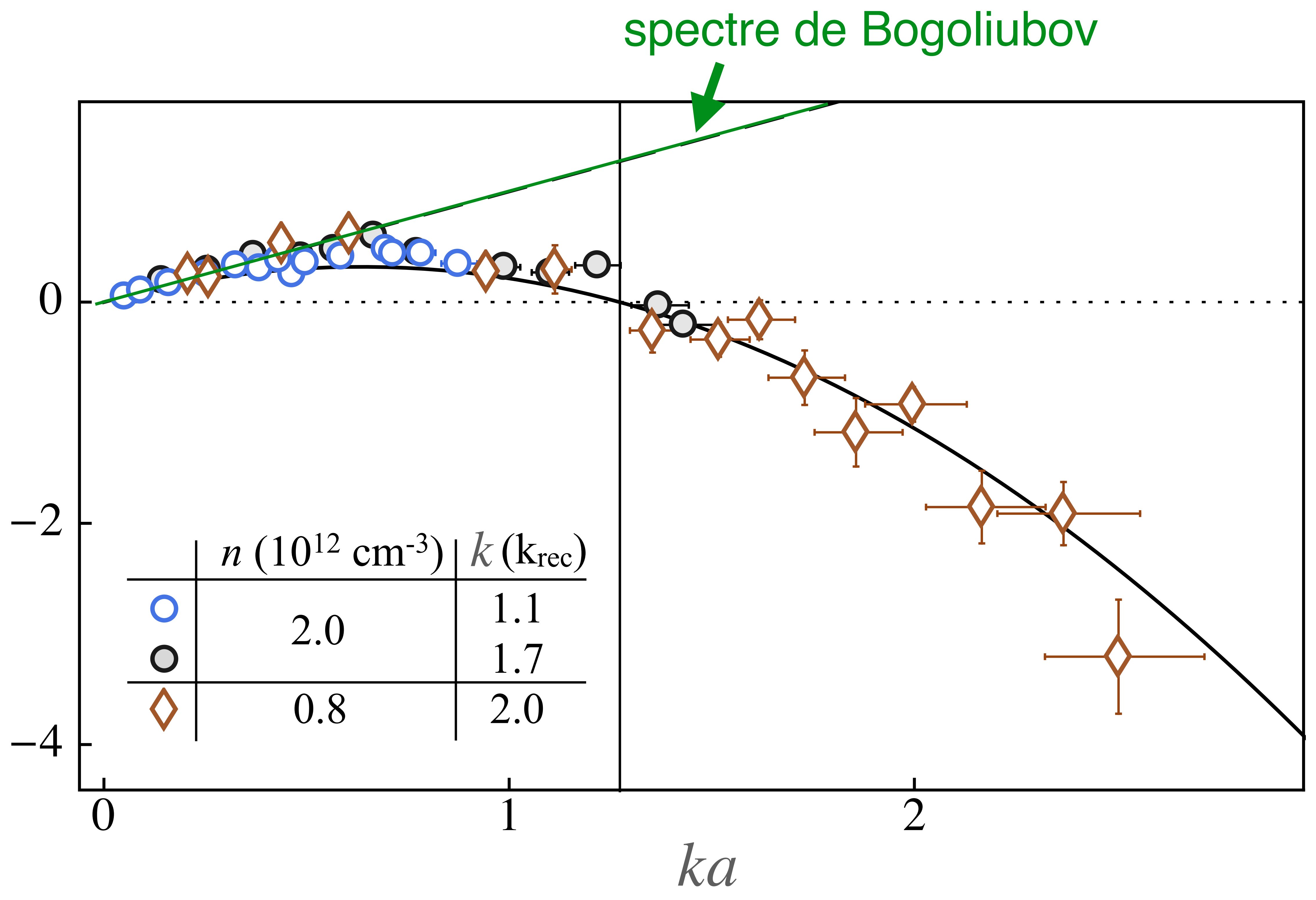
On s'intéresse au décalage entre
le maximum de la raie et ϵ_k



Résultats de l'expérience de Cambridge

Lopes, Eigen *et al*, PRL 118, 210401

$$\alpha \equiv ka \frac{\hbar\omega_k - \epsilon_k}{gn}$$



Pour le spectre de Bogoliubov dans le régime "particule libre":

$$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + gn$$

et donc :

$$\alpha = ka$$

Le décalage entre $\hbar\omega_k$ et ϵ_k s'annule pour $ka \approx 1.3$, puis devient négatif

Les résultats antérieurs du groupe de Boulder sont en bon accord avec ceux-ci

Retour vers l'approche de Beliaev

Pour remplacer $\tilde{V}_0$ par $g = 4\pi\hbar^2 a/m$, il faut décrire précisément l'interaction entre l'atome d'impulsion $\hbar\boldsymbol{k}$ et les atomes du condensat, d'impulsion nulle

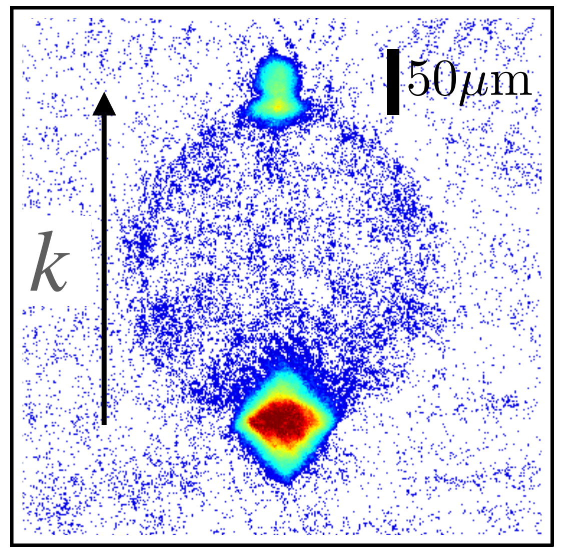
Cela fait apparaître l'amplitude de diffusion $f(k_r)$ avec $k_r = k/2$ $\xrightarrow[\text{énergie}]{\text{basse}}$ $f(k_r) = -a$

Mais pour $k \sim 1/a$, on quitte le domaine de basse énergie : $f(k_r) \approx \dfrac{-a}{1 + \mathrm{i}k_r a}$

⟶ Partie réelle : $\dfrac{-a}{1 + \left(ka/2\right)^2}$ *doit être pris en compte dans le bilan énergétique pour la création d'une impulsion*

⟶ Partie imaginaire : *durée de vie limitée pour les excitations* $\hbar\Gamma_k \sim gn\ ka$

Γ_k^{-1} *comparable à la durée de la phase de spectroscopie de Bragg*



Hofmann & Zwerger (2017)

