

# Chaire Atomes et rayonnement

Cours 2021-22

Jean Dalibard



COLLÈGE  
DE FRANCE  
—1530—

# Prochains séminaires

---

Vendredi 8 avril : Atac Imamoglu, Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, Suisse  
*Strongly correlated electrons in atomically thin semiconductors*

Vendredi 15 avril : Leticia Tarruell, ICFO - The Institute of Photonic Sciences, Barcelone, Espagne  
*Realizing a one-dimensional topological gauge theory in an optically dressed Bose-Einstein condensate*

Vendredi 15 avril, 14h00-18h00 : atelier “**New trends in quantum fluid physics: mixtures and spinor gases**”

**Intervenants :**

**Bruno Laburthe-Tolra, Lauriane Chomaz, Goulven Quemener, Jérôme Beugnon, Thomas Bourdel, Alessandro Zenesini**

<https://www.college-de-france.fr/site/jean-dalibard/symposium-2021-2022.htm>

# Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques

## Cours 5

### Le contact à deux corps

Jean Dalibard  
Chaire *Atomes et rayonnement*  
Année 2021-22

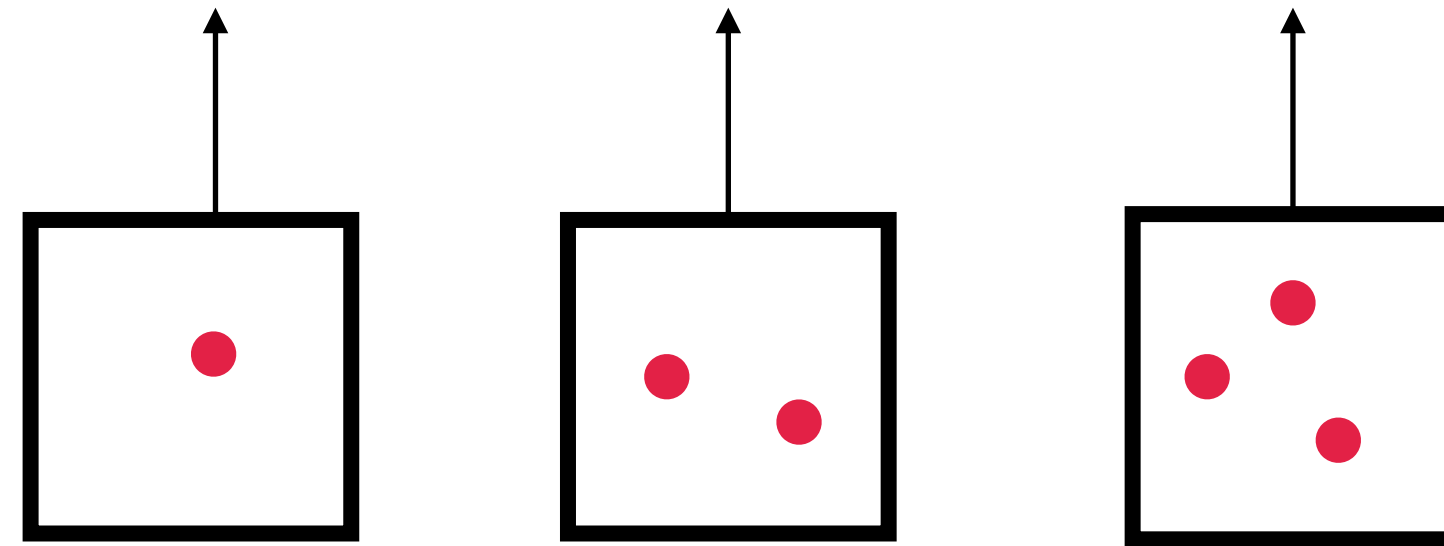


COLLÈGE  
DE FRANCE  
—1530—

# Le lien “2 corps” — “N corps”

Pour un gaz faiblement dégénéré, développement du viriel

$$\frac{P}{k_B T / \lambda^3} = b_1(T) z + b_2(T) z^2 + b_3(T) z^3 + \dots$$



Pour le gaz de Bose à température proche de 0, approche de Bogoliubov si  $na^3 \ll 1$

*Résultats exprimés en fonction de la longueur de diffusion  $a$  du problème à deux corps*

