

# Chapitre 5

## Le contact à deux corps

### Sommaire

---

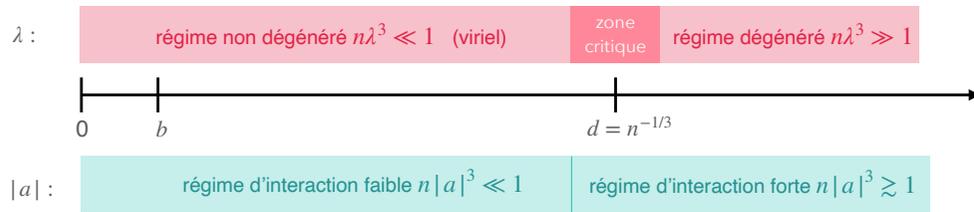
<b>1</b>	<b>Champ d'application du concept de contact . . . . .</b>	<b>2</b>
1-1	Contribution des états liés . . . . .	2
1-2	Conditions d'application : fermions vs. bosons . . . . .	3
1-3	Rappel sur le gaz de Fermi . . . . .	4
1-4	Résonances de Feshbach larges ou étroites? . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Contact et corrélations à deux corps . . . . .</b>	<b>5</b>
2-1	Rappel : états de diffusion proches de $E = 0$ . . . . .	5
2-2	Un argument qualitatif . . . . .	5
2-3	Fonction de corrélation à deux corps . . . . .	7
2-4	Distribution de paires . . . . .	8
2-5	Distribution en impulsion . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Définition thermodynamique du contact . . . . .</b>	<b>10</b>
3-1	Une nouvelle variable thermodynamique . . . . .	10
3-2	Un lemme utile . . . . .	11
3-3	Variation de $a$ et contact . . . . .	12
3-4	La cas de la température non nulle . . . . .	12
3-5	Contact et théorème du viriel . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Premières mesures du contact . . . . .</b>	<b>14</b>
4-1	Distribution en impulsion d'un gaz de Fermi . . . . .	14
4-2	Lois d'échelle pour le contact . . . . .	15
4-3	Études numériques . . . . .	16
4-4	Résonance de Feshbach et fraction moléculaire . . . . .	17

---

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés au lien entre la physique à deux corps, décrite par la longueur de diffusion  $a$ , et les propriétés d'un système à  $N$  corps, abordées par la méthode de Bogoliubov. Ce lien a été possible pour un gaz en interaction faible, le petit paramètre du problème étant  $\sqrt{na^3}$ . Cela imposait que la distance entre particules  $d = n^{-1/3}$  restait toujours grande devant  $a$ .

Le but de ce chapitre est d'explorer le lien "2 corps –  $N$  corps" sans faire d'hypothèse sur le rapport  $a/d$ . Plus précisément, nous ne mettrons pas de contrainte sur la valeur de la longueur de diffusion  $a$ , qui peut être ajustée expérimentalement presque à volonté pour les espèces atomiques présentant une résonance de Fano-Feshbach. Elle peut être mise à une valeur positive ou négative, depuis  $|a| \lesssim b$  (où  $b$  est la portée du potentiel, elle-même de l'ordre de quelques nanomètres) jusqu'à des valeurs supérieures au micromètre, ce qui devient grand devant la distance entre particules :  $a \gtrsim d$ . En revanche, nous supposons toujours que le système est dilué, c'est-à-dire que la portée du potentiel  $b$  vérifie  $b \ll d$ . Nous nous limiterons également (à une exception près au prochain chapitre) aux cas où seules les interactions en onde  $s$  jouent un rôle significatif.

Aux trois échelles de longueur  $a$ ,  $b$  et  $d$  que nous venons de mentionner, s'ajoute la longueur d'onde thermique  $\lambda = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$  (cf. figure 1). Dans le premier chapitre de ce cours, nous avons expliqué comment le développement du viriel permettait d'aborder le cas faiblement dégénéré



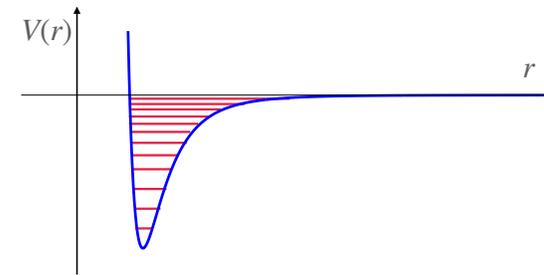
**FIGURE 1.** Les quatre échelles de longueur du problème : portée du potentiel  $b$  et longueur de diffusion  $a$  pour le problème à deux corps, distance moyenne entre particules  $d$  et longueur d'onde thermique  $\lambda$  pour le problème à  $N$  corps. On suppose toujours le système dilué :  $b \ll d$ . Dans ce chapitre, on va s'intéresser principalement au régime dégénéré,  $\lambda > d$ , et aux cas des grandes longueurs de diffusion  $a \gg b$ , avec un intérêt particulier pour le régime d'interaction forte  $a \gtrsim d$  au moins dans le cas des fermions de spin 1/2.

$\lambda \ll d$ . Nous allons donc nous concentrer dans ce qui suit sur le cas fortement dégénéré  $\lambda \gtrsim d$ .

Pour le cas des gaz tri-dimensionnels qui va nous intéresser ici, le lien "2 corps –  $N$  corps" a été en grande partie initié par Shina Tan dans une série de trois articles. Les deux premiers ont été déposés sur arXiv en 2005, mais ces trois articles n'ont été publiés (ensemble) qu'en 2008 (TAN 2008a; TAN 2008b; TAN 2008c). Dans ce travail, Tan a établi un nombre important de relations universelles vérifiées par un gaz de Fermi à deux composantes, avec des interactions décrites dans la limite de portée nulle.

Ces relations que nous allons étudier relient des quantités microscopiques, comme la distribution en impulsion du gaz ou sa fonction de corrélation à deux corps, à des grandeurs macroscopiques, comme l'énergie de son état fondamental et plus généralement son énergie libre ou sa pression. Elle font intervenir une quantité  $C$  appelée "contact", une dénomination justifiée par le fait qu'elle constitue une mesure de la probabilité d'avoir deux particules proches l'une de l'autre. L'intérêt des relations faisant intervenir le contact est qu'elles ne requièrent pas de connaissance précise de l'état du système, que l'on ne serait d'ailleurs pas en mesure de fournir dans le cas des interactions fortes  $a \gtrsim d$ .

L'approche de Tan a été approfondie et généralisée sur le plan théorique



**FIGURE 2.** Potentiel d'interaction à deux corps  $V(r)$ . Ce puits de potentiel, dont la profondeur est typiquement de plusieurs centaines de kelvins, contient de nombreux états ro-vibrationnels liés.

par de nombreux auteurs, et des relations universelles additionnelles ont été établies. Il n'est pas possible de les citer toutes ici. Mentionnons simplement les articles qui, en plus de ceux de Tan, ont servi de base à l'écriture de ce chapitre et du suivant : BAYM, PETHICK et al. 2007; PUNK & ZWERGER 2007; BRAATEN & PLATTER 2008; WERNER, TARRUELL et al. 2009; ZHANG & LEGGETT 2009; COMBESCOT, ALZETTO et al. 2009; YU, BRUUN et al. 2009; BRAATEN, KANG et al. 2010; BRAATEN 2011; WERNER & CASTIN 2012a; WERNER & CASTIN 2012b.

## 1 Champ d'application du concept de contact

### 1-1 Contribution des états liés

Avant d'aborder la présentation du contact, il est important de bien préciser le cadre dans lequel nous allons travailler. Un premier point porte sur les états liés à deux (ou plus) particules. Pour les espèces atomiques utilisées au laboratoire, le potentiel d'interaction à deux corps  $V(r)$  représenté sur la figure 2 a une profondeur de l'ordre de plusieurs centaines de kelvins et il comporte généralement de nombreux états liés. En dehors d'une résonance de Fano–Feshbach, l'énergie du dernier état lié est de l'ordre d'une dizaine de fois l'énergie de van der Waals  $E_{vdW}$  (voir cours 2021), c'est-

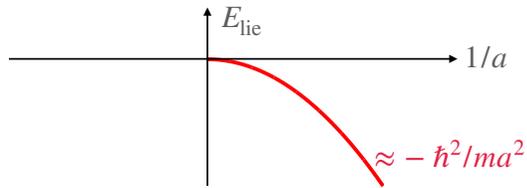


FIGURE 3. Énergie de l'état lié qui apparaît du côté  $a > 0$  d'une résonance de Fano–Feshbach.

à-dire de 0.1 à 1 mK suivant les espèces. Cette énergie est grande devant les énergies caractéristiques des gaz, qui sont dans la gamme 1 nK–1  $\mu$ K. Cette différence considérable est encore augmentée pour les états plus fortement liés du potentiel  $V(r)$ . Il s'ensuit que la formation de dimères dans ces états constitue une "perte sèche" d'atomes pour le gaz. Une fois ces dimères formés, ils s'échappent généralement du piège confinant l'assemblée d'atomes et ils n'entrent pas dans la réalisation de l'équilibre thermodynamique. Nous allons donc les ignorer dans la suite.

Il en va autrement pour l'état très faiblement lié qui apparaît au voisinage d'une résonance de Fano–Feshbach, plus précisément du côté  $a > 0$  de la résonance (figure 3). La résonance correspond à  $|a| = +\infty$  (i.e.  $1/a = 0$ ) et l'énergie de l'état lié, en valeur absolue très faible, est  $\approx -\hbar^2/ma^2$ . Cette énergie de liaison est comparable aux autres échelles d'énergie du gaz et cet état lié doit donc être pris en compte pour l'étude de la dynamique et de la thermodynamique du système à  $N$  corps.

Au voisinage de cette résonance, on peut également s'interroger sur la possibilité de former des états plus complexes, à trois corps par exemple. Pour des fermions de spin 1/2 avec  $m_\uparrow \approx m_\downarrow$ , le principe de Pauli interdit la formation d'un édifice à trois corps. En revanche, pour des bosons ou pour des fermions de spin 1/2 avec une grande différence entre  $m_\uparrow$  et  $m_\downarrow$ , ces états faiblement liés à trois corps existent – c'est l'effet Efimov – et doivent également être pris en compte [pour une revue sur ce problème à trois corps, voir NAIDON & ENDO (2017)].

## 1-2 Conditions d'application : fermions vs. bosons

Nous allons voir que l'élément central de l'approche de Tan, le *contact*, est la quantité conjuguée, au sens thermodynamique du terme, de la longueur de diffusion  $a$ . Le contact permet de caractériser du point de vue thermodynamique toute la physique à courte portée du système, pourvu que les interactions entre particules n'introduisent pas d'autre échelle d'énergie que  $\hbar^2/ma^2$  dans le domaine d'énergie pertinent pour ces gaz quantiques. En particulier, le problème à trois corps et l'effet Efimov ne doivent pas invalider cette hypothèse.