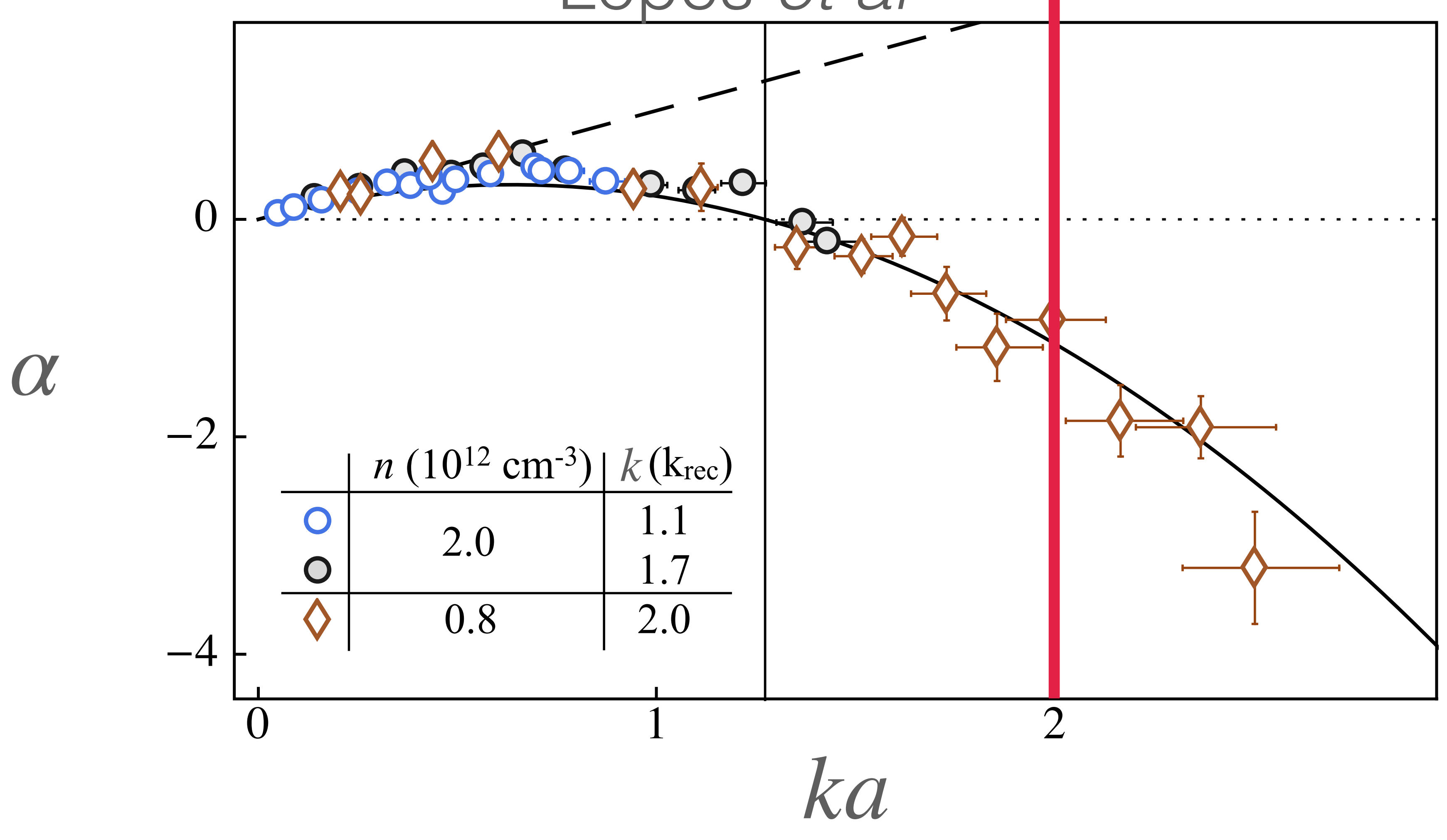
Une explication des expériences de Boulder & Cambridge ?

Le bilan énergétique dans le régime “particules libres” doit être modifié :

$$\hbar\omega_k = \left(\epsilon_k + \underbrace{2\,gn}_{\text{direct + échange}}\right) - \underbrace{gn}_{\text{direct}} \longrightarrow \hbar\omega_k = \left(\epsilon_k + \frac{2\,gn}{1+\left(ka/2\right)^2}\right) - gn$$

Cela conduit à l’égalité $\hbar\omega_k = \epsilon_k$ pour $ka = 2$. Ce n’est pas ce qui est observé !

Lopes *et al*



Le même désaccord émerge pour les données de Boulder :

Hoffmann & Zwerger, 2017 : While the densities are in good agreement with the values quoted in Ref. [19], the fitted Bragg wavelength is too small by a factor of almost 2 compared to λ=780 nm in Ref. [19].

[19] : Papp *et al*

Une autre piste : la formule de Feynman

Feynman, 1954

Calcul du centre de gravité de la raie $$\bar{\omega}(\boldsymbol{k}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, \Gamma(\boldsymbol{k},\omega)\ \mathrm{d}\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\boldsymbol{k},\omega)\ \mathrm{d}\omega}$$

Le taux Γ est calculé par la règle d'or de Fermi pour la perturbation

$$\hat{V}(t) = \hat{V}^{(+)}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{H.c.} \qquad \hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_j} \longleftrightarrow \hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{\boldsymbol{k}'} a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'} a_{\boldsymbol{k}'}$$

Numérateur : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\, \Gamma(\boldsymbol{k},\omega)\ \mathrm{d}\omega \ = \ 2\pi\kappa^2 N\ \frac{\hbar k^2}{2m}$$

résultat exact, indépendant des interactions (f-sum rule)

Dénominateur : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\boldsymbol{k},\omega)\ \mathrm{d}\omega \ = \ 2\pi\kappa^2 N\ S(k)$$

$$S(k) = 1 + n \int \left[g_2(r) - 1\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\ \mathrm{d}^3 r$$

Facteur de structure statique

La fonction $g_2(r)$ et le facteur de structure $S(k)$

$$S(k) = 1 + n \int \left[g_2(r) - 1\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \, \mathrm{d}^3 r$$

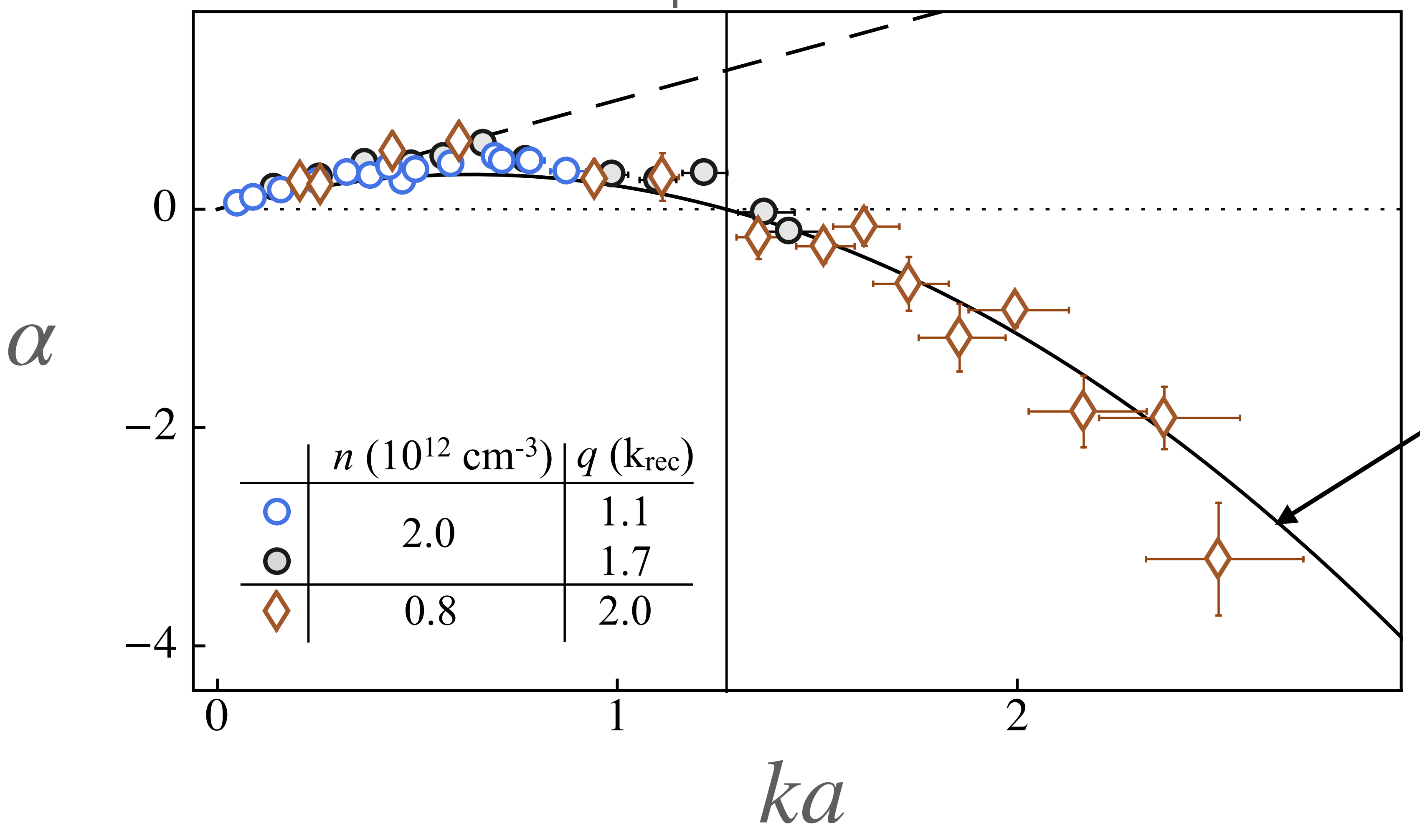
Lee, Huang et Yang (1957) ont calculé $g_2(r)$

Résultat à courte distance ($r \ll \xi$): $$g_2(r) \approx \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(a/\xi) \approx 1 - \frac{2a}{r} + \frac{a^2}{r^2}$$