*Déplétion quantique, énergie du fondamental, spectre d'excitation*

**Que peut-on dire au-delà des domaines de validité de ces deux approches ?**

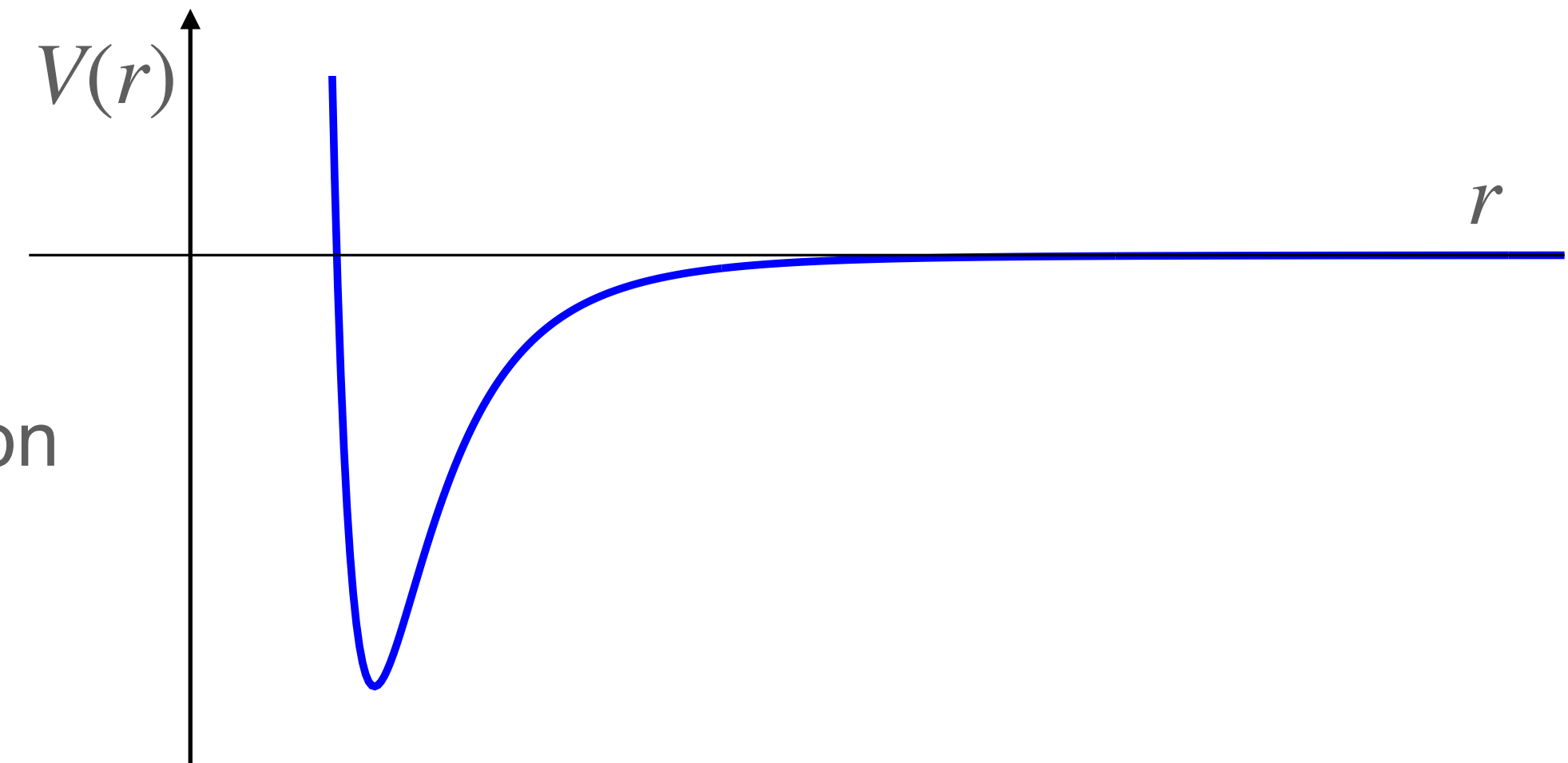
# Les échelles de longueur du problème

Pour le problème à deux corps

Portée du potentiel  $b \sim R_{\text{vdW}}$  : quelques nanomètres

Longueur de diffusion  $a$  ajustable par une résonance de diffusion

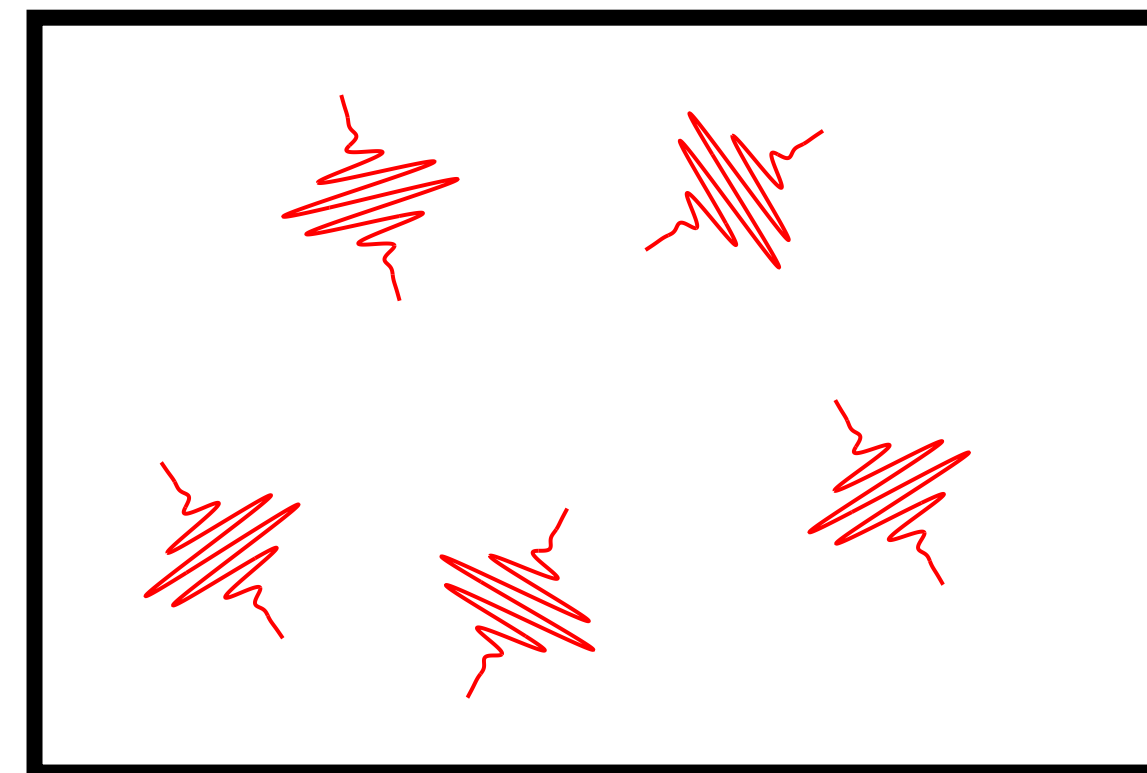
$$a \sim b \longrightarrow |a| \sim 100 b$$



Pour le problème à  $N$  corps

Distance entre particules  $d = n^{-1/3}$  ( $n$  : densité spatiale)

Longueur d'onde thermique  $\lambda = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\text{B}}T} \right)^{1/2}$