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent (§1-1), l'effet Efimov est absent pour un gaz de fermions de spin 1/2 avec  $m_\uparrow \approx m_\downarrow$ . Le premier champ d'application des résultats de ce chapitre est donc un gaz de  $N$  fermions de spin<sup>1</sup> 1/2. Dans ce cas, nous n'aurons besoin d'aucune restriction sur le signe ou la valeur de la longueur de diffusion  $a$  caractérisant les interactions  $\uparrow\downarrow$ .

Pour un gaz de bosons (ou pour un gaz de fermions avec un rapport  $m_\uparrow/m_\downarrow$  très différent de 1), nous avons expliqué que l'hypothèse énoncée ci-dessus n'est pas toujours correcte. Au voisinage d'une résonance de diffusion, la physique à trois corps peut introduire de nouvelles échelles de longueur et d'énergie, ce qui complique alors le problème puisque  $a$  n'est plus la seule grandeur caractérisant les interactions. Pour éviter ce problème, nous supposons dans ce chapitre que le gaz de Bose est préparé dans une configuration telle que :

- la longueur de diffusion  $a$  est positive, pour assurer la stabilité en champ moyen ;
- la densité est suffisamment faible pour que  $na^3 \ll 1$ , c'est-à-dire  $a \ll d$ , de sorte qu'il existe une plage de temps durant laquelle le gaz peut atteindre son état d'équilibre lié aux interactions à deux corps, sans que les états à trois corps ne soient appréciablement peuplés (voir chapitre précédent).

Notons que ces hypothèses restent compatibles avec l'utilisation d'une résonance de Fano–Feshbach,  $b \ll a$  pourvu que l'on ait simultanément

1. Il peut bien sûr s'agir d'un pseudo-spin, ces deux états étant alors choisis parmi l'ensemble des sous-niveaux Zeeman des atomes.

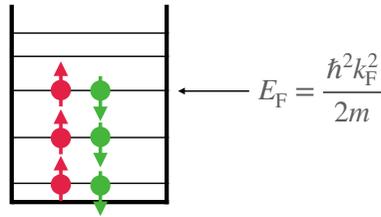


FIGURE 4. État fondamental d'un gaz de Fermi équilibré et sans interaction, avec le remplissage de tous les états à une particule jusqu'au niveau de Fermi.

$a \ll d$ . Nous verrons au chapitre suivant comment compléter notre analyse avec la notion de "contact à trois corps".

### 1-3 Rappel sur le gaz de Fermi

Puisque le gaz de Fermi va jouer un rôle essentiel dans ce chapitre, nous allons rappeler ici quelques définitions et propriétés concernant ce système. Nous supposerons que le gaz est "équilibré", c'est-à-dire qu'il y a le même nombre d'atomes dans chaque état de spin :

$$N_{\uparrow} = N_{\downarrow} \equiv \frac{N}{2}. \quad (1)$$

En absence d'interaction, l'état fondamental du gaz s'obtient en remplissant avec deux particules (une  $\uparrow$ , une  $\downarrow$ ) chaque état d'impulsion depuis l'impulsion nulle jusqu'au *niveau de Fermi*, d'impulsion  $\hbar k_F$  (figure 4). La valeur du niveau de Fermi se déduit de

$$N = \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} 2 \quad (2)$$

en utilisant le passage habituel d'une somme discrète sur  $\mathbf{k}$  à une intégrale :

$$N = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}| < k_F} 2 \, d^3k = \frac{L^3 k_F^3}{3\pi^2}, \quad (3)$$

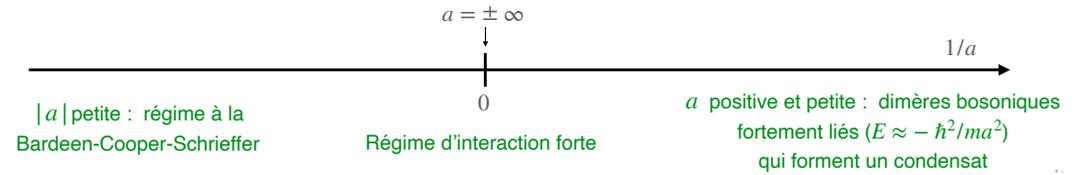


FIGURE 5. Les différents régimes pour l'état fondamental d'un gaz de Fermi avec des interactions  $\uparrow\downarrow$  en onde  $s$ , caractérisées par la longueur de diffusion  $a$ .

ce qui donne

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad \text{avec} \quad n = \frac{N}{L^3}. \quad (4)$$

L'énergie de l'état fondamental en absence d'interaction vaut :

$$E = \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} 2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} N E_F \quad \text{avec} \quad E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \quad (5)$$

Prenons maintenant en compte les interactions. À basse température, seules les interactions en onde  $s$  sont significatives et le principe de Pauli interdit ce canal pour les collisions  $\uparrow\uparrow$  et  $\downarrow\downarrow$ . En revanche, les interactions entre les deux composantes  $\uparrow\downarrow$  sont possibles et elles rendent ce système extrêmement riche. Pour toute valeur de  $a$ , positive ou négative, on prédit et on observe une transition de l'état normal à haute température vers un état superfluide à basse température [voir par exemple ZWARGER (2012)]. En particulier, quand on croise une résonance de Fano-Feshbach, on observe pour l'état fondamental les régimes suivants :

- Pour  $a$  positive et petite devant  $d$ , cet état superfluide peut être approché par la théorie de la condensation de Bose-Einstein, avec des paires de fermions qui se forment dans l'espace réel pour constituer des dimères bosoniques.
- Pour  $a$  négative et petite en valeur absolue, l'état superfluide peut être décrit par la théorie BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer).
- Au voisinage de la résonance, on trouve le régime d'interaction forte  $n|a|^3 \gtrsim 1$ .

Il n'est pas question de passer en revue dans ce chapitre toute la physique du gaz de Fermi en interaction. Nous nous contenterons d'indiquer

au fur et à mesure les éléments indispensables pour l'étude du lien entre interactions binaires et propriétés macroscopiques du fluide.

### 1-4 Résonances de Feshbach larges ou étroites ?

L'approche de Tan permet de fournir des prédictions quantitatives sur des systèmes en interaction forte, avec une longueur de diffusion  $a$  grande devant la portée du potentiel  $b$ . En physique des gaz atomiques, la portée  $b$  est donnée par la longueur de van der Waals  $R_{\text{vdW}}$  et une grande longueur de diffusion  $a \gg R_{\text{vdW}}$  est généralement obtenue via une résonance de Fano–Feshbach. Nous avons étudié ces résonances dans le cours de l'an dernier et montré que l'on pouvait les classer en deux catégories :

- Les résonances larges, pour lesquelles l'amplitude de diffusion s'écrit en bonne approximation

$$f(k) \approx \frac{-a}{1 + ika} \quad (6)$$

pour tous les  $k$  tels que  $k \lesssim b^{-1}$ . La longueur de diffusion est dans ce cas le seul paramètre pertinent pour caractériser les interactions binaires et tout ce qui suit dans ce chapitre s'applique sans problème.

- Les résonances étroites, pour lesquelles il faut prendre en compte un terme quadratique au dénominateur de cette fraction :

$$f(k) \approx \frac{-a}{1 + ika + k^2 R_* a}, \quad (7)$$

la longueur  $R_*$  étant grande devant la portée "naturelle"  $b \approx R_{\text{vdW}}$  (PETROV 2004). Pour ces résonances étroites, correspondant à un terme de portée effective  $r_e = -2R_*$  anormalement grand, l'approche qui suit n'est pas applicable telle quelle<sup>2</sup> puisque la longueur de diffusion ne suffit pas à elle seule à la caractérisation des interactions binaires dans le domaine  $k \lesssim b^{-1}$ .

<sup>2</sup> WERNER & CASTIN (2012b) détaillent comment généraliser l'approche de Tan pour prendre en compte le terme de portée effective.

## 2 Contact et corrélations à deux corps

### 2-1 Rappel : états de diffusion proches de $E = 0$

Nous allons rappeler ici quelques propriétés utiles des états stationnaires de diffusion à basse énergie. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers le cours 2021. Nous nous intéressons aux collisions en onde  $s$  (donc isotropes) et l'analyse du processus se fait en considérant l'équation radiale vérifiée par la fonction d'onde réduite  $u_k(r) = r \psi_k(r)$  d'énergie  $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$ , où  $m_r = m/2$  est la masse réduite :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} u_k'' + V(r) u_k(r) = E u_k(r). \quad (8)$$

En dehors de la portée du potentiel, cette solution s'écrit en fonction du déphasage  $\delta_0(k)$  :

$$r \gtrsim b : \quad u_k(r) \propto \sin[kr + \delta_0(k)]. \quad (9)$$

La longueur de diffusion est définie par  $a = -\lim_{k \rightarrow 0} \delta_0(k)$  de sorte que (9) devient

$$r \gtrsim b, k \rightarrow 0 : \quad u_k(r) \propto a - r. \quad (10)$$

Ce comportement commun à toutes les fonctions radiales réduites  $u_k(r)$  pour  $k$  petit est illustré sur la figure 6 dans le cas d'un puits carré. On s'est placé au voisinage d'une résonance avec  $a = 10b$ . La fonction d'onde normée  $\psi_0(r)$  a donc le comportement suivant :

$$r > b : \quad \psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left( \frac{a}{r} - 1 \right) = \frac{a}{\sqrt{L^3}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (11)$$

et le comportement des  $\psi_k(r)$  est voisin pour  $k$  suffisamment petit. Nous allons voir dans ce qui suit que c'est le comportement en  $1/r$  de  $\psi_0$  qui joue un rôle déterminant.

### 2-2 Un argument qualitatif

Pour commencer, considérons la fonction d'onde de l'état fondamental d'un gaz de  $N$  particules.