Transformée de Fourier ($k \gg 1/\xi$) : $$S(k) \approx 1 - \frac{1}{k^2\xi^2} + \frac{2\pi^2 n a^2}{k} = 1 - \frac{1}{k^2\xi^2}\left(1 - \frac{\pi}{4} ka\right)$$

On en déduit le centre de gravité de la raie : $$\hbar\bar{\omega}(k) = \frac{\epsilon_k}{S(k)} \approx \epsilon_k \left[1 + \frac{1}{k^2\xi^2}\left(1 - \frac{\pi}{4}ka\right)\right]$$

Lopes *et al*



$$\bar{\alpha} = ka \frac{\hbar\bar{\omega}_k - \epsilon_k}{gn} = ka\left(1 - \frac{\pi}{4}ka\right)$$

$$\frac{\epsilon_k}{k^2\xi^2} = gn$$

"point de croisement" $\hbar\bar{\omega}_k = \epsilon_k$ en $ka = 4/\pi \approx 1.3$

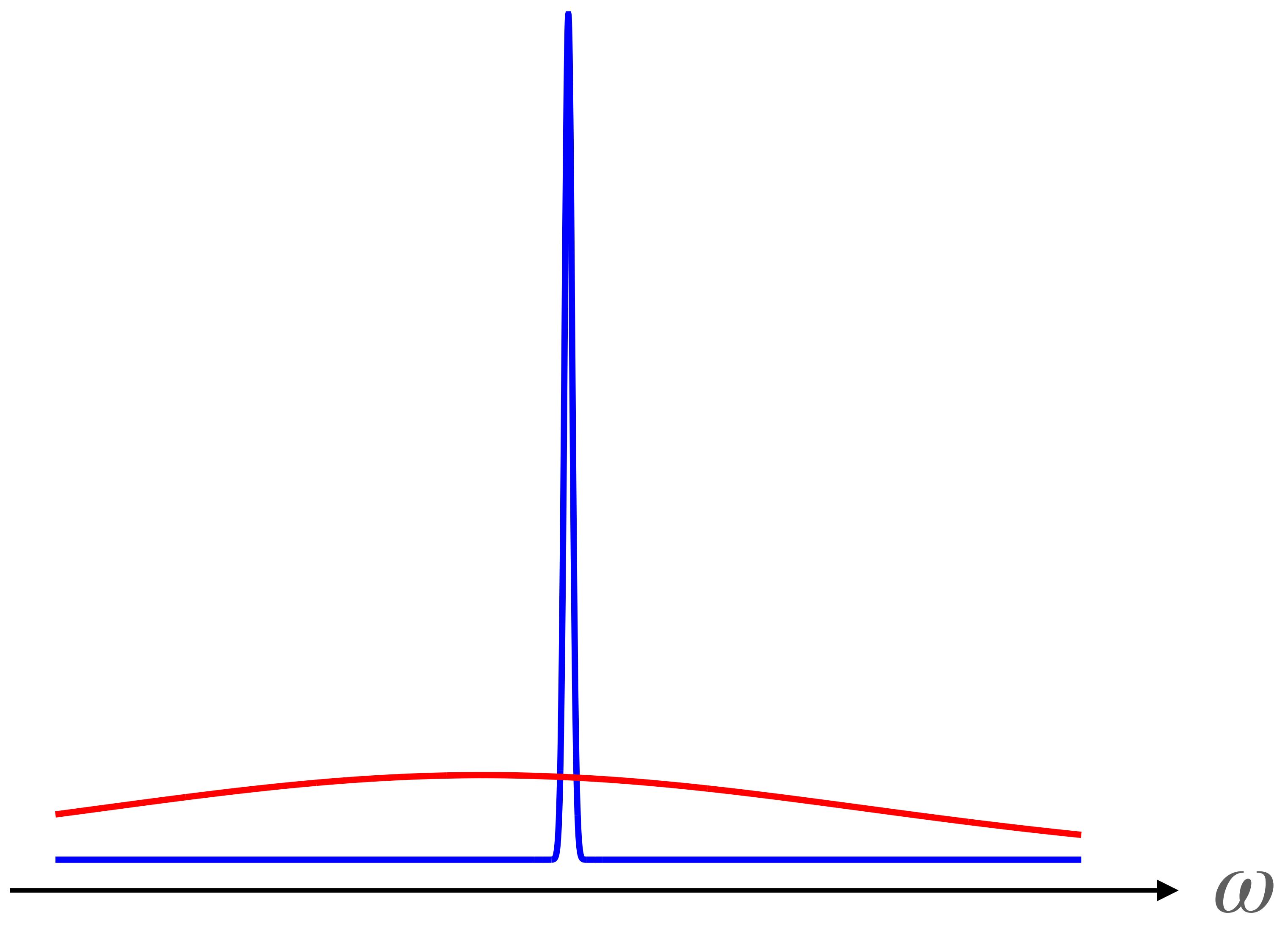
Problème résolu ? pas vraiment …

Les ingrédients derrière la formule de Feynman

Le calcul de $\Gamma(\boldsymbol{k},\omega)$ par la règle d'or de Fermi : opérateur $\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{\boldsymbol{k}'} a^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'} a_{\boldsymbol{k}'}$

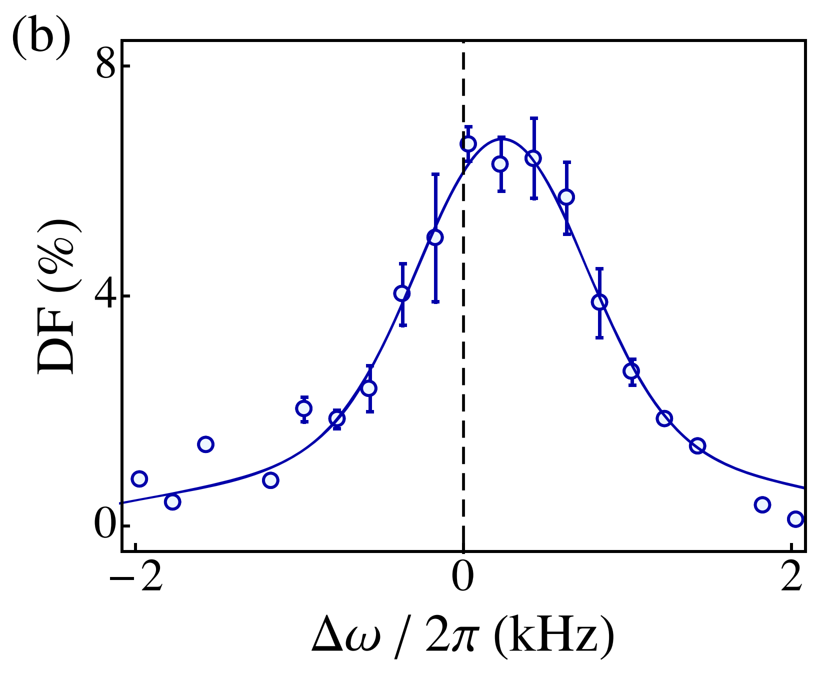
$a^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'}\,,\ a_{\boldsymbol{k}'} = \sqrt{N_0}$ ou $u_{|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'|} b^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'} - v_{|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'|} b_{-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}$ $\quad u_{k'} b_{\boldsymbol{k}'} - v_{k'} b^\dagger_{-\boldsymbol{k}'}$

- Processus à une excitation : $\delta[\omega_k - \omega]$ = le pic étroit étudié jusqu'ici
- Processus à deux excitations : $\sum_{\boldsymbol{k}'} \cdots\ \delta[\omega_{|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'|} + \omega_{k'} - \omega]$ = un piédestal beaucoup plus large



La formule de Feynman donne le centre de gravité de cette structure à deux composantes

Que mesure-t-on dans l'expérience, compte tenu de la durée de vie finie des excitations ?



Plan du cours

1. Mesures de l'énergie de Lee-Huang-Yang

Le problème des pertes à trois corps, mode de respiration et équation d'état

2. Le spectre d'excitation d'un condensat

Le régime "habituel" $ka \ll 1$ *: phonons vs. particule libre*

Le régime $ka \sim 1$ *: un problème encore ouvert …*

3. Les gouttelettes quantiques

Comment rendre l'énergie LHY dominante tout en restant à basse densité ?