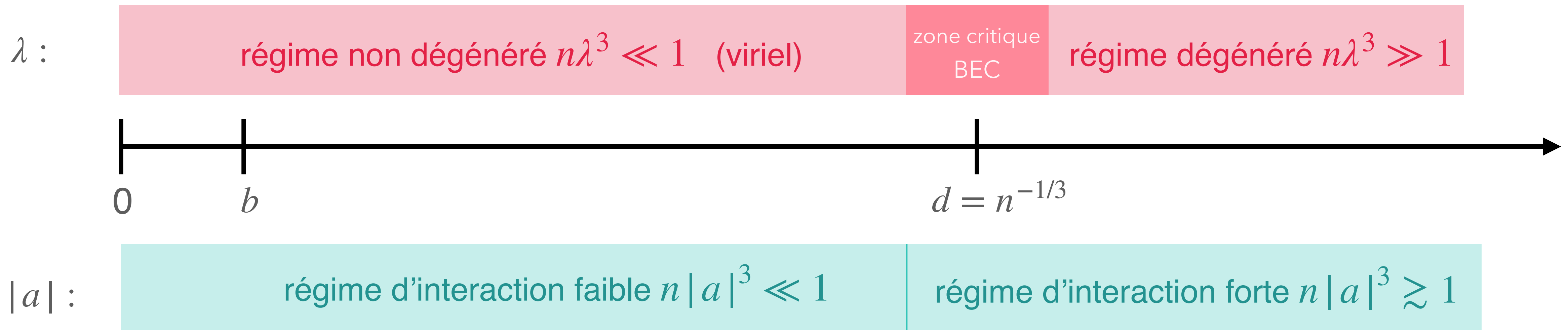
# Les échelles de longueur du problème (2)

Deux corps :  $a, b$        $N$  corps :  $d = n^{-1/3}, \lambda$

On considère toujours des systèmes dilués :  $b \ll d \Leftrightarrow nb^3 \ll 1$

$b$  : qqs nanomètres

$d$  : qqs centaines de nanomètres ( $n : 10^{12} - 10^{15}$  at/cm<sup>3</sup>)



# But des deux prochains cours

---

Etablir des relations entre différents paramètres du système, même sans description analytique

- Valables aussi bien pour  $na^3 \ll 1$  que pour  $na^3 \gtrsim 1$
- Distribution en impulsion (observable à un corps) : loi en  $1/k^4$  aux grands  $k$
- Fonction de corrélation  $g_2(r)$  (observable à deux corps) : loi en  $1/r^2$  aux petits  $r$
- Potentiels thermodynamiques
- Réponse linéaire du fluide, spectroscopie radiofréquence par exemple : loi en  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$

Tan (2005-08), Baym, Pethick et al. (2007), Punk & Zwerger (2007), Braaten & Platter (2008), Werner-Tarruell-Castin (2009)  
Zhang & Leggett (2009), Combescot, Alzetto et al (2009), Braaten, Kang et al (2010), Werner & Castin (2012)

# Plan du cours

---

1. Champ d'application du concept de contact
2. Contact et corrélations à deux corps
3. Définition thermodynamique du contact
4. Premières mesures du contact