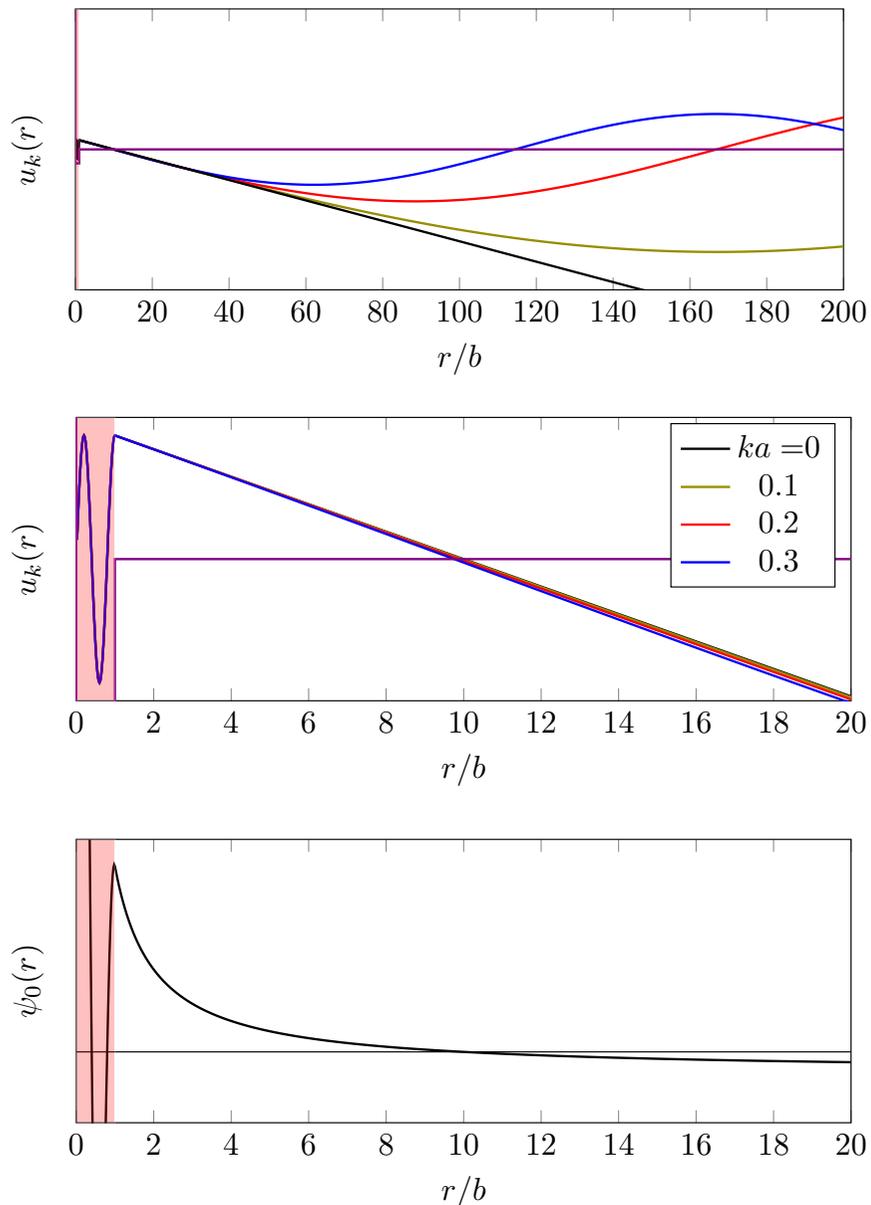


FIGURE 6. Fonctions radiales réduites  $u_k(r)$  et fonction radiale  $\psi_0(r)$  pour une diffusion par un puits carré avec  $a = 10b$ .

- Pour des bosons sans spin, nous écrivons cette fonction d'onde sous la forme  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ , avec la normalisation

$$\int |\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 d^3r_1 \dots d^3r_N = 1. \quad (12)$$

Les particules ayant été numérotées arbitrairement  $1, 2, \dots$ , cette fonction d'onde donne l'amplitude de probabilité pour trouver la particule 1 au point  $\mathbf{r}_1$ , la particule 2 au point  $\mathbf{r}_2, \dots$  et elle est symétrique par échange de deux particules.

- Pour le cas des fermions, nous considérons un gaz avec  $N/2$  particules dans l'état de spin  $\uparrow$  et  $N/2$  particules dans l'état de spin  $\downarrow$ . Nous pouvons écrire la fonction d'onde à  $N$  corps en attribuant les indices impairs  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \dots$  aux  $N/2$  fermions de spin  $\uparrow$  et les indices pairs  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, \dots$  aux  $N/2$  fermions de spin  $\downarrow$  avec la même normalisation qu'en (12). Cette fonction d'onde est antisymétrique par toute permutation de deux indices impairs, et également antisymétrique par toute permutation de deux indices pairs.

Fixons les positions  $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \dots, \mathbf{r}_N$  et intéressons-nous à la forme de  $\Phi$  quand  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  se rapprochent l'un de l'autre. Plus précisément, posons

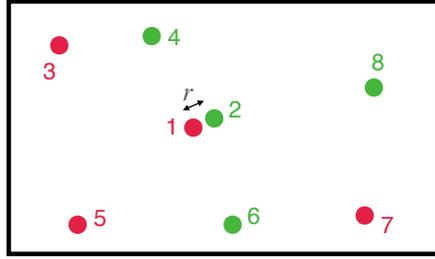
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad (13)$$

et considérons la limite des petits  $r$  (typiquement de l'ordre de  $b$ ), en supposant que les  $N - 2$  particules restantes sont à une distance  $\gg b$  de  $\mathbf{R}$  (figure 7). Il est alors naturel de supposer le résultat suivant :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \approx \psi_0(r) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (14)$$

où  $\psi_0(r)$  l'état de diffusion pour la particule relative de la paire (1,2) à énergie nulle (cf. figure 6, bas). Dans le cas d'une interaction forte,  $a \sim d$ , on s'attend à ce que cette forme reste valable tant que  $r \ll a, d$ , c'est-à-dire tant que les particules 1 et 2 ne rentrent pas dans les "zones d'influence" des autres particules, et interagissent seulement l'une avec l'autre.

**Remarque.** Si on décrit l'interaction entre particules par le pseudo-potential, l'argument qualitatif que nous venons de donner devient la définition du domaine des fonctions d'onde éligibles pour décrire le système



**FIGURE 7.** Système à  $N$  fermions. On s'intéresse au comportement de la fonction d'onde  $\Phi$  quand les particules 1 et 2 de spin opposés s'approchent l'une de l'autre, les autres particules étant éloignées de  $\mathbf{r}_1$  et de  $\mathbf{r}_2$ .

(WERNER & CASTIN 2012b). Cette fonction d'onde doit être telle que pour toute paire de particules, par exemple (1, 2), on a :

$$r \rightarrow 0 : \quad \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \left( \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{a} \right) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) + \mathcal{O}(r) \quad (15)$$

où  $\tilde{\Phi}$  est une fonction régulière des coordonnées des  $N-2$  autres particules et de  $\mathbf{R}$ . On a supposé ici que  $\mathbf{R}$  est différent de  $\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ .

### 2-3 Fonction de corrélation à deux corps

L'argument présenté ci-dessus était restreint au cas où les positions  $\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$  ne se rapprochaient pas des positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  considérées pour écrire (14). Pour rendre cette hypothèse plus quantitative, nous allons la reformuler en terme de fonction de corrélation à deux corps.

Présentons la démarche sur le cas de fermions . On introduit la fonction de corrélation "à quatre points" (ZHANG & LEGGETT 2009)

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}'_a) \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}'_b) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}_b) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}_a) \rangle \quad (16)$$

qui se calcule à partir de la fonction d'onde  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \frac{N^2}{4} \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &\quad \times \Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (17)$$

Cette fonction de corrélation est normalisée comme :

$$\iint \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) d^3r_a d^3r_b = \frac{N^2}{4}. \quad (18)$$

Plus précisément, fixons  $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}'_b = 0$  et intéressons-nous à l'objet "à deux points" :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) = \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \quad (19)$$

Nous allons chercher à caractériser le comportement de cette fonction quand  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  se rapprochent tous deux de 0. Pour cela, on note que  $\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0})$  peut être considéré comme l'élément de matrice d'un opérateur hermitien  $\hat{\mathcal{O}}$  en représentation position,  $\langle \mathbf{r}' | \hat{\mathcal{O}} | \mathbf{r} \rangle$ . Cet opérateur peut être diagonalisé pour s'écrire (YU, BRUUN et al. 2009) :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) = \sum_j \gamma_j \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}). \quad (20)$$

L'hypothèse à la base de la théorie du contact se formule alors de la manière suivante : on suppose que pour  $r \ll d$ , les fonctions  $\phi_j(\mathbf{r})$  significativement peuplées sont toutes très proches de la fonction d'onde à deux particules  $\psi_0(r)$  introduite en §2-1. On définit donc la quantité  $C$  telle que

$$r, r' \ll d : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \quad (21)$$

En utilisant (11), cette relation s'écrit en dehors de la portée  $b$  du potentiel

$$b \lesssim r, r' \ll d, a : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r} \quad (22)$$

La quantité  $C$  est appelée *contact*. C'est une quantité extensive dont la dimension est l'inverse d'une longueur. Le point central de l'approche développée ici est qu'à courte distance, la physique à  $N$  corps intervient uniquement par l'intermédiaire de cette constante multiplicative. Notons que nous avons défini ici le contact pour l'état fondamental du système. Nous verrons en §3 comment généraliser cette définition au cas  $T \neq 0$ , une fois le lien établi avec la thermodynamique du gaz.

On procède d'une manière similaire pour les bosons en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &\equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_a) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_b) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_b) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_a) \rangle \\ &= N(N-1) \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &\quad \times \Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (23)$$

Cette fonction est normée de la façon suivante

$$\iint \mathcal{G}_2(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) d^3r_a d^3r_b = N(N-1). \quad (24)$$

L'hypothèse à la base de la théorie du contact s'écrit alors pour des bosons :

$$r, r' \ll d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \quad (25)$$

ou encore si  $a \gg b$  :

$$b \lesssim r, r' \ll a, d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r} \quad (26)$$

## 2-4 Distribution de paires

Une fois posées les formes (22,26) de la fonction  $\mathcal{G}_2$ , on peut déterminer le comportement à courte distance de la fonction de distribution de paires, définie ici pour des fermions :

$$G_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) \equiv \int \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}, \mathbf{r}_a; \mathbf{r}_a + \mathbf{r}, \mathbf{r}_a) d^3r_a \quad (27)$$

et on trouve en utilisant l'invariance par translation du système :

$$b \lesssim r \ll d, a : \quad G_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 r^2}. \quad (28)$$

Un résultat identique apparaît pour des bosons, sans l'indice  $\uparrow\downarrow$  bien sûr.

L'augmentation rapide de  $G_2(r)$  à courte distance peut être comprise comme la signature d'une tendance au groupement des particules, pourvu

qu'elles soient de spins opposés dans le cas des fermions. Pour approfondir ce point, plaçons-nous dans la limite  $b \rightarrow 0$  (pseudo-potentiel) et considérons une particule de spin  $\uparrow$  en un point donné, par exemple l'origine des coordonnées; regardons la probabilité  $\delta P$  de trouver une particule de spin  $\downarrow$  dans une boule de rayon infinitésimal  $r$  centrée en 0. Si les particules étaient non corrélées, cette probabilité varierait comme  $\delta P \propto r^3$  quand  $r \rightarrow 0$ . Compte tenu de la variation de  $G_2$ , nous trouvons ici  $\delta P \propto r$ ; cette probabilité tend toujours vers 0 quand  $r \rightarrow 0$ , mais seulement linéairement avec  $r$  au lieu de la loi en  $r^3$  attendue pour des particules indépendantes.