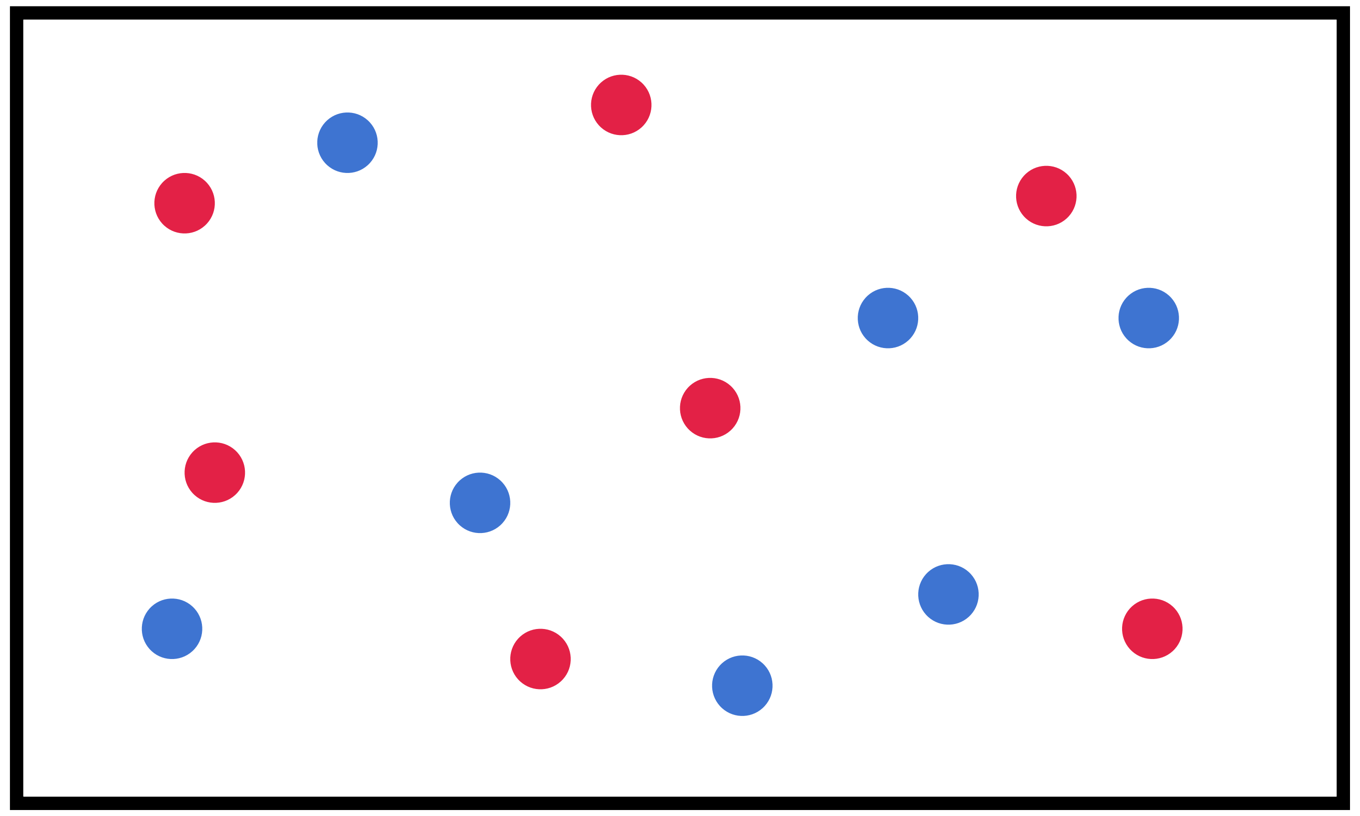
Comment augmenter l'effet des fluctuations quantiques ?

Point de départ : $$E_0 = \frac{gN^2}{2V}\left[1 + \alpha\sqrt{na^3} + \ldots\right] = \frac{gN^2}{2V} + \frac{\alpha}{(4\pi)^{3/2}}\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}\frac{(gN)^{5/2}}{V^{3/2}}$$ $V \equiv L^3$: volume

où le paramètre $\sqrt{na^3}$ est par hypothèse petit.

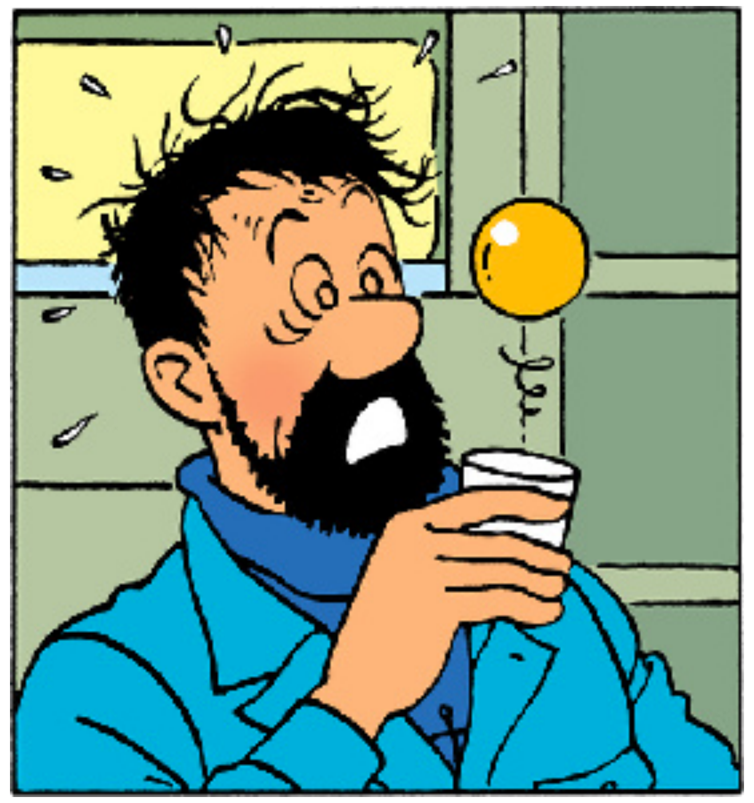
Sur le plan expérimental, on ne peut pas augmenter na^3 en raison des pertes à trois corps

Peut-on diminuer le terme de champ moyen $\frac{gN^2}{2V}$ sans affecter le terme LHY ?



Oui, en utilisant par exemple un mélange binaire !

D. Petrov, PRL 115, 155302



On a marché sur la Lune
Hergé

La stabilité d’un mélange binaire

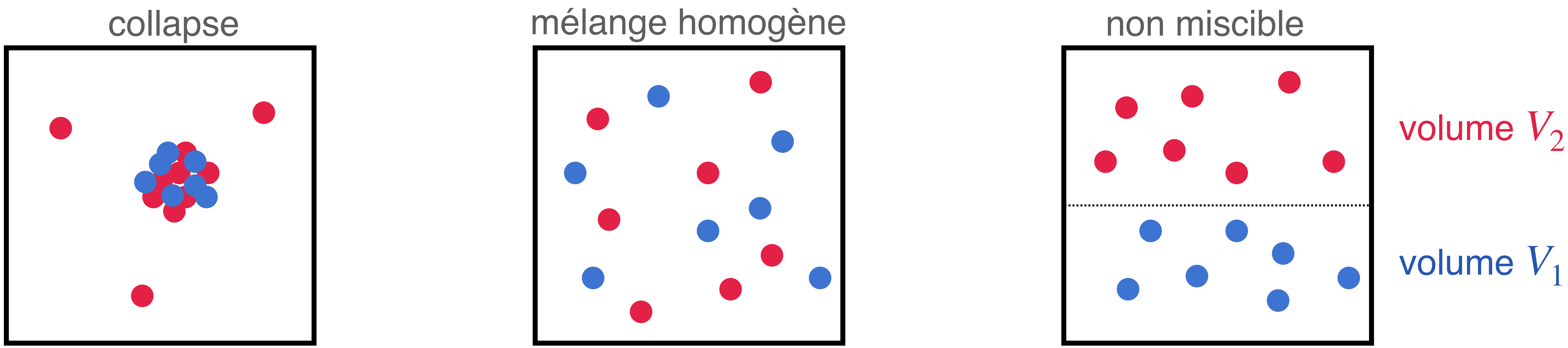
Interactions de champ moyen caractérisées par trois paramètres

 : g_{11}  : g_{22}  : g_{12}

On suppose que chaque sous-système 1 ou 2 est stable quand il est seul : $g_{11} > 0, \ g_{22} > 0$

En revanche, g_{12} *peut être positif ou négatif*

Quel est l’état d’équilibre du système ?