# Plan du cours

---

## 1. Champ d'application du concept de contact

*Rôle des états liés*

*Fermions vs. bosons*

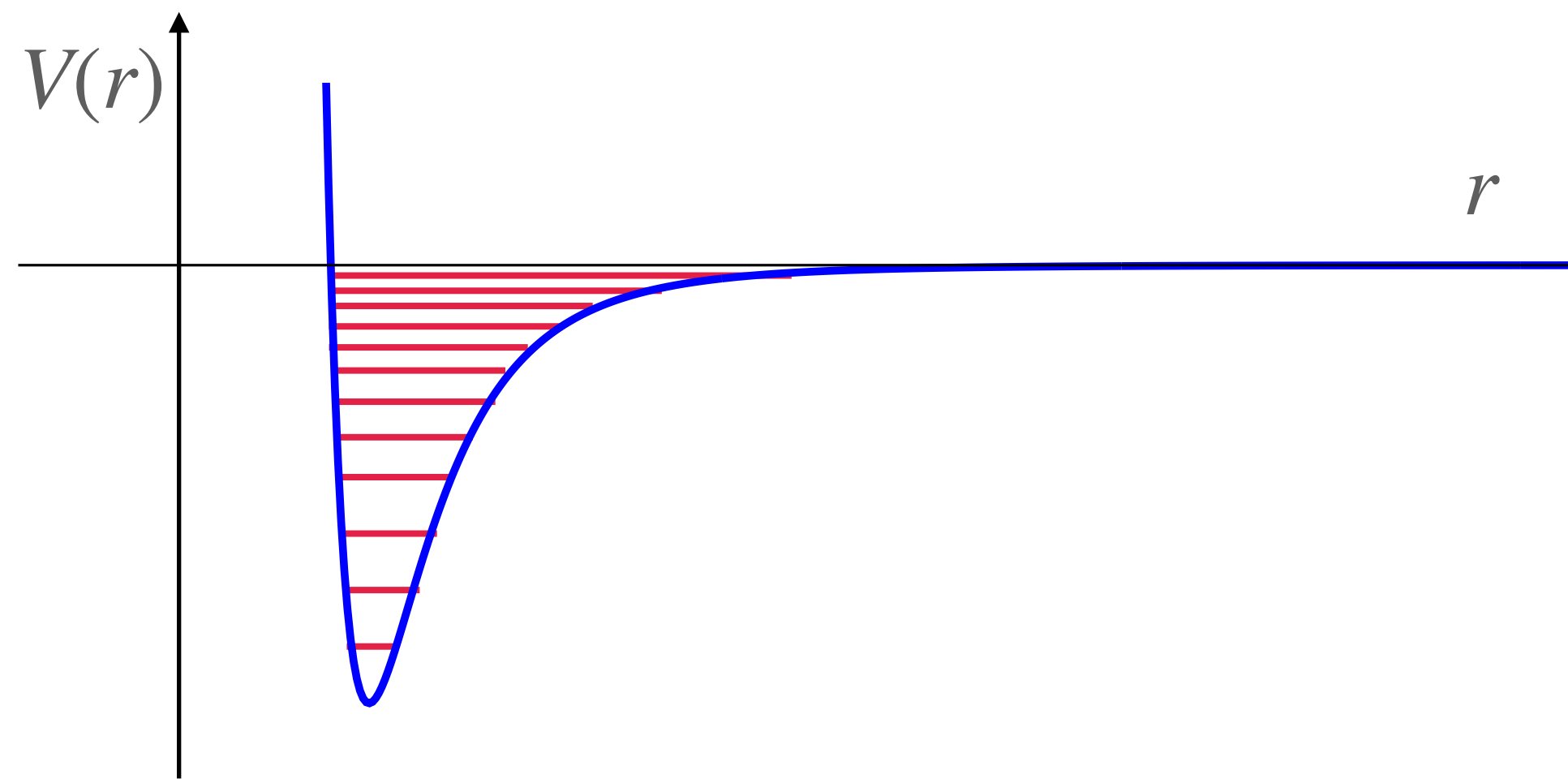
*Résonances larges vs. étroites*

## 2. Contact et corrélations à deux corps

## 3. Définition thermodynamique du contact

## 4. Premières mesures du contact

# Les états liés à deux corps (hors résonance)



Pour les atomes “usuels”, le problème à deux corps admet de nombreux états liés

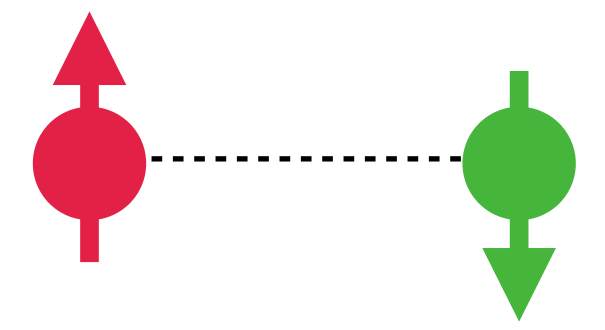
- Dernier état lié :  $|E| \sim 10 E_{\text{vdW}} \sim 100 \mu\text{K} - 1 \text{ mK}$
- Etats liés profonds :  $|E| \sim 100 - 1000\text{K}$

à comparer aux énergies du gaz :  $10 \text{ nK} - 1 \mu\text{K}$

**Une fois formés, ces états liés sont “hors-jeu” pour la thermodynamique du gaz**

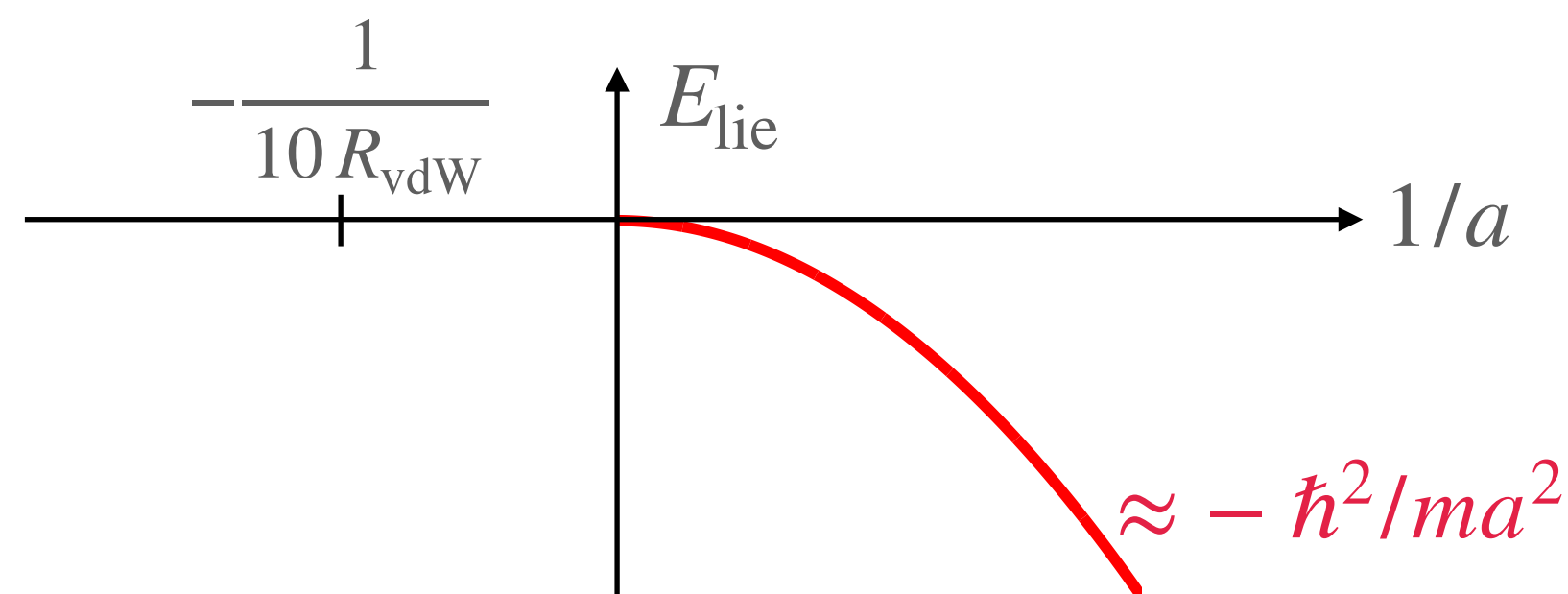
*Toute la physique des gaz quantiques repose sur le fait que le taux de formation de ces états liés est faible : on étudie des états métastables*