**Lien avec l'approche de Bogoliubov.** Au chapitre précédent, nous avons calculé la fonction  $g_2 = G_2/nN$  et trouvé à courte distance le résultat suivant :

$$r \ll \xi : \quad g_2(r) \approx \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \quad (29)$$

soit pour  $r \ll a \ll d$  :

$$r \ll a : \quad G_2(r) \approx \frac{nNa^2}{r^2}. \quad (30)$$

Cette variation est bien conforme à (28) et on en déduit la valeur du contact pour un gaz de Bose en interaction faible et à  $T = 0$  :

$$\text{Bogoliubov : } \quad C = (4\pi a)^2 nN \quad (31)$$

Notons que la condition de validité  $r \ll \xi$  de (29) est moins contraignante que la condition  $r \ll d$  du cas général (25). En effet,  $\xi = (8\pi na)^{-1/2} = d(d/8\pi a)^{1/2}$  est grand devant  $d$  dans le régime d'interaction faible.

## 2-5 Distribution en impulsion

Comme annoncé en introduction, le contact  $C$  intervient dans de nombreuses quantités physiques caractérisant le fluide. Nous nous intéressons ici à la distribution en impulsion<sup>3</sup>  $n(\mathbf{k})$ .

3. Pour éviter de voir intervenir la constante  $\hbar$  dans tout ce qui suit, nous travaillons plutôt avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  que la véritable impulsion  $\hbar\mathbf{k}$ .

Considérons par exemple des bosons et écrivons pour commencer l'amplitude de probabilité pour trouver la particule 1 avec l'impulsion  $\mathbf{k}$ , les particules  $2, \dots, N$  étant fixées aux points  $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Cette amplitude s'écrit :

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{k}; \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \int d^3r_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (32)$$

La distribution de probabilité  $n_1(\mathbf{k})$  pour l'impulsion de la particule 1 s'obtient en prenant le module carré de cette expression, puis en intégrant sur toutes les positions  $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , ce qui donne :

$$n_1(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1)} \Phi^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \times \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d^3r_1 d^3r'_1 d^3r_2 \dots d^3r_N, \quad (33)$$

ce qui fait apparaître de manière naturelle la fonction de corrélation à quatre points  $\mathcal{G}_2$  considérée plus haut.

Nous nous intéressons ici au comportement de cette fonction aux grands  $k$ , provenant donc de la contribution des petites différences  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|$ . Cette contribution devient importante quand le couple  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1)$  se rapproche d'une des autres positions  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ . Considérons par exemple le comportement résonant entre  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2)$ , le résultat devant ensuite être multiplié par  $N - 1$  pour prendre en compte les autres possibilités  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j)$ ,  $j = 3 \dots N$ . On voit apparaître en utilisant (26) :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 \text{ proches : } & \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ & \times \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \approx \frac{1}{N(N-1)} \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'_{12}} \frac{1}{r_{12}}. \end{aligned} \quad (34)$$

La contribution du terme  $\frac{1}{r'_{12}} \frac{1}{r_{12}}$  à la transformée de Fourier donnant  $n_1(\mathbf{k})$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1)}}{r'_{12} r_{12}} d^3r_1 d^3r'_1 d^3r_2 &= \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}}{r'_{12} r_{12}} d^3r_1 d^3r'_1 d^3r_2 \\ &= L^3 \left( \frac{4\pi}{k^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

où on a utilisé

$$\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} d^3r = \frac{4\pi}{k^2}. \quad (36)$$

Nous trouvons donc le comportement dominant pour les grandes impulsions pour la particule 1 :

$$n_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \frac{C}{k^4} + \dots \quad (37)$$

et il ne reste plus qu'à multiplier le résultat par  $N$  pour obtenir la distribution en impulsion totale du gaz :

$$\boxed{\text{Bosons : } n(\mathbf{k}) = \frac{C}{k^4} + \dots} \quad (38)$$

cette distribution étant par construction normalisée de la manière suivante (cf. (33)) :

$$\text{Bosons : } \frac{1}{(2\pi)^3} \int n(\mathbf{k}) d^3k = N. \quad (39)$$

On trouve donc que la distribution en impulsion se comporte comme  $k^{-4}$  aux grands  $k$  (là où le terme "... " devient négligeable) et le contact donne directement le poids de cette composante.

Pour un gaz de fermions de spin 1/2 équilibré, le contact a été défini de sorte que cette relation reste valable pour chaque composante :

$$\boxed{\text{Fermions : } n_{\uparrow}(\mathbf{k}) = n_{\downarrow}(\mathbf{k}) = \frac{C}{k^4} + \dots} \quad (40)$$

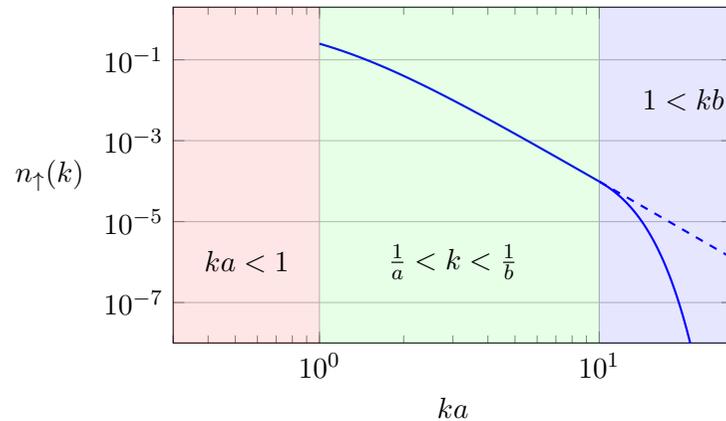
avec la normalisation

$$\text{Fermions : } \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_{\uparrow}(\mathbf{k}) d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_{\downarrow}(\mathbf{k}) d^3k = \frac{N}{2}. \quad (41)$$

Rappelons que nous avons prouvé l'existence de cette aile dans le cadre de la théorie de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel, dans le cas  $na^3 \ll 1$ . L'intérêt (considérable!) de la présente approche est de généraliser ce résultat au cas des grandes longueurs de diffusion, voire même au cas unitaire  $1/a = 0$ . Son domaine de validité dans le cas des interactions fortes  $a \sim d$  se déduit directement de celui trouvé pour la distribution de paires au paragraphe précédent :

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{d} \ll k \lesssim \frac{1}{b}. \quad (42)$$

Cette loi générale en  $k^{-4}$ , valable au régime unitaire et de part et d'autre de ce régime, a été prédite pour la première fois par HAUSSMANN (1994).



**FIGURE 8.** Allure typique de la distribution en impulsion  $n(k)$  d'un gaz de Fermi à deux composantes ou d'un gaz de Bose (en négligeant les effets à trois corps) dans la limite d'une longueur de diffusion  $a \sim d$  grande devant la portée  $b$  du potentiel inter-atomique. La loi  $n(k) \approx C/k^4$  est valable dans la région centrale colorée en vert.

**Remarque.** Il est intéressant de noter qu'une loi en  $1/k^4$  apparaît pour un gaz à une dimension décrit par le modèle de Tonks (MINGUZZI, VIGNOLO et al. 2002) ou de Lieb–Lininger, avec un préfacteur relié à la dérivée de l'énergie de l'état fondamental du gaz de manière similaire à ce que nous verrons dans la partie 3 (OLSHANII & DUNJKO 2003). Cette loi en  $1/k^4$  est également valable à deux dimensions, aussi bien pour des fermions (WERNER & CASTIN 2012b; SHI, CHIESA et al. 2015) que pour des bosons (WERNER & CASTIN 2012a). Notons que pour des bosons à 2D, le problème d'Efimov ne se pose pas (BRODSKY, KAGAN et al. 2006) et les difficultés liées à l'introduction d'un paramètre supplémentaire pour décrire les interactions à trois corps sont absentes.

## 3 Définition thermodynamique du contact

### 3-1 Une nouvelle variable thermodynamique

Nous passons dans cette partie à une définition apparemment différente du contact, fondée sur la notion de variable thermodynamique. Un fluide à l'équilibre est décrit par son équation d'état, qui donne la variation d'un potentiel thermodynamique (son énergie  $E$  par exemple) en fonction de variables thermodynamiques conjuguées comme entropie/température, volume/pression, nombre de particules/potentiel chimique. On a ainsi la différentielle totale pour l'énergie

$$dE = T dS - P dL^3 + \mu dN \quad (43)$$

avec

$$T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{L^3, N}, \quad P = - \left( \frac{\partial E}{\partial L^3} \right)_{S, N}, \quad \mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, L^3}. \quad (44)$$

Le potentiel d'interaction peut être ajouté à la liste de ces variables thermodynamiques, mais sa caractérisation nécessite en général un grand nombre de paramètres, ce qui rend cette notion peu utile en pratique. La situation change radicalement quand on s'intéresse à un gaz dilué et froid, puisque les interactions peuvent alors être décrites à l'aide d'un seul paramètre, la longueur de diffusion  $a$ . Il est alors pertinent d'introduire ce paramètre de façon explicite dans l'équation d'état, ce qui amène à introduire également sa quantité thermodynamique conjuguée. En fait, il est plus commode d'utiliser la variable  $1/a$  et de poser

$$\text{Bosons : } \frac{\hbar^2 C}{8\pi m} = - \left( \frac{\partial E}{\partial (1/a)} \right)_{S, L^3, N} \quad (45)$$

La description thermodynamique du fluide se fait ensuite selon la procédure usuelle, en utilisant la différentielle d'un potentiel thermodynamique, l'énergie par exemple :

$$dE = T dS - P dL^3 + \mu dN - \frac{\hbar^2 C}{8\pi m} d(1/a) \quad (46)$$

Nous allons dans un premier temps nous placer à température nulle (donc à entropie nulle) et montrer que la quantité  $C$  qui figure dans cette expression coïncide avec le contact introduit en (25). Nous généraliserons cette démarche au cas de la température non nulle en §3-4.

**Cas des fermions.** Pour des fermions de spin 1/2, la définition est modifiée par un facteur 2 et devient

$$\boxed{\text{Fermions : } \frac{\hbar^2 C}{4\pi m} = - \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{S, L^3, N}} \quad (47)$$

Ce facteur 2 supplémentaire permet d'absorber le fait qu'un fermion n'interagit qu'avec  $N/2$  particules (celles de spin opposé), alors qu'un boson interagit avec les  $N - 1$  autres particules. Comme nous l'avons déjà mentionné, avec cette définition, l'axe de la distribution en impulsion s'écrit  $C/k^4$  aussi bien pour des bosons que chacune des composantes de spin des fermions.