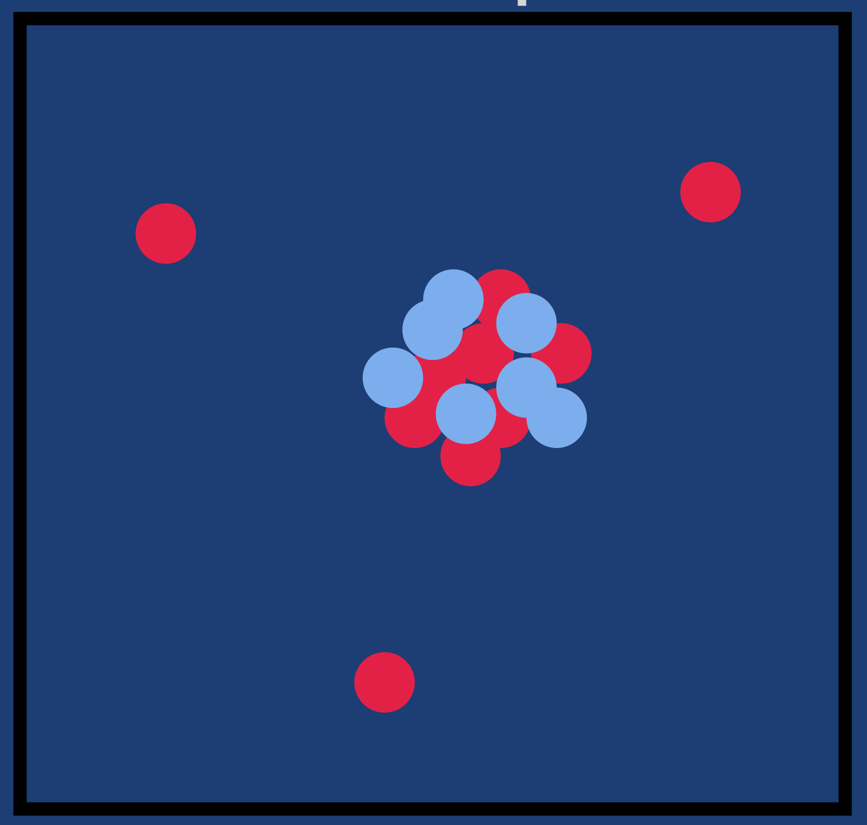


 : g_{11}

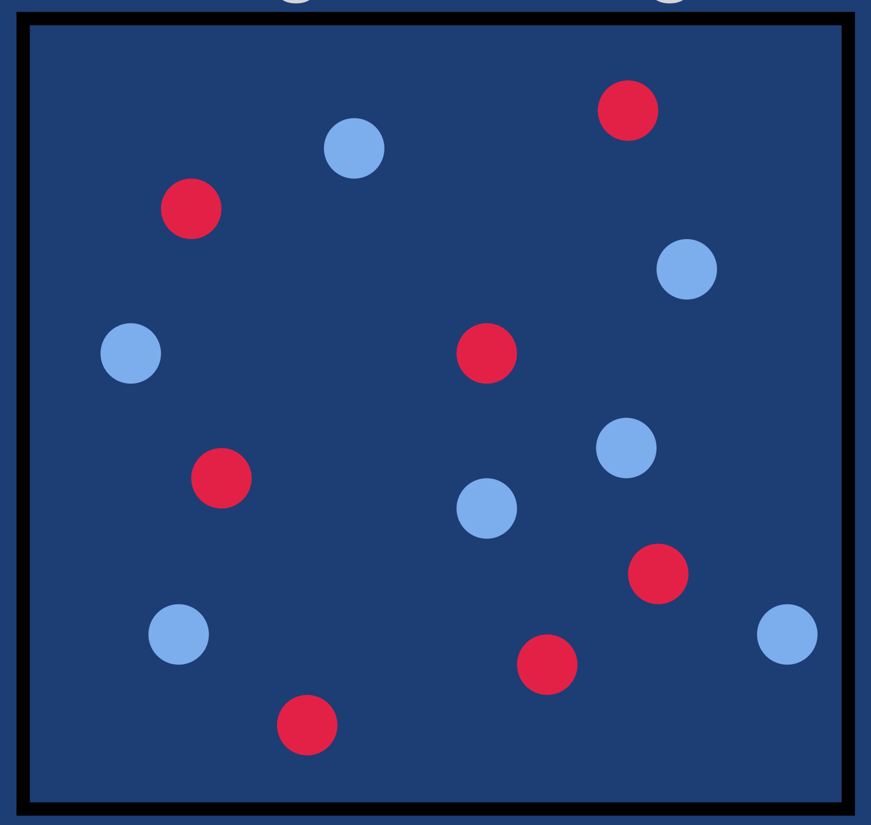
 : g_{22}

 : g_{12}

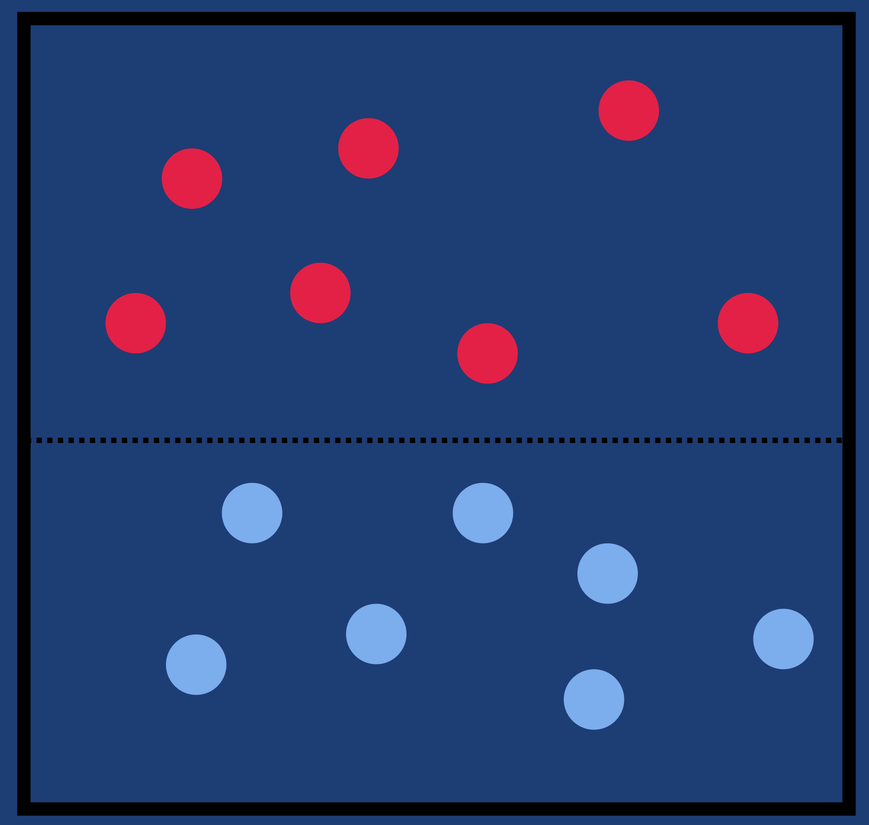
collapse



mélange homogène



non miscible



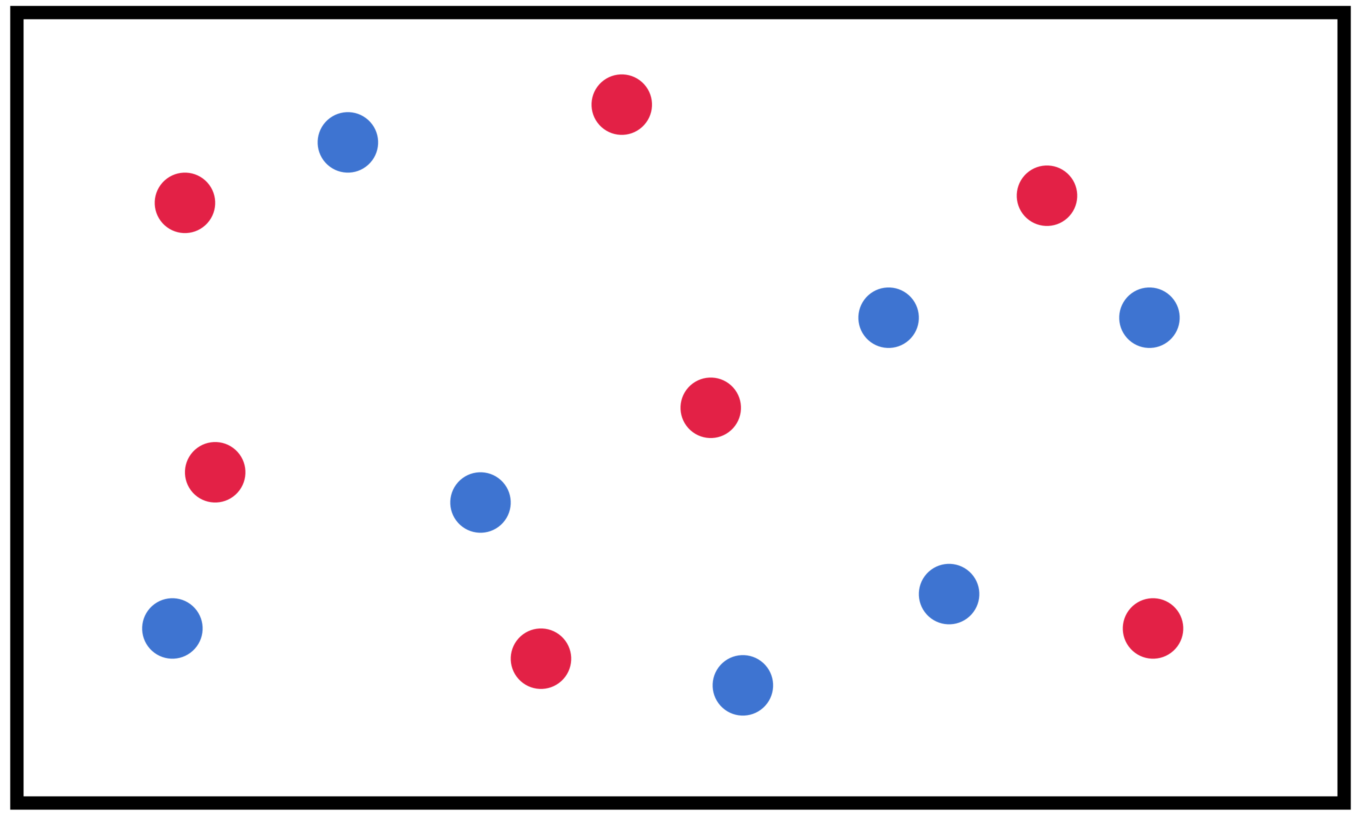
volume V_2

volume V_1

L'énergie LHY d'un mélange

On prend pour simplifier $g_{11} = g_{22} \equiv g$

On se place sur la ligne minimisante $N_1 = N_2$ et
on choisit $g_{12} \approx -g$ (voisinage du collapse)

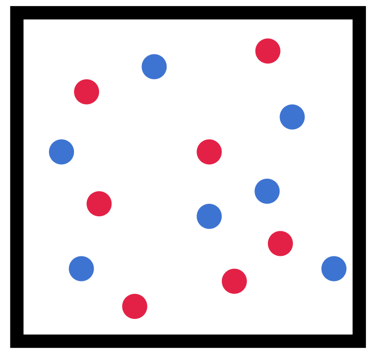


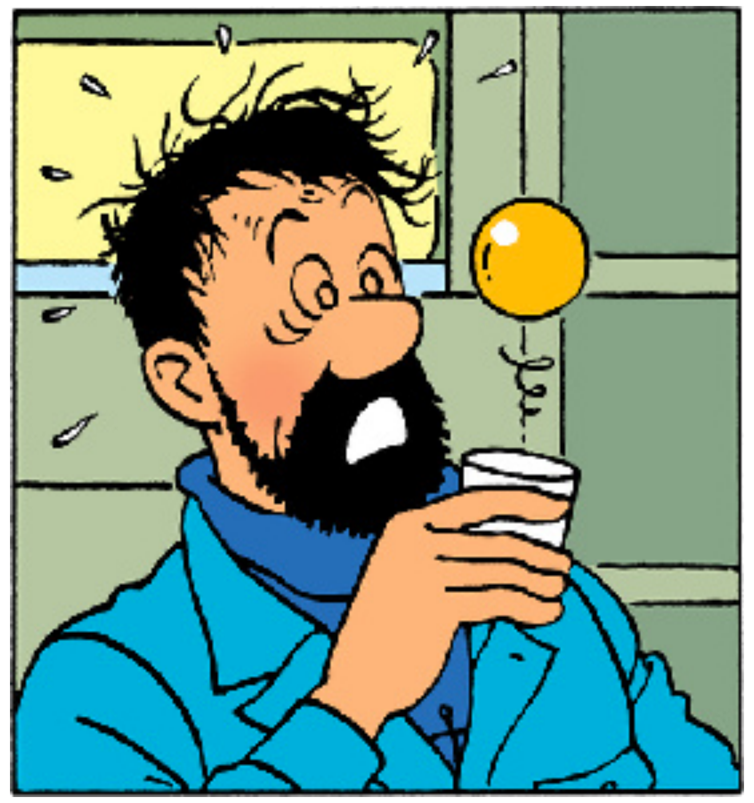
On trouve (Larsen, 1963) : $$E_{\text{LHY}} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{\left(gN\right)^{5/2}}{V^{3/2}}$$ *toujours positif*