# Les états liés proches d'une résonance de diffusion



Paire de bosons ou paire de fermions de spin 1/2 dans des états  $\uparrow$  et  $\downarrow$

Au voisinage d'une résonance, la longueur de diffusion  $a \rightarrow \pm \infty$  et un nouvel état lié apparaît du côté  $a > 0$

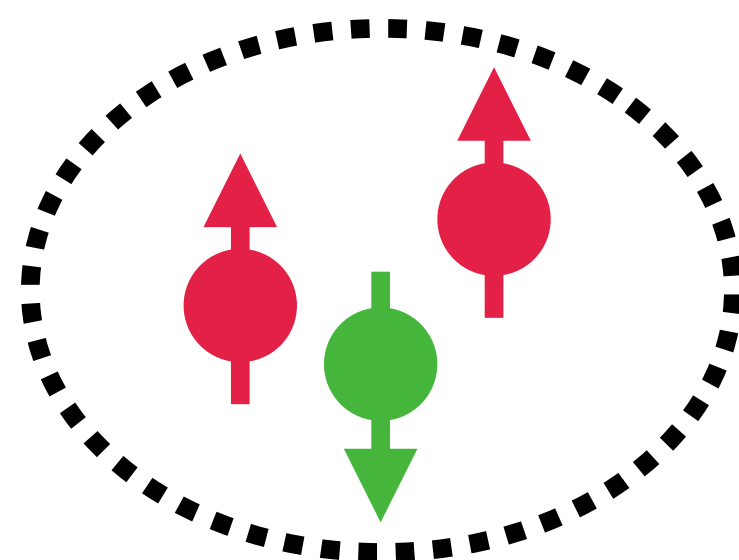


*L'énergie de liaison est comparable aux autres énergies caractéristiques du gaz : interactions, température*

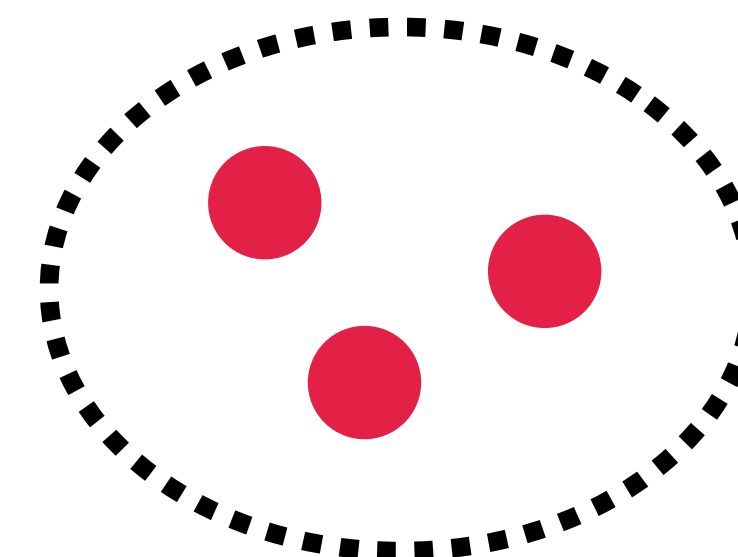
**Cet état lié doit être pris en compte dans la dynamique et la thermodynamique**

Au voisinage de cette résonance, y a-t-il des états faiblement liés à trois, quatre corps ?

**Fermions de spin 1/2 (et  $m_{\uparrow} \approx m_{\downarrow}$ ) ? Non (Pauli)**

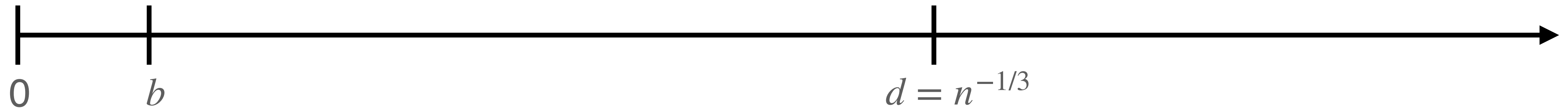


**Bosons ? Oui (Efimov)**



*apparaissent pour  $a \approx -10 R_{\text{vdW}}$*

# Fermions vs. bosons



Nous considérerons dans ce cours

→ un gaz de fermions de spin 1/2, avec  $m_{\uparrow} = m_{\downarrow}$       Gaz supposé “équilibré” :  $N_{\uparrow} = N_{\downarrow} = N/2$