### 3-2 Un lemme utile

Pour relier le contact à la dérivée de l'énergie par rapport à la longueur de diffusion, nous allons commencer par prouver un résultat préliminaire. Considérons une collision entre deux particules de masse  $m$ , soit une masse réduite  $m_r = m/2$ . L'interaction entre les deux particules est décrite par le potentiel  $V(r)$  et on considère la solution d'énergie nulle  $\psi_0(r)$  pour l'équation radiale. Supposons que le potentiel d'interaction  $V(r)$  est légèrement modifié :

$$V(r) \longrightarrow V(r) + \delta V(r). \quad (48)$$

Nous nous intéressons à la modification correspondante  $\delta a$  de la longueur de diffusion  $a$  et nous allons établir le résultat suivant :

$$\boxed{L^3 \int_0^\infty \delta V(r) \psi_0^2(r) d^3r = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \delta a} \quad (49)$$

la fonction  $\psi_0(r)$  étant normalisée de sorte que  $\psi_0(r) \approx 1/L^{3/2}$  à l'infini [cf. (11)].

**Démonstration :** Comme d'habitude, il est commode de considérer la fonction d'onde radiale réduite  $u_0(r) = r \psi_0(r)$  qui est solution de l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} u_0''(r) + V(r) u_0(r) = 0. \quad (50)$$

Notons  $\delta u(r)$  la modification de  $u_0(r)$  induite par le changement  $\delta V$ . Nous obtenons à l'ordre 1 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \delta u''(r) + \delta V(r) u_0(r) + V(r) \delta u(r) = 0. \quad (51)$$

Multiplions cette équation par  $u_0(r)$  et intégrons le résultat entre  $r = 0$  et  $r = r_{\max}$ , borne supérieure que nous prendrons infinie à la fin du calcul :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_r} \int_0^{r_{\max}} \delta u''(r) u_0(r) dr + \int_0^{r_{\max}} \delta V(r) u_0^2(r) dr \\ + \int_0^{r_{\max}} V(r) \delta u(r) u_0(r) dr = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Pour évaluer le premier terme, rappelons que  $u_0(r)$  et  $u_0(r) + \delta u(r)$  satisfont les conditions aux limites :

$$u_0(0) = 0, \quad \delta u(0) = 0 \quad (53)$$

et

$$r \gg b : \quad u_0(r) \approx \frac{1}{L^{3/2}}(r - a), \quad u_0(r) + \delta u(r) \approx \frac{1}{L^{3/2}}(r - a - \delta a), \quad (54)$$

c'est-à-dire  $\delta u(r) \approx -\delta a/L^{3/2}$  et  $\delta u' \approx 0$  aux grands  $r$ . Une double intégration par parties du premier terme donne donc

$$\begin{aligned} \int_0^{r_{\max}} \delta u_0''(r) u_0(r) dr &= [u_0 \delta u']_0^{r_{\max}} - [u_0' \delta u]_0^{r_{\max}} + \int_0^{r_{\max}} u_0''(r) \delta u(r) dr \\ &= 0 + \frac{\delta a}{L^3} + \frac{2m_r}{\hbar^2} \int_0^{r_{\max}} V(r) u_0(r) \delta u(r) dr \end{aligned} \quad (55)$$

Il suffit alors de reporter ce résultat dans (52) dans la limite  $r_{\max} \rightarrow +\infty$  pour obtenir le résultat annoncé en (49).

### 3-3 Variation de $a$ et contact

Nous sommes désormais en mesure de prouver que le paramètre  $C$  introduit comme variable conjuguée de  $1/a$  n'est autre que le contact défini en (21,25) à partir de la fonction de corrélation à deux corps. On considère une assemblée de  $N$  particules en interaction binaire, avec l'hamiltonien :

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (56)$$

avec

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_j \frac{\hat{p}_j^2}{2m} \quad \hat{H}_{\text{int}} = \sum_{i < j} V(\hat{r}_{ij}). \quad (57)$$

Considérons une variation infinitésimale du potentiel  $V$  induisant une variation (également très faible) de la longueur de diffusion  $a$ . On effectue cette variation à volume et nombre de particules constants (rappelons que nous nous sommes placés pour l'instant à température nulle et donc à entropie nulle). On cherche à évaluer

$$\left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{L^3, N}. \quad (58)$$

Le théorème d'Hellmann–Feynman permet d'exprimer la variation de l'énergie en fonction de la variation de l'hamiltonien lui-même :

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial a} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{H}_{\text{int}}}{\partial a} \right\rangle. \quad (59)$$

Le dernier membre se calcule en utilisant le lien entre la variation  $\delta V$  et la variation  $\delta a$  établi avec le lemme (49). Prenons par exemple le cas des bosons et partons de

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle &= \frac{N(N-1)}{2} \int \delta V(r_{12}) |\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 d^3 r_1 \dots d^3 r_N \\ &= \frac{1}{2} \int \delta V(r_{12}) \mathcal{G}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ &= \frac{L^3}{2} \int \delta V(r) \mathcal{G}_2(\mathbf{r}, \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) d^3 r. \end{aligned} \quad (60)$$

Du fait de la présence de  $\delta V$ , l'intégrande n'est non nul que si  $r \lesssim b$ . On peut donc utiliser l'hypothèse de départ de la théorie du contact, à savoir l'équation (25) que nous reproduisons ici pour  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  :

$$r \ll d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}, \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} |\psi_0(\mathbf{r})|^2. \quad (61)$$

En utilisant le lemme (49), on arrive alors à :

$$\delta \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \frac{C \hbar^2}{8\pi m a^2} \delta a. \quad (62)$$

dont on déduit la relation recherchée :

$$\frac{\partial E}{\partial(1/a)} = -a^2 \frac{\partial E}{\partial a} = -a^2 \frac{\delta \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle}{\delta a} = -\frac{C \hbar^2}{8\pi m}. \quad (63)$$

La quantité thermodynamique  $C$  introduite en (45) est donc bien identique au contact défini à partir de la fonction  $\mathcal{G}_2$  et utilisé en (61).

### 3-4 La cas de la température non nulle

Dans tout ce qui précède, nous avons considéré le cas d'un système à température nulle et nous avons exprimé le contact en fonction de l'énergie de l'état fondamental du système. En fait, la démarche que nous avons décrite pour l'état fondamental peut être effectuée pour tout état propre  $\Phi_j$  de l'hamiltonien du système à  $N$  corps, pourvu que son énergie soit suffisamment basse pour que les interactions restent limitées à l'onde  $s$ . Cela garantit en effet que la fonction de corrélation à deux corps déduite de  $\Phi_j$  se comporte comme indiqué en (21,25).

Commençons par définir un contact  $C_j$  pour chaque état propre  $\Phi_j$  d'énergie  $E_j$  comme [cf. (45-47)]

$$C_j = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E_j}{\partial(1/a)} \right)_{N, L^3} \quad (64)$$

avec le facteur 4 (resp. 8) pour des fermions (resp. bosons). Supposons maintenant que le système est dans un mélange statistique d'états propres,

avec un opérateur densité

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j |\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|, \quad (65)$$

les  $P_j$  obéissant par exemple à la loi de Boltzmann  $P_j \propto e^{-E_j/k_B T}$  pour une température  $T$ . Nous pouvons définir un contact moyenné sur les  $P_j$  :

$$C = \sum_j P_j C_j \quad (66)$$

et ce contact permettra de calculer toutes les quantités auxquelles nous nous sommes intéressés jusqu'ici, comme la distribution en impulsion, la fonction de corrélation à deux corps ou encore le spectre radio-fréquence que nous aborderons un peu plus loin. En effet, le contact intervient de manière linéaire dans ces expressions.

En insérant l'expression de chaque  $C_j$  dans (66), nous trouvons donc

$$C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{N,L^3,\{P_j\}} \quad \text{avec} \quad E = \sum_j P_j E_j. \quad (67)$$

La dérivée définissant le contact moyen doit être prise en gardant constantes les populations de chaque état propre  $\Phi_j$ , ce qui constitue la définition d'un processus adiabatique en thermodynamique quantique. On peut donc remplacer la définition précédente de  $C$  par une formulation plus conventionnelle, faisant intervenir la dérivée à entropie constante de l'énergie moyenne du système :

$$\text{fermions/bosons :} \quad C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{N,L^3,S} \quad (68)$$

On peut également travailler à  $T$  et  $N$  constants, ce qui revient à remplacer l'énergie moyenne  $E$  par l'énergie libre  $F = E - TS$  :

$$\text{fermions/bosons :} \quad C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial F}{\partial(1/a)} \right)_{N,L^3,T} \quad (69)$$

ou encore à  $T$  et  $\mu$  constants, et utiliser le grand potentiel  $\Omega$  :

$$\text{fermions/bosons :} \quad C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial(1/a)} \right)_{\mu,L^3,T} \quad (70)$$

Remarquons que dans ce dernier cas, on sait que pour un système extensif, le grand potentiel est relié au volume et à la pression par la relation simple  $\Omega = -PV$ , de sorte que le contact par unité de volume s'écrit :

$$\text{fermions/bosons :} \quad C = \frac{C}{V} = \frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial P}{\partial(1/a)} \right)_{\mu,T} \quad (71)$$

Cette série de relation est remarquable puisqu'elle vient relier de nombreux paramètres microscopiques comme  $n_\sigma(k)$  ou  $G_2(r)$  à la thermodynamique du système, et cela alors même qu'il est (à l'heure actuelle) impossible de calculer l'équation d'état d'un système en interaction à toute température et pour une longueur de diffusion arbitraire.

Pour terminer ce paragraphe, indiquons que le contact, comme les autres quantités thermodynamiques, peut être calculé par un développement du viriel dans le régime faiblement dégénéré. On pourra consulter à ce sujet l'article de LIU (2013) et les références qu'il indique.

### 3-5 Contact et théorème du viriel

En utilisant l'analyse dimensionnelle, il est possible d'obtenir des relations entre les différentes quantités thermodynamiques comme l'énergie interne, la pression et le contact. Considérons par exemple l'entropie du système, qui est une fonction d'état dont la différentielle s'écrit

$$\text{fermions/bosons :} \quad dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dL^3 - \frac{\mu}{T}dN + \frac{\hbar^2 C}{[4/8]\pi m T}d(1/a). \quad (72)$$

L'entropie peut se mettre sous la forme  $S = Nk_B f(E, L^3, N, a)$  où la fonction  $f$  est sans dimension et intensive. On peut simplifier notablement son écriture :

— Comme  $f$  est intensive, seules les trois variables intensives  $E/N$ ,  $V/N$  et  $a$  doivent intervenir :

$$S = Nk_B f \left( \frac{E}{N}, \frac{L^3}{N}, a \right). \quad (73)$$

— Comme  $f$  est sans dimension, on doit pouvoir choisir ses variables également sans dimension. La longueur de diffusion  $a$  fournit une

unité naturelle d'énergie,  $\hbar^2/ma^2$ , et une unité naturelle de volume  $a^3$ . On peut donc écrire l'entropie  $S$  comme

$$S = Nk_B f \left( \frac{E/N}{\hbar^2/ma^2}, \frac{L^3/N}{a^3} \right). \quad (74)$$

Une telle écriture, fonction de deux variables seulement, va nous permettre d'établir une relation entre les trois variables conjuguées de  $E$ ,  $L^3$  et  $a$ , c'est-à-dire  $T$ ,  $P$  et le contact  $C$ . On a en effet :

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{L^3, N, a} = Nk_B \frac{ma^2}{N\hbar^2} \partial_1 f \quad (75)$$

où  $\partial_1 f$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à sa première variable,

$$\frac{P}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial L^3} \right)_{E, N, a} = Nk_B \frac{1}{Na^3} \partial_2 f \quad (76)$$

et

$$\frac{\hbar^2 C}{[4/8]\pi m T} = \left( \frac{\partial S}{\partial(1/a)} \right)_{E, L^3, N} = -2Nk_B \frac{Ema^3}{N\hbar^2} \partial_1 f + 3Nk_B \frac{L^3}{Na^2} \partial_2 f. \quad (77)$$

L'élimination de  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$  entre les trois équations qui précèdent conduit alors à (TAN 2008c) :

fermions/bosons :  $PL^3 = \frac{2}{3}E + \frac{\hbar^2 C}{[12/24]\pi ma}.$

(78)

On pourra consulter l'article de WERNER (2008) pour une généralisation de cette relation au cas d'un gaz confiné dans un potentiel de forme arbitraire.