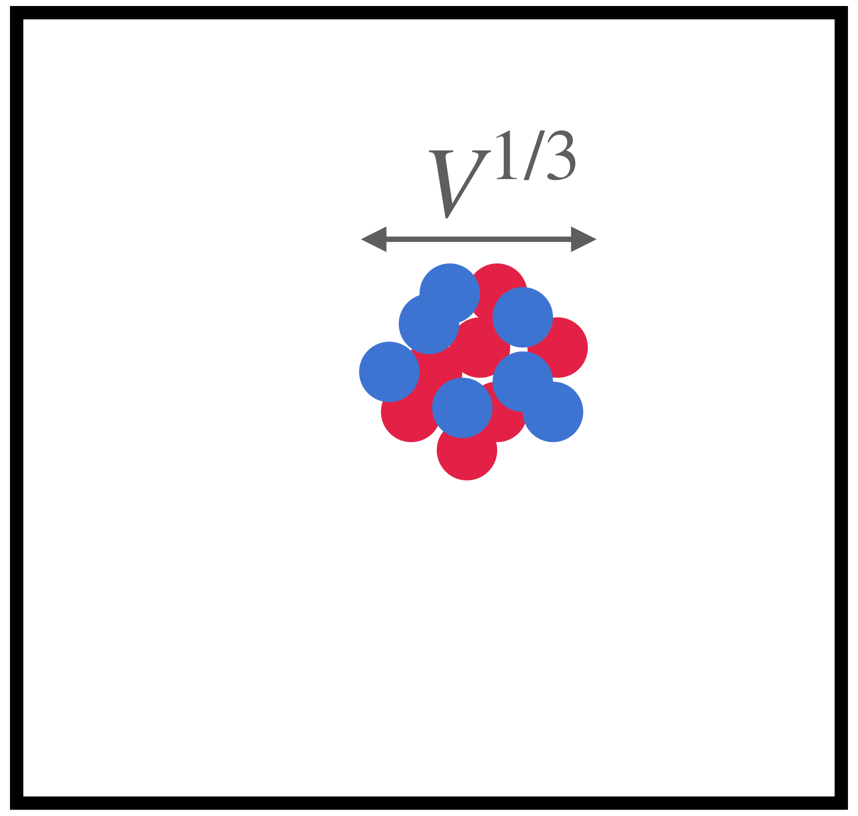
Valeur "ordinaire" pour l'énergie LHY : pas de réduction significative liée au choix
$g_{12} \approx -g$, contrairement à l'énergie de champ moyen qui est fortement diminuée

La compétition entre champ moyen et énergie LHY peut alors avoir lieu, même si $na^3 \ll 1$

Les énergies en compétition pour $\delta g < 0$







Trois contributions à l'énergie totale :

$$+\frac{N\hbar^2}{mV^{2/3}} \qquad -|\delta g|\frac{N^2}{2V} \qquad +\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}\frac{(gN)^{5/2}}{V^{3/2}}$$

énergie cinétique de confinement (Heisenberg)