**Pas de restriction sur le signe de la longueur de diffusion  $a$ , ni sur la valeur de  $na^3$  :  $|a| \gtrsim d$**

→ un gaz de bosons sans spin ou polarisés

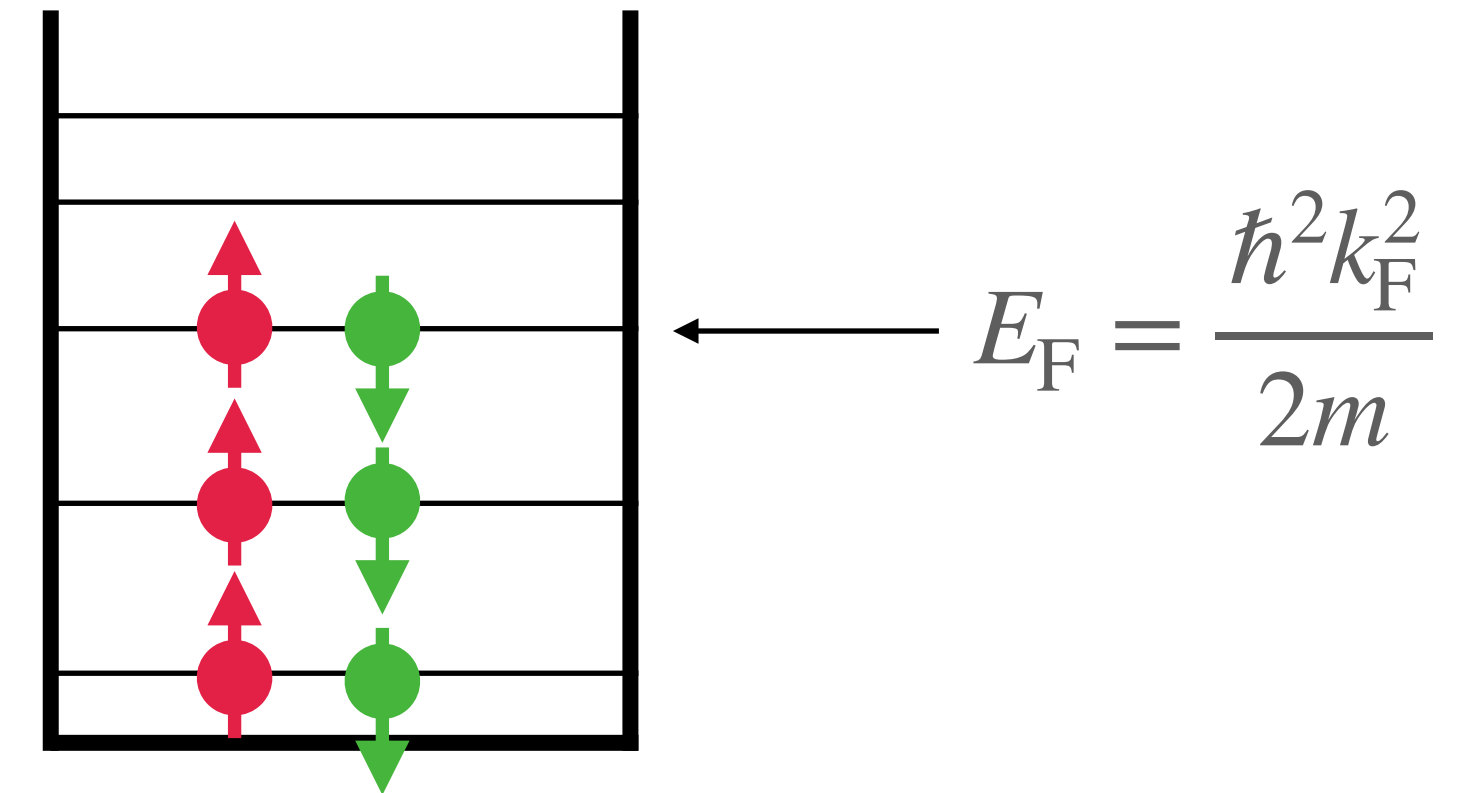
• **Au voisinage de  $T = 0$ ,  $a > 0$  (stabilité en champ moyen) et  $na^3 \ll 1$  (cf. cours précédent)**

• **Dans le régime non dégénéré,  $a < 0$  possible mais  $|a| \lesssim 10 R_{\text{vdW}}$  pour éviter les états d’Efimov**

# Rappel sur le gaz de Fermi équilibré

## Etat fondamental ?

Jamais d'interaction en onde s pour  $\uparrow - \uparrow$  ou  $\downarrow - \downarrow$



Si on suppose qu'il n'y a pas d'interaction  $\uparrow - \downarrow$ , remplissage régulier des états jusqu'à  $|k| = k_F$

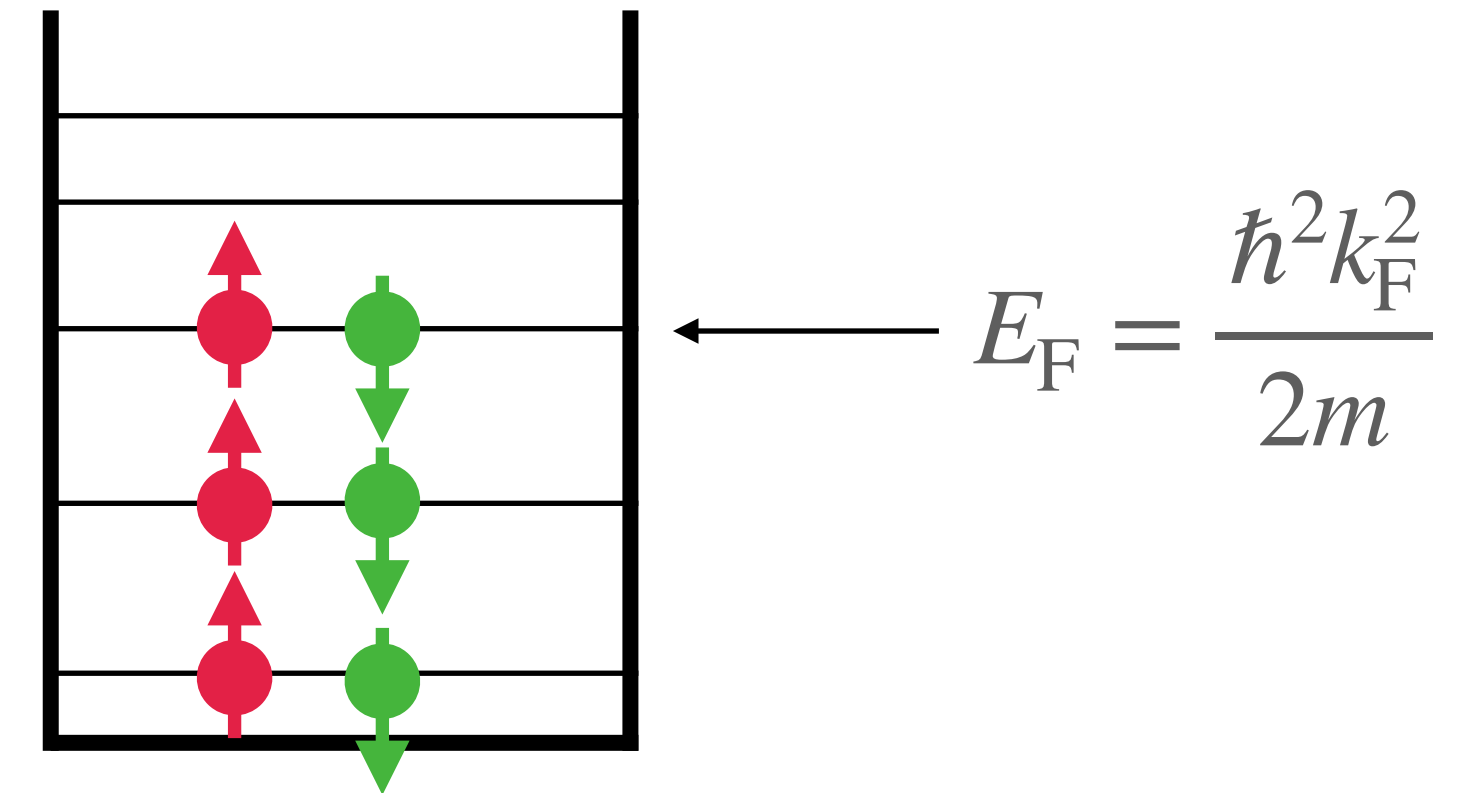
$$N = \sum_{|k| < k_F} 2 \longrightarrow \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_{|k| < k_F} 2 d^3k = \frac{L^3 k_F^3}{3\pi^2}$$