**Cas unitaire.** Dans le cas  $a \rightarrow \infty$ , le contact tend vers une valeur finie de sorte qu'on trouve

Gaz unitaire :  $PL^3 = \frac{2}{3}E.$

(79)

Cette relation remarquable est une conséquence de l'invariance d'échelle pour  $a$  infinie : les échelles d'énergie  $\hbar^2/ma^2$  et de volume  $a^3$  disparaissent,

de sorte que l'équation d'état donnant l'entropie  $S$  (ou n'importe quelle autre fonction thermodynamique) n'est une fonction que d'une seule variable :

$$S = Nk_B f \left( \frac{EmL^2}{\hbar^2 N^{5/3}} \right). \quad (80)$$

La relation (79) s'en déduit en utilisant :

$$\frac{1}{T} = \frac{k_B mL^2}{\hbar^2 N^{2/3}} f' \quad \frac{P}{T} = \frac{2}{3} \frac{k_B Em}{\hbar^2 N^{2/3} L} f'. \quad (81)$$

où  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ .

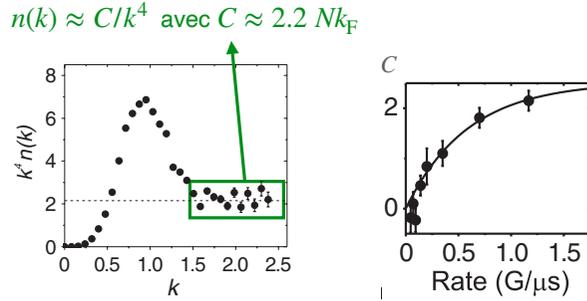
## 4 Premières mesures du contact

### 4-1 Distribution en impulsion d'un gaz de Fermi

Les expériences menées à Boulder dans la période 2010-12 ont montré de manière très convaincante le fait que le contact permettait de relier entre elles les mesures de quantités variées, faites sur des systèmes complexes comme le gaz de Fermi autour de la limite unitaire ou le gaz de Bose en interaction forte (STEWART, GAEBLER et al. 2010; SAGI, DRAKE et al. 2012; WILD, MAKOTYN et al. 2012). Nous allons nous concentrer ici sur les résultats obtenus sur le gaz de Fermi.

Les expériences décrites par STEWART, GAEBLER et al. (2010) ont été menées sur un gaz de potassium 40 (un fermion), préparé dans un mélange équilibré de ses deux états Zeeman de plus basse énergie,  $|\downarrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -9/2\rangle$  et  $|\uparrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -7/2\rangle$ . Le gaz contient  $N = 2 \cdot 10^5$  atomes au total, il est confiné dans un piège lumineux et refroidi par évaporation à une température  $T = 0.11 T_F$  avec  $k_B T_F = E_F$ . À la fin de l'évaporation, la force des interactions entre les deux états de spin est ajustée à la valeur désirée en modifiant lentement le champ magnétique extérieur grâce à une résonance de Fano-Feshbach.

Intéressons-nous ici à la mesure de la distribution en impulsion. Une fois que le régime stationnaire était atteint pour la longueur de diffusion souhaitée, STEWART, GAEBLER et al. (2010) ont basculé très rapidement le



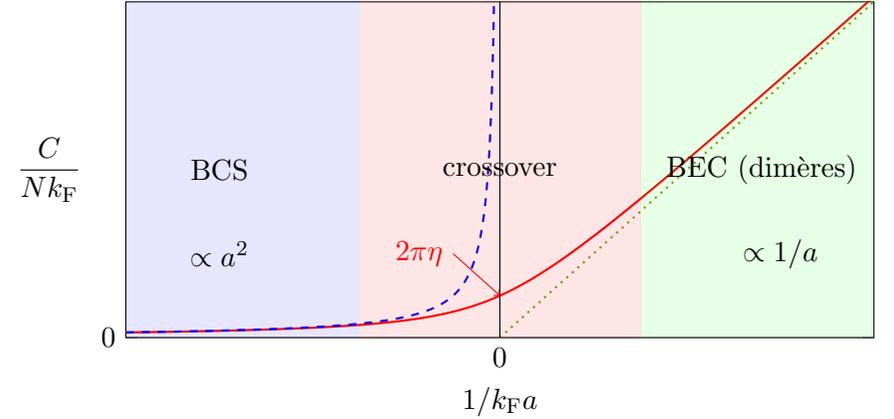
**FIGURE 9.** Gauche : variation de  $k^4 n(k)$  en fonction de  $k$  pour  $(k_F a)^{-1} = -0.08$  (4). Le plateau aux grandes valeurs de  $k$  permet d'extraire la valeur du contact  $C$  pour cette valeur de  $a$ . La figure de droite montre l'importance d'avoir une bascule très rapide de la longueur de diffusion depuis la valeur d'intérêt jusqu'à la valeur nulle utilisée pour le temps de vol. Pour les mesures données sur la figure de gauche, cette bascule est effectuée avec un taux de  $1.4 \text{ G}/\mu\text{s}$ . Figures extraites de STEWART, GAEBLER et al. (2010).

champ magnétique vers la valeur pour laquelle  $a = 0$ , puis mesuré l'étalement du nuage atomique dans un temps de vol. Comme l'énergie d'interaction est nulle pendant le temps de vol, cet étalement donne accès à la distribution en impulsion initiale. Il est essentiel que la modification du champ magnétique soit très rapide, pour éviter une conversion significative de l'énergie d'interaction initiale en énergie cinétique supplémentaire. Les résultats de cette mesure d'impulsion sont montrés en figure 9. On constate que l'aile varie effectivement comme  $k^{-4}$ , et on obtient ainsi une première détermination du contact proche de résonance  $C \approx 2.2 Nk_F$ .

Nous reviendrons au chapitre suivant sur d'autres caractérisations du contact faites par le groupe de Boulder, une fois que nous aurons décrit un autre outil d'étude, la spectroscopie radio-fréquence.

## 4-2 Lois d'échelle pour le contact

Dans le cas d'un gaz de Fermi à deux composantes, on peut donner quelques éléments sur la valeur du contact dans les régimes asymptotiques. Nous allons distinguer les trois cas rencontrés successivement



**FIGURE 10.** Variation "schématique" du contact  $C$  avec la longueur de diffusion pour un gaz de Fermi à deux composantes. Le trait en pointillé montre la prédiction (86) pour une longueur de diffusion  $a$  petite et positive, le gaz consistant alors en une assemblée de dimères. Le trait en tirets bleus représente la prédiction (83) pour la limite BCS, pour une longueur de diffusion  $a$  négative et petite en valeur absolue. Le but de la courbe en trait continu rouge est simplement de donner une idée de la variation de  $C/Nk_F$  dans les différents régimes de valeurs de  $k_F a$ , mais elle ne fournit pas de valeur précise.

quand on balaye une résonance de Fano-Feshbach. Nous nous limitons ici au cas de la température nulle (figure 10) de sorte que toutes les phases envisagées ci-dessous sont superfluides.

- Du côté  $a < 0$  et relativement loin de la résonance, on trouve le régime BCS avec  $k_F |a| \ll 1$ . L'énergie d'interaction dans l'état fondamental se calcule simplement dans une approche champ moyen <sup>4</sup>

$$E_{\text{int}} \approx \frac{1}{L^3} \left( \frac{N}{2} \right)^2 \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (82)$$

<sup>4</sup> Les corrections issues de la théorie BCS sont exponentiellement petites et sont donc négligées ici.

ce qui conduit pour ce régime à :

$$a < 0 : \quad C \approx 4\pi^2 a^2 n N \Leftrightarrow \frac{C}{Nk_F} \approx \frac{4}{3} (k_F a)^2 \quad (83)$$

On retrouve un résultat similaire à celui de l'approche de Bogoliubov pour des bosons (31), à un facteur 4 près.

- À résonance, c'est-à-dire au seuil d'apparition de l'état lié à deux corps, la longueur de diffusion devient infinie. Il n'y a alors plus d'échelle de longueur associée aux interactions et on trouve la situation invariante d'échelle mentionnée plus haut ; par simple analyse dimensionnelle et dans le cas  $T = 0$ , on s'attend à ce que l'énergie en ce point s'écrive  $E = \frac{3}{5} N E_F \xi$  où  $\xi$  est un paramètre sans dimension (universel) qui doit être calculé numériquement ou mesuré expérimentalement. Au voisinage de ce point, on attend une première correction linéaire en  $1/a$  et l'énergie doit se mettre sous la forme (toujours par analyse dimensionnelle) :

$$E \approx N E_F \left( \frac{3}{5} \xi - \frac{\eta}{k_F a} \right) \quad (84)$$

où  $\eta$  est un autre paramètre universel sans dimension. Le contact vaut alors

$$a = \pm\infty : \quad \frac{C}{Nk_F} = 2\pi\eta \quad (85)$$

Il n'y a pas d'expression analytique connue pour ce coefficient  $\eta$  et sa détermination théorique est un problème théorique ardu. En pratique, un calcul numérique (Monte Carlo quantique) donne  $2\pi\eta = 2.95$  (10) (DRUT, LÄHDE et al. 2011), en bon accord avec les résultats expérimentaux de LAURENT, PIERCE et al. (2017) que nous discuterons au chapitre suivant, et ceux encore plus récents de MUKHERJEE, PATEL et al. (2019) et CARCY, HOINKA et al. (2019).