énergie de champ moyen

énergie LHY pour le mélange

tend à comprimer le nuage d'atomes

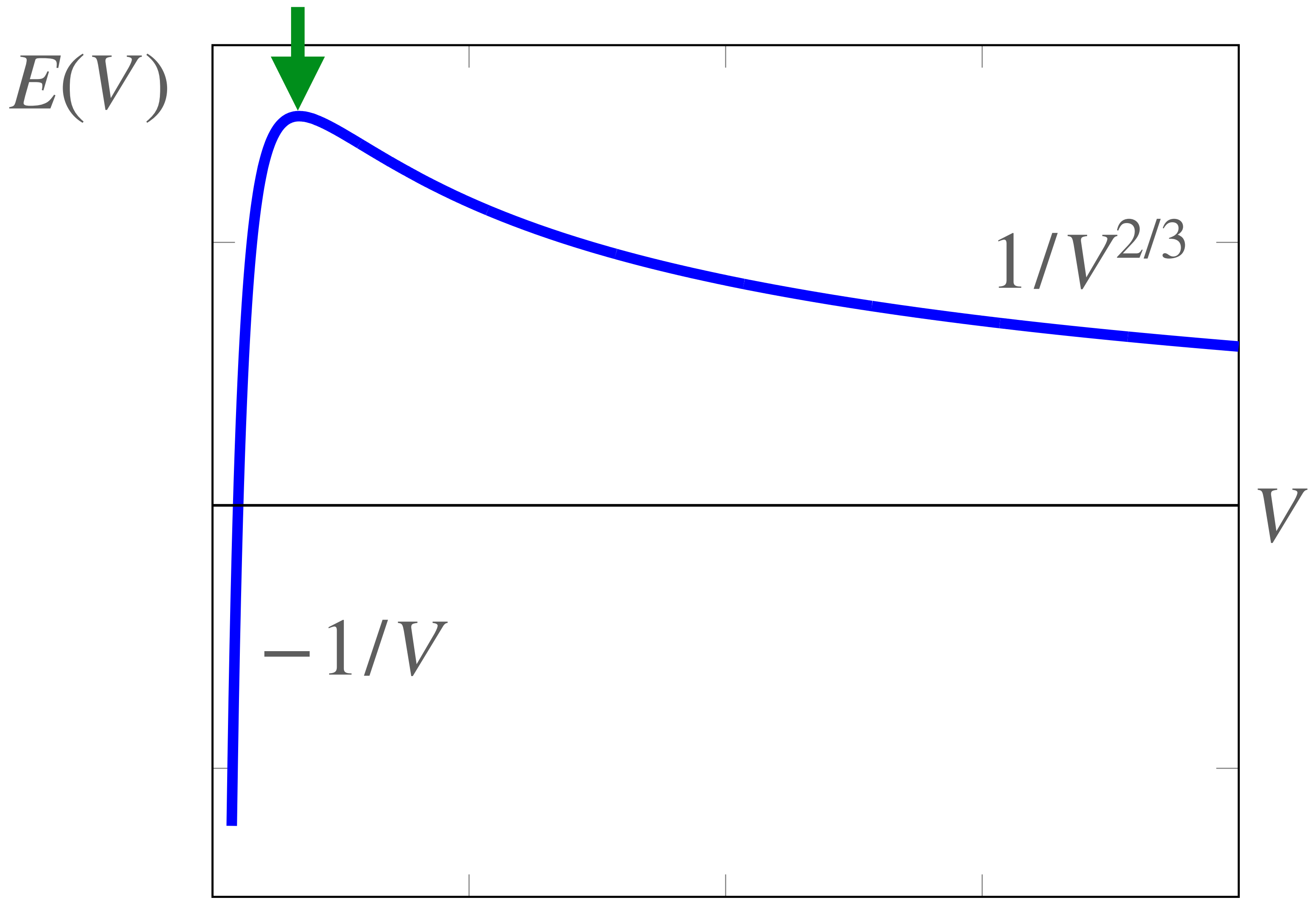
tendent à dilater le nuage d'atomes

1. Compétition énergie de champ moyen - énergie cinétique
2. Compétition énergie de champ moyen - énergie LHY

Les deux compétitions possibles

Compétition énergie cinétique - énergie de champ moyen

$$+\frac{N\hbar^2}{mV^{2/3}} \qquad -|\delta g|\frac{N^2}{2V}$$

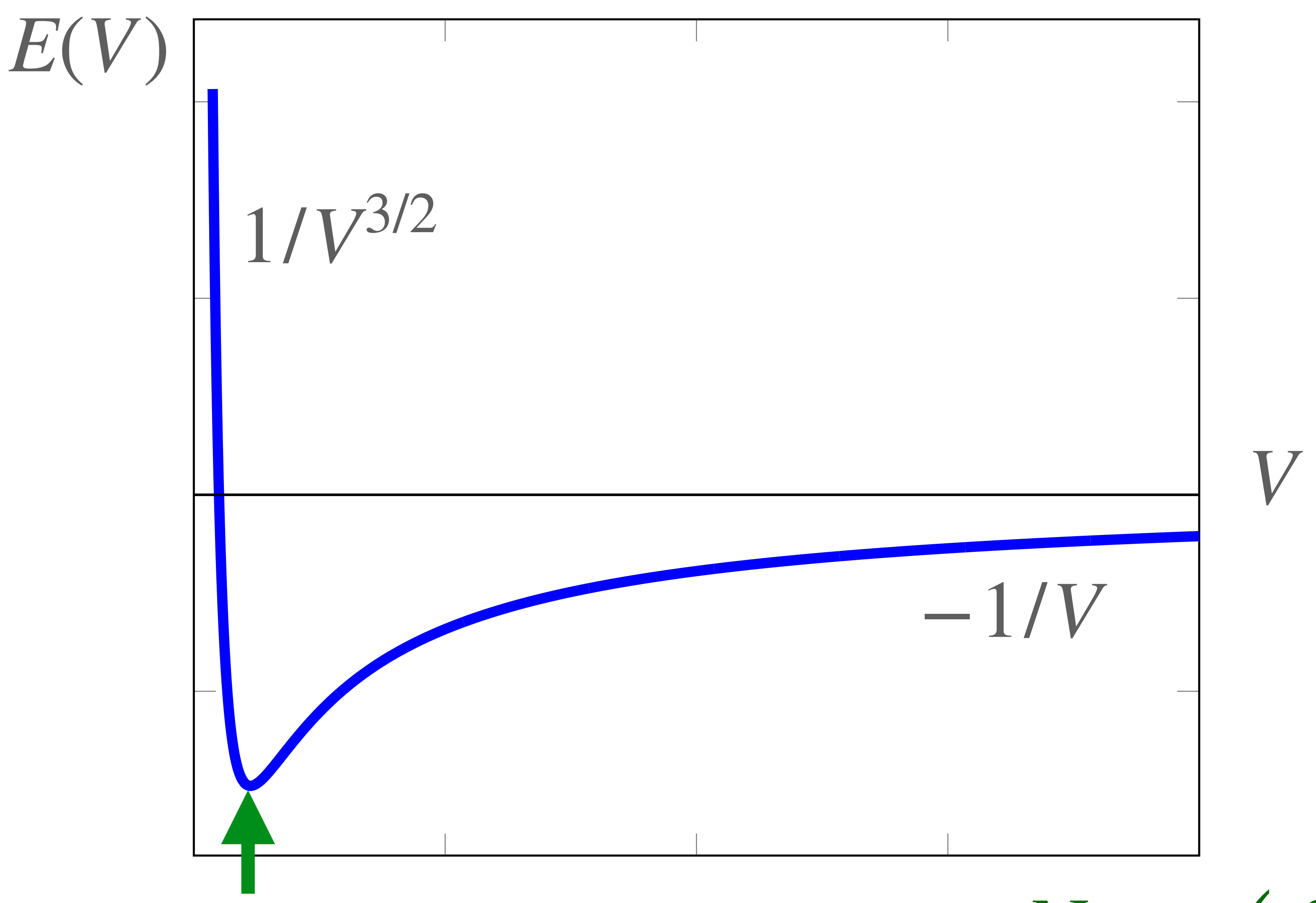


Equilibre dynamiquement instable

Marcherait à 1D (solitons) car
le chp. moyen est alors en $1/V^{1/3}$

Compétition énergie de champ moyen - énergie LHY

$$-|\delta g|\frac{N^2}{2V} \qquad +\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}\,\frac{(gN)^{5/2}}{V^{3/2}}$$



Equilibre stable avec $n \equiv \dfrac{N}{V} \sim \left(\dfrac{\delta g}{g}\right)^2 \dfrac{1}{a^3}$

Objet de densité constante (indépendante de N) : “liquide”