$$E = \sum_{|k| < k_F} 2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} N E_F$$

# Rappel sur le gaz de Fermi équilibré (suite)

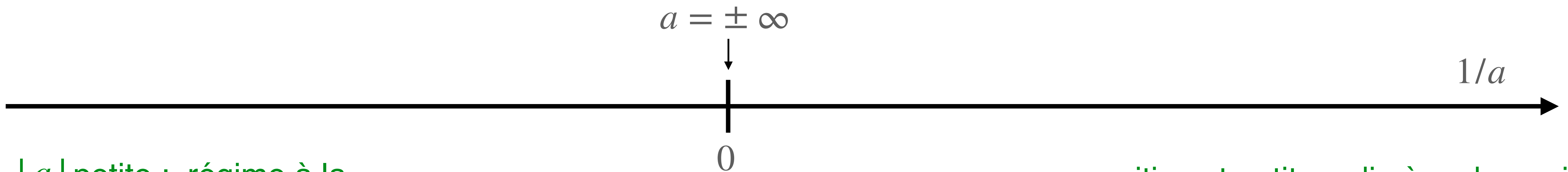
Etat fondamental ?

Jamais d'interaction en onde s pour  $\uparrow - \uparrow$  ou  $\downarrow - \downarrow$



**En présence d'interactions  $\uparrow - \downarrow$ , système très riche (fondamental toujours superfluide)**

Au voisinage d'une résonance de diffusion, "crossover" entre régime BCS et condensat de Bose-Einstein



$|a|$  petite : régime à la Bardeen-Cooper-Schrieffer

Régime d'interaction forte

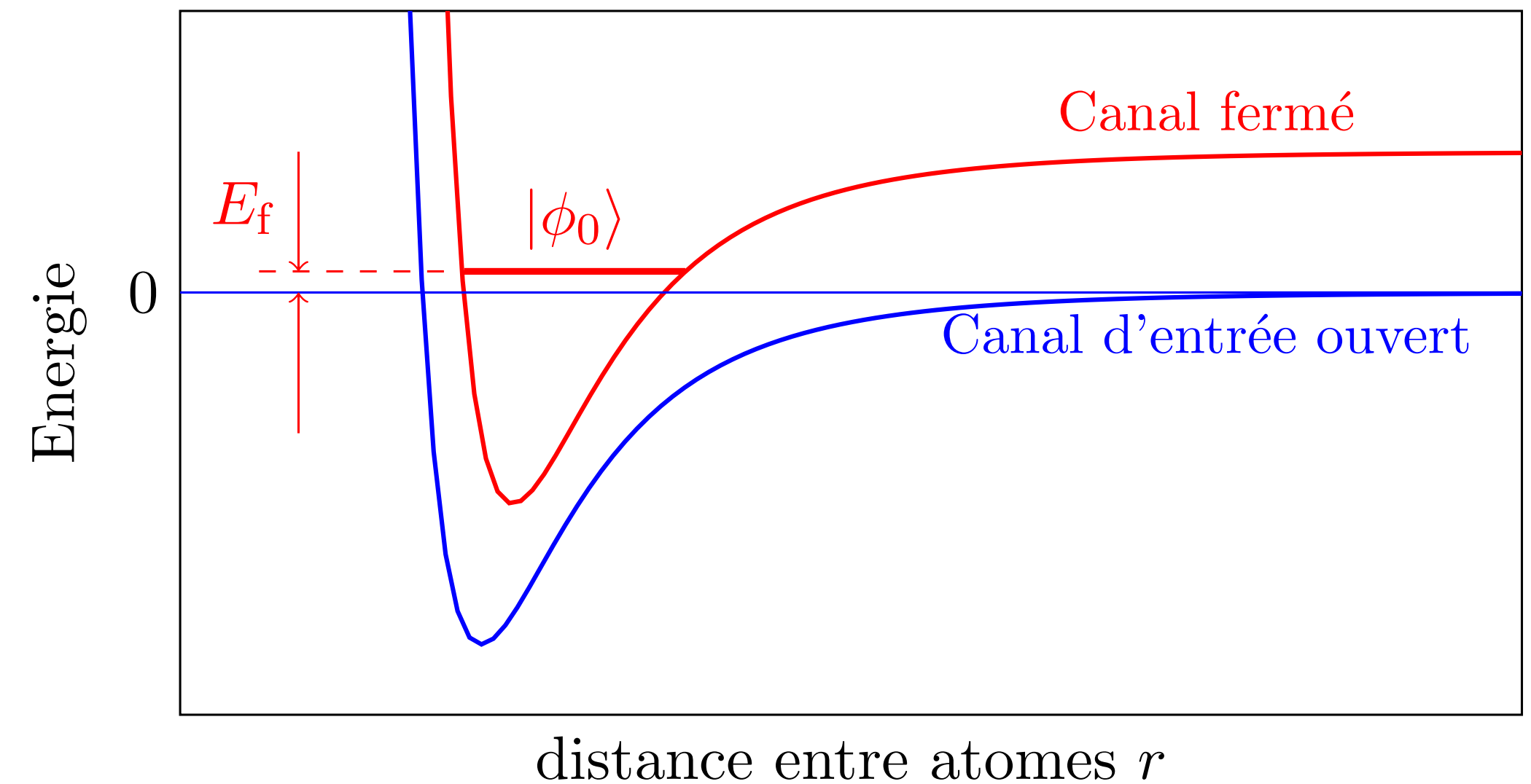
$a$  positive et petite : dimères bosoniques  $E \approx -\hbar^2 / ma^2$  qui forment un condensat