- Dans le cas où l'état lié à deux corps est apparu<sup>5</sup>, la longueur de diffusion  $a$  est positive. Cet état lié concerne un atome  $\uparrow$  et un atome  $\downarrow$ , et il a pour énergie  $\approx -\hbar^2/(ma^2)$ . Comme le nombre d'atomes est

supposé ici être le même pour les deux états de spin, le gaz contient  $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$  dimères et l'énergie de son état fondamental vaut  $E = -N\hbar^2/(2ma^2)$ , ce qui conduit à :

$$a > 0 : \quad C \approx \frac{4\pi}{a} N \Leftrightarrow \frac{C}{Nk_F} \approx \frac{4\pi}{k_F a} \quad (86)$$

La contribution de l'interaction dimère-dimère, caractérisée par la longueur de diffusion  $a_{dd} \approx 0.6 a$  (PETROV, SALOMON et al. 2004), s'écrit dans l'approximation du champ moyen

$$E_{dd} = \frac{\pi\hbar^2 a_{dd}}{4m} n N \quad (87)$$

et sa contribution au contact est d'ordre supérieur à ce qui est donné en (86).

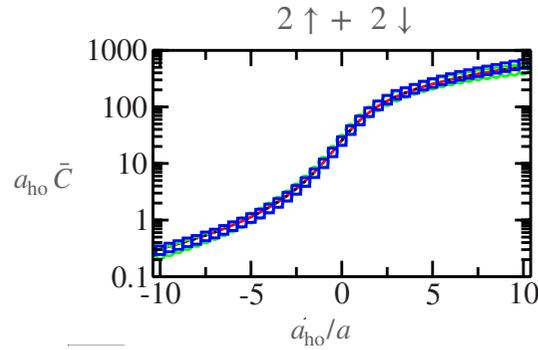
### 4-3 Études numériques

Pour tester numériquement les prédictions que nous avons décrites, BLUME & DAILY (2009) et YIN & BLUME (2015) ont calculé numériquement l'énergie et les distributions en position et en impulsion d'un petit nombre de particules confinées dans un piège harmonique isotrope. L'article initial de BLUME & DAILY (2009) portait sur  $N = 4$  particules, 2 en  $\uparrow$  et 2 en  $\downarrow$ . YIN & BLUME (2015) ont ensuite pu mener les calculs jusqu'à  $N = 10$ .

Le potentiel de confinement harmonique de pulsation  $\omega$  fournit l'échelle de longueur naturelle pour le problème,  $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ . Pour ces calculs, le potentiel d'interaction entre deux atomes est choisi gaussien de portée  $b$  :  $V(r) = -V_0 e^{-r^2/2b^2}$  avec  $V_0 > 0$ . Pour une valeur donnée de la portée  $b$ , la profondeur  $V_0$  est ajustée pour être proche d'une résonance à énergie nulle ; rappelons qu'il s'agit du point où un état lié est sur le point d'apparaître ou vient d'apparaître, la longueur de diffusion  $a$  divergeant en ce point. La portée  $b$  est choisie petite devant  $a_{ho}$ , avec typiquement  $b/a_{ho} = 10^{-2}$  à  $10^{-1}$ . La limite du pseudo-potentiel est obtenue en prenant la limite  $b \rightarrow 0$ , pour une longueur de diffusion  $a$  constante.

BLUME & DAILY (2009) ont vérifié numériquement que les différentes manières de calculer le contact, à partir de (i) l'énergie totale, (ii) la fonction

5. Nous admettons ici qu'il n'ya pas formation d'agrégats plus gros que ces dimères, voir par exemple PETROV (2003) et CASTIN, MORA et al. (2010) et ENDO & CASTIN (2015).



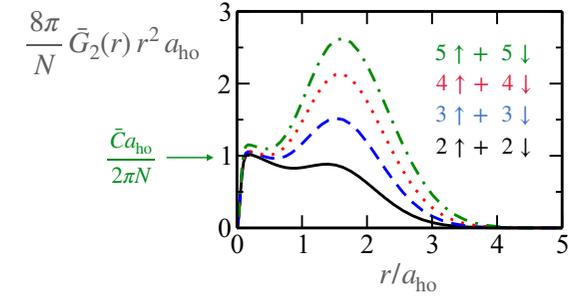
**FIGURE 11.** Variation du contact avec  $1/a$  calculée par BLUME & DAILY (2009). La ligne continue rouge représente la valeur déduite de la dérivée de l'énergie totale par rapport à  $1/a$  [eq. (47)]. Les valeurs indiquées par des cercles verts [resp. carrés bleus] sont obtenues à partir de la distribution de paires  $G_2(r)$  [resp. la distribution en impulsion  $n(k)$ ]. La variation de  $C$  avec  $1/a$  est conforme à ce que nous avons montré en figure 10.

de corrélation spatiale à deux corps et (iii) de la distribution en impulsion conduisaient à des valeurs très proches de  $C$ . Les différents résultats sont reportés en figure 11. BLUME & DAILY (2009) ont également testé numériquement le théorème du viriel généralisé démontré par WERNER (2008), qui donne accès à la valeur du contact.

YIN & BLUME (2015) ont élargi ce calcul à un nombre de particules pouvant aller jusqu'à  $N = 10$ . Cela permet d'avoir une première intuition de ce que serait la limite thermodynamique pour ce système. Nous avons reporté sur la figure 12 les résultats obtenus pour la fonction  $r^2 G_2(r)/N$  pour  $N = 4, 6, 8$  et  $10$  dans le régime unitaire  $a = \infty$ . On constate que les courbes obtenues pour différentes valeurs de  $N$  se regroupent entre elles dans le domaine de distance  $b \lesssim r \ll a_{\text{ho}}$  (avec ici  $b = 0.06 a_{\text{ho}}$ ), comme attendu.

#### 4-4 Résonance de Fano–Feshbach et fraction moléculaire

Comme expliqué en détail dans le cours de l'an passé, les résonances de Fano–Feshbach sont un outil extrêmement puissant pour modifier la lon-



**FIGURE 12.** Fonction  $r^2 G_2(r)/N$  donnant la corrélation spatiale de paires  $\uparrow\downarrow$  à la limite unitaire  $a = \infty$  pour différents nombres de particules. Figure extraite de YIN & BLUME (2015).

gueur de diffusion décrivant la collision en onde  $s$  de deux atomes. Nous partons d'un gaz d'atomes d'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{at}}$  conduisant à la longueur de diffusion  $a_{\text{bg}}$ . Nous supposons qu'en plus des interactions standard décrites par  $a_{\text{bg}}$ , une paire d'atomes entrant en collision (canal "ouvert") peut former de manière temporaire un état  $|\phi_0\rangle$  d'un canal fermé, correspondant à une molécule di-atomique, avant de se séparer (figure 13). L'énergie de  $|\phi_0\rangle$  peut être ajustée par rapport à la référence d'énergie  $E = 0$  du canal ouvert en variant par exemple le champ magnétique  $B$  ambiant.

On suppose connue la loi donnant la longueur de diffusion  $a(B)$ , loi généralement mise sous la forme :

$$a(B) = a_{\text{bg}} \left( 1 - \frac{B_1}{B - B_0} \right), \quad (88)$$

qui traduit un comportement résonnant autour de  $B = B_0$ . Quand  $|B - B_0| \gg B_1$ , le couplage entre le canal ouvert et le canal fermé n'a plus d'effet significatif et la longueur de diffusion reprend sa valeur de fond  $a_{\text{bg}}$ . La loi (88) est donnée par la résolution du problème à deux corps (cf. cours 2021) et on cherche à relier cette loi à la valeur du contact  $C$  (WERNER, TARRUELL et al. 2009).

Pour un gaz d'atomes de spin  $1/2$ , l'hamiltonien décrivant le gaz peut

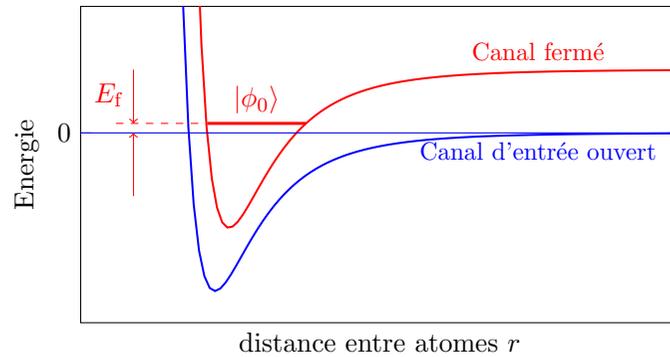


FIGURE 13. Principe d'une résonance de Fano-Feshbach.

se mettre sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{at}} + \sum_{\mathbf{K}} \left( \frac{\hbar^2 K^2}{4m} + E_{\text{dim}}(B) \right) b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} + \hat{V}_{\text{at,dim}} \quad (89)$$

où  $b_{\mathbf{K}}^\dagger$  crée une molécule  $|\phi_0\rangle$  d'impulsion  $\hbar\mathbf{K}$  et de masse  $2m$ .

Plaçons-nous à température nulle pour simplifier et notons  $E$  l'énergie de l'état fondamental du gaz. Considérons la dérivée  $\frac{\partial E}{\partial B}$  prise à volume et nombre de particules constants. Le théorème de Hellmann-Feynman donne

$$\frac{\partial E}{\partial B} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial B} \right\rangle = \mu \langle N_{\phi_0} \rangle \quad (90)$$

où  $\mu = \frac{dE_{\text{dim}}}{dB}$  représente le moment magnétique<sup>6</sup> de  $|\phi_0\rangle$  et où  $N_{\phi_0} = \sum_{\mathbf{K}} b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}}$  est l'opérateur donnant le nombre de molécules  $|\phi_0\rangle$  présentes. Par ailleurs, cette dérivée peut être reliée au contact puisque

$$\frac{\partial E}{\partial B} = \frac{\partial E}{\partial a} \frac{da}{dB} = \frac{\hbar^2 C}{4\pi m a^2} \frac{da}{dB} \quad (91)$$

la quantité  $\frac{da}{dB}$  se déduisant directement de (88). On obtient ainsi la relation

6. On a supposé ici implicitement que le moment magnétique des atomes libres était nul. Si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer dans ce qui suit  $\mu$  par  $\delta\mu$ , c'est-à-dire la différence entre le moment magnétique de  $|\phi_0\rangle$  et celui de la paire d'atomes du canal ouvert.