$na^3 = (\delta g/g)^2 \ll 1$: valide *a posteriori* l’utilisation de LHY

Les deux types de plateformes expérimentales

Pour abaisser l'énergie de champ moyen

- Mélange + contrôle de δg par une résonance de Fano-Feshbach

  Barcelone, Florence, Beijing

  Barcelone : étude de la transition soliton - gouttelette dans une géométrie quasi 1D

- Atomes avec un grand dipôle magnétique

  Le terme de champ moyen contient à la fois les interactions en onde s et les interaction magnétiques

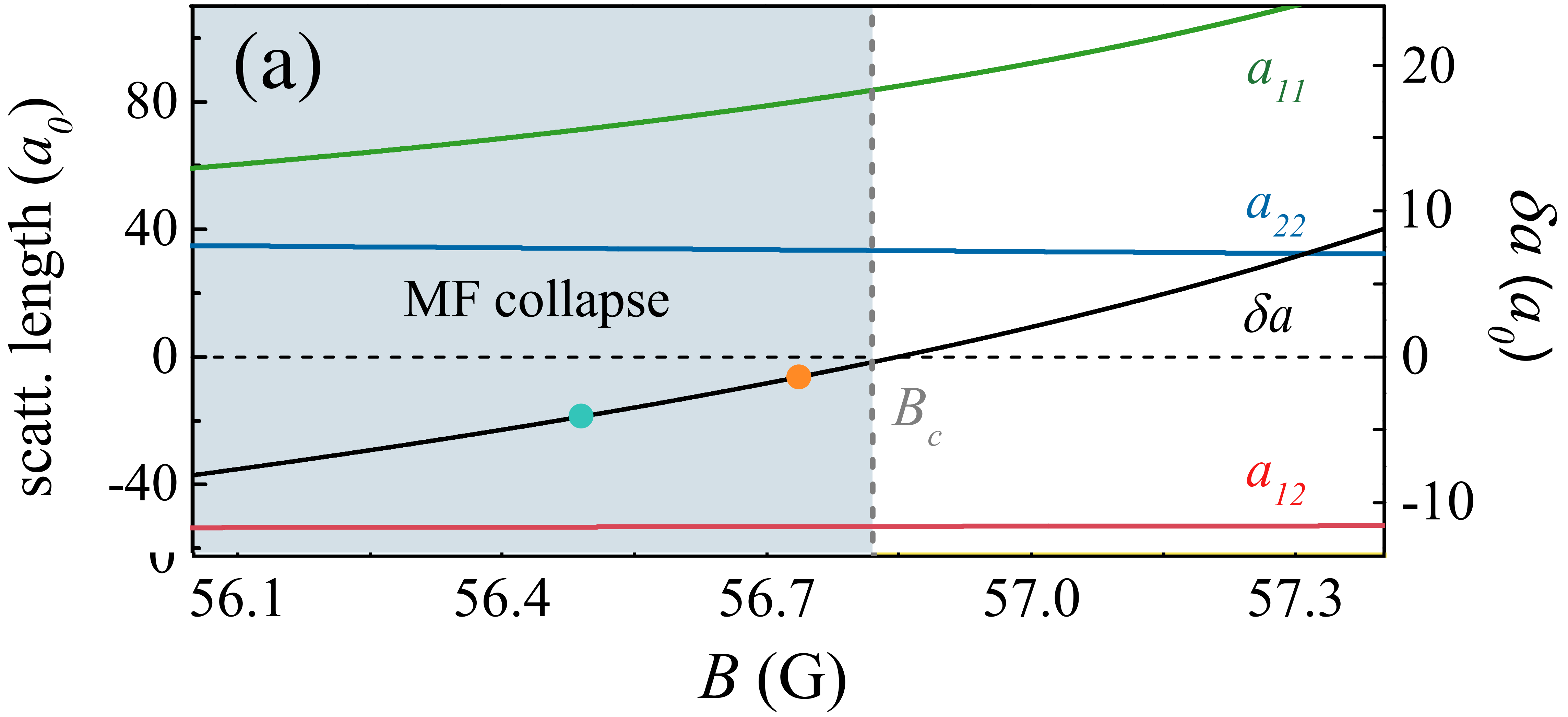
  Stuttgart, Innsbruck, Florence

15 avril, séminaire L. Tarruell + atelier 14h00-18h00 : **New trends in quantum fluid physics: mixtures and spinor gases**

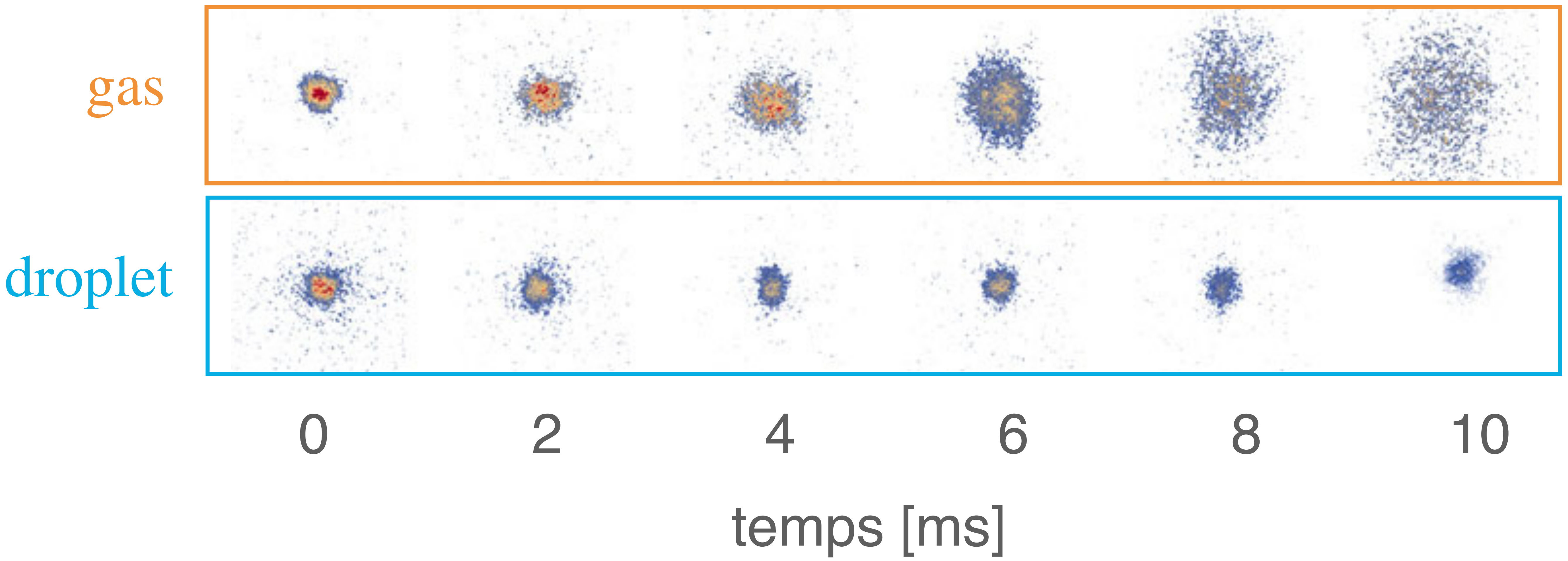
L'expérience de Florence

Semeghini et al., PRL 120, 235301 (2018)
[groupe de M. Fattori]

^{39}K dans les deux états internes $|F=1, m=-1\rangle$ et $|F=1, m=0\rangle$, avec $B \sim 57$ G



On commence avec $N \sim 200\,000$ atomes, taille *r.m.s.* $\sim 2\,\mu$m, qu'on lâche dans l'espace libre



$|\delta g|$ petit : énergie cinétique significative, pas d'équilibre stable

$|\delta g|$ plus grand : énergie cinétique négligeable, équilibre stable entre champ moyen et LHY

En résumé

Traitement détaillé de l'état fondamental du gaz de Bose et de ses excitations élémentaires (k, ω_k)

Approche limitée au cas d'une interaction faible $\sqrt{na^3} \ll 1$

Accord quantitatif théorie-expérience, au moins tant que $ka \ll 1$

Pour le potentiel de contact, singularité pour le calcul de l'énergie cinétique, lié à $\bar{n}_k \propto 1/k^4$

But du séminaire d'aujourd'hui et des prochains cours :

Que peut-on dire si on quitte le régime d'interaction faible ?

La loi en $\bar{n}_k \propto 1/k^4$ ***va nous servir de fil directeur…***