# Résonances de Feshbach : larges vs. étroites ?

## Résonance large

$$f(k) \approx \frac{-a}{1 + ika}$$

$a$  est la seule longueur pertinente dans le domaine d'énergie considéré



## Résonance étroite

$$f(k) \approx \frac{-a}{1 + ika + k^2 R_* a}$$

où  $R_*$  est "anormalement" grand, en particulier  $|R_*| \gg b$

$R_*$  constitue une nouvelle échelle de longueur à prendre en compte en plus de  $a$

*problème plus compliqué : exclu ici*

# Plan du cours

---

1. Champ d'application du concept de contact

2. Contact et corrélations à deux corps

*Les états de diffusion à deux corps*

*Fonction de corrélation  $G_2(r)$*

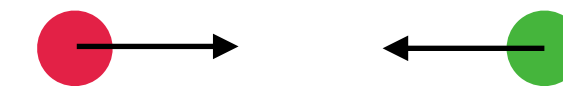
*Distribution en impulsion*

3. Définition thermodynamique du contact

4. Premières mesures du contact



# Les états de diffusion à deux corps



Collision en onde s : analyse du mouvement relatif en terme de la fonction d'onde radiale réduite

$$u(r) = r \psi(r)$$

Comportement pour  $r \gtrsim b$  (portée du potentiel)

$$u_k(r) \propto \sin [kr + \delta_0(k)]$$

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \left\{ \tan [\delta_0(k)] / k \right\}$$

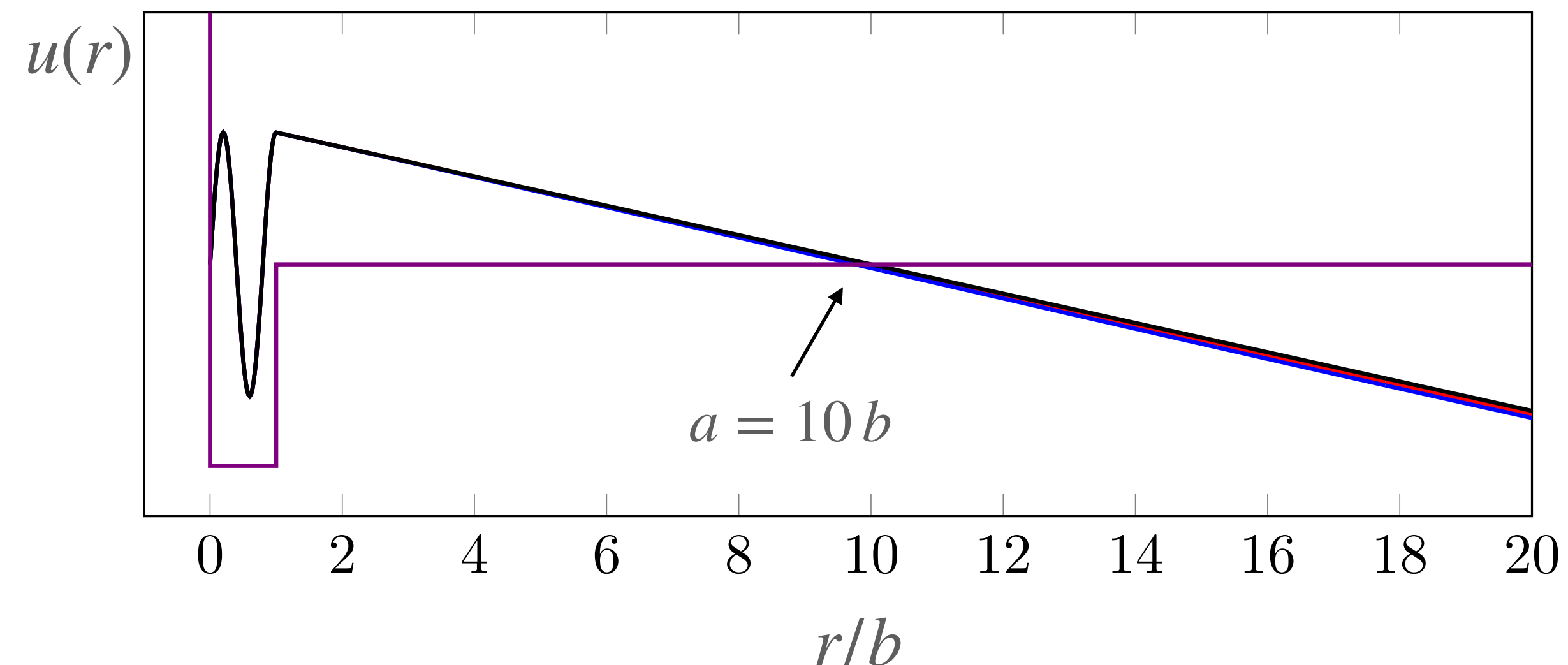