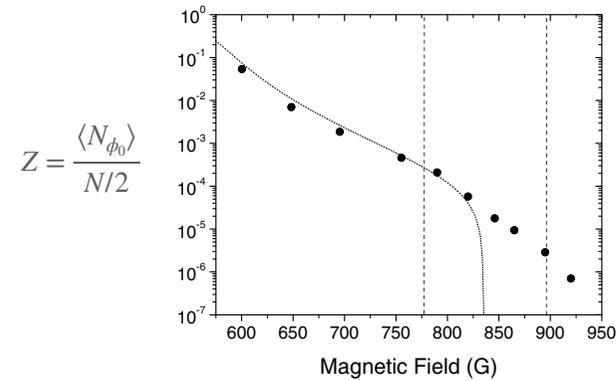


FIGURE 14. Variation de la fraction  $Z$  de molécules du canal fermé  $|\phi_0\rangle$  dans un gaz de  ${}^6\text{Li}$  autour de la résonance de Fano-Feshbach située à  $B_0 = 834$  G. Le régime de condensat de dimères faiblement liés correspond à la région  $B < B_0$ . Figure extraite de PARTRIDGE, STRECKER et al. (2005)

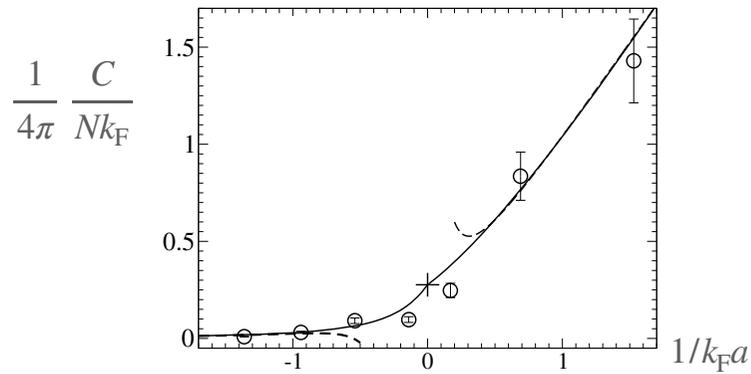
recherchée entre population de l'état dimère et contact :

$$\langle N_{\phi_0} \rangle = \frac{\hbar^2}{4\pi m a^2 \mu} \frac{da}{dB} C \quad (92)$$

Ce résultat, dû à WERNER, TARRUELL et al. (2009), se généralise au cas de la température non nulle, la dérivée de l'énergie du gaz étant dans ce cas prise à entropie constante. Il a été testé par WERNER, TARRUELL et al. (2009) sur les résultats expérimentaux obtenus par PARTRIDGE, STRECKER et al. (2005) (groupe de Rice University) bien avant que la théorie ne soit développée.

L'expérience de Rice avait été menée sur un gaz de  ${}^6\text{Li}$ , préparé initialement dans le régime de dimères faiblement liés d'énergie  $\sim -\hbar^2/ma^2$ , en se plaçant sur le côté  $a > 0$  de la résonance de Fano-Feshbach située à  $B = 834$  G. Rappelons que pour une résonance de Fano-Feshbach large, un dimère d'énergie  $-\hbar^2/ma^2$  n'a qu'un faible recouvrement avec l'état moléculaire  $|\phi_0\rangle$  du canal fermé : la principale contribution à ce dimère vient du canal ouvert.

On balaye ensuite lentement le champ magnétique pour amener le gaz



**FIGURE 15.** Points : données de PARTRIDGE, STRECKER *et al.* (2005) réexprimées en fonction du contact par l'intermédiaire de (92). Courbe continue : prédiction pour la variation du contact avec  $1/a$  pour un gaz de Fermi de spin  $1/2$ . Figure extraite de WERNER, TARRUELL *et al.* (2009).

dans le régime que l'on souhaite étudier. On mesure la fraction d'atomes dans le canal "fermé" de la résonance de Feshbach, l'état moléculaire  $|\phi_0\rangle$ , grâce à un laser qui porte cette molécule dans un état excité. Il en résulte un processus d'émission spontanée de photons et une perte de particules que l'on détecte.

Les résultats de cette mesure de la fraction  $Z = 2\langle N_{\phi_0} \rangle / N$  d'atomes dans l'état moléculaire  $|\phi_0\rangle$  sont montrés en figure 14. On constate que cette fraction est toujours petite devant 1, comme attendu pour une résonance de Fano–Feshbach large. WERNER, TARRUELL *et al.* (2009) ont utilisé ces données pour en déduire la valeur du contact grâce à (92). Le résultat est montré en figure 15 : l'accord entre les données de PARTRIDGE, STRECKER *et al.* (2005) et la modélisation théorique est remarquable.

## Références

- BAYM, Gordon, CJ PETHICK, Zhenhua YU & Martin W ZWIERLEIN (2007), « Coherence and clock shifts in ultracold Fermi gases with resonant interactions », in *Physical review letters* **99**, p. 190407.
- BLUME, D. & K. M. DAILY (2009), « Universal relations for a trapped four-fermion system with arbitrary  $s$ -wave scattering length », in *Phys. Rev. A* **80**, p. 053626.
- BRAATEN, Eric (2011), « Universal Relations for Fermions with Large Scattering Length », in *BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, sous la dir. de Wilhelm ZWERGER, Springer.
- BRAATEN, Eric, Daekyoung KANG & Lucas PLATTER (2010), « Short-Time Operator Product Expansion for rf Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **104**, p. 223004.
- BRAATEN, Eric & Lucas PLATTER (2008), « Exact Relations for a Strongly Interacting Fermi Gas from the Operator Product Expansion » en, in *Physical Review Letters* **100**, p. 205301.
- BRODSKY, I. V., M. Yu. KAGAN, A. V. KLAPTSOV, R. COMBESCOT & X. LEYRONAS (2006), « Exact diagrammatic approach for dimer-dimer scattering and bound states of three and four resonantly interacting particles », in *Phys. Rev. A* **73**, p. 032724.
- CARCY, C., S. HOINKA, M. G. LINGHAM, P. DYKE, C. C. N. KUHN, H. HU & C. J. VALE (2019), « Contact and Sum Rules in a Near-Uniform Fermi Gas at Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* **122**, p. 203401.
- CASTIN, Yvan, Christophe MORA & Ludovic PRICOUPEENKO (2010), « Four-Body Efimov Effect for Three Fermions and a Lighter Particle », in *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 223201.
- COMBESCOT, R., F. ALZETTO & X. LEYRONAS (2009), « Particle distribution tail and related energy formula », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 053640.
- DRUT, Joaquín E., Timo A. LÄHDE & Timour TEN (2011), « Momentum Distribution and Contact of the Unitary Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 205302.
- ENDO, Shimpei & Yvan CASTIN (2015), « Absence of a four-body Efimov effect in the  $2 + 2$  fermionic problem », in *Phys. Rev. A* **92**, p. 053624.
- FLETCHER, Richard J, Raphael LOPES, Jay MAN, Nir NAVON, Robert P SMITH, Martin W ZWIERLEIN & Zoran HADZIBABIC (2017), « Two-and three-body contacts in the unitary Bose gas », in *Science* **355**, p. 377-380.

- HAUSSMANN, R. (1994), « Properties of a Fermi liquid at the superfluid transition in the crossover region between BCS superconductivity and Bose-Einstein condensation », in *Phys. Rev. B* **49**, p. 12975-12983.
- LAURENT, Sébastien, Matthieu PIERCE, Marion DELEHAYE, Tarik YEFSAH, Frédéric CHEVY & Christophe SALOMON (2017), « Connecting Few-Body Inelastic Decay to Quantum Correlations in a Many-Body System : A Weakly Coupled Impurity in a Resonant Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **118**, p. 103403.
- LIU, Xia-Ji (2013), « Virial expansion for a strongly correlated Fermi system and its application to ultracold atomic Fermi gases », in *Physics Reports* **524**, p. 37-83.
- MINGUZZI, A., P. VIGNOLO & M.P. TOSI (2002), « High-momentum tail in the Tonks gas under harmonic confinement », in *Physics Letters A* **294**, p. 222-226.
- MUKHERJEE, Biswaroop, Parth B. PATEL, Zhenjie YAN, Richard J. FLETCHER, Julian STRUCK & Martin W. ZWIERLEIN (2019), « Spectral Response and Contact of the Unitary Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **122**, p. 203402.
- NAIDON, Pascal & Shimpei ENDO (2017), « Efimov physics : a review », in *Reports on Progress in Physics* **80**, p. 056001.
- OLSHANII, Maxim & Vanja DUNJKO (2003), « Short-Distance Correlation Properties of the Lieb-Liniger System and Momentum Distributions of Trapped One-Dimensional Atomic Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **91**, p. 090401.
- PARTRIDGE, G. B., K. E. STRECKER, R. I. KAMAR, M. W. JACK & R. G. HULET (2005), « Molecular Probe of Pairing in the BEC-BCS Crossover », in *Phys. Rev. Lett.* **95**, p. 020404.
- PETROV, D. S. (2003), « Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction », in *Physical Review A* **67**, p. 010703.
- (2004), « Three-Boson Problem near a Narrow Feshbach Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* **93**, p. 143201.
- PETROV, D. S., C. SALOMON & G. V. SHLYAPNIKOV (2004), « Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* **93**, p. 090404.
- PUNK, M & W ZWERGER (2007), « Theory of rf-spectroscopy of strongly interacting fermions », in *Physical review letters* **99**, p. 170404.
- SAGI, Yoav, Tara E DRAKE, Rabin PAUDEL & Deborah S JIN (2012), « Measurement of the homogeneous contact of a unitary Fermi gas », in *Physical review letters* **109**, p. 220402.
- SHI, Hao, Simone CHIESA & Shiwei ZHANG (2015), « Ground-state properties of strongly interacting Fermi gases in two dimensions », in *Phys. Rev. A* **92**, p. 033603.
- STEWART, JT, JP GAEBLER, TE DRAKE & DS JIN (2010), « Verification of universal relations in a strongly interacting Fermi gas », in *Physical Review Letters* **104**, p. 235301.
- TAN, Shina (2008a), « Energetics of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* **323**, p. 2952-2970.
- (2008b), « Generalized virial theorem and pressure relation for a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* **323**, p. 2987-2990.
- (2008c), « Large momentum part of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* **323**, p. 2971-2986.
- WERNER, F., L. TARRUELL & Y. CASTIN (2009), « Number of closed-channel molecules in the BEC-BCS crossover », in *The European Physical Journal B* **68**, p. 401-415.
- WERNER, Félix (2008), « Virial theorems for trapped cold atoms », in *Physical Review A* **78**, p. 025601.
- WERNER, Félix & Yvan CASTIN (2012a), « General relations for quantum gases in two and three dimensions. II. Bosons and mixtures », in *Physical Review A* **86**, p. 053633.
- (2012b), « General relations for quantum gases in two and three dimensions : Two-component fermions », in *Physical Review A* **86**, p. 013626.
- WILD, RJ, P MAKOTYN, JM PINO, EA CORNELL & DS JIN (2012), « Measurements of Tan's contact in an atomic Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* **108**, p. 145305.
- YIN, XY & D BLUME (2015), « Trapped unitary two-component Fermi gases with up to ten particles », in *Physical Review A* **92**, p. 013608.
- YU, Zhenhua, Georg M. BRUUN & Gordon BAYM (2009), « Short-range correlations and entropy in ultracold-atom Fermi gases », in *Phys. Rev. A* **80**, p. 023615.
- ZHANG, Shizhong & Anthony J. LEGGETT (2009), « Universal properties of the ultracold Fermi gas », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 023601.
- ZWERGER, Wilhelm, éd. (2012), *The BCS-BEC crossover and the unitary fermi gasen*, Lecture notes in physics, OCLC : 844865150, Heidelberg : Springer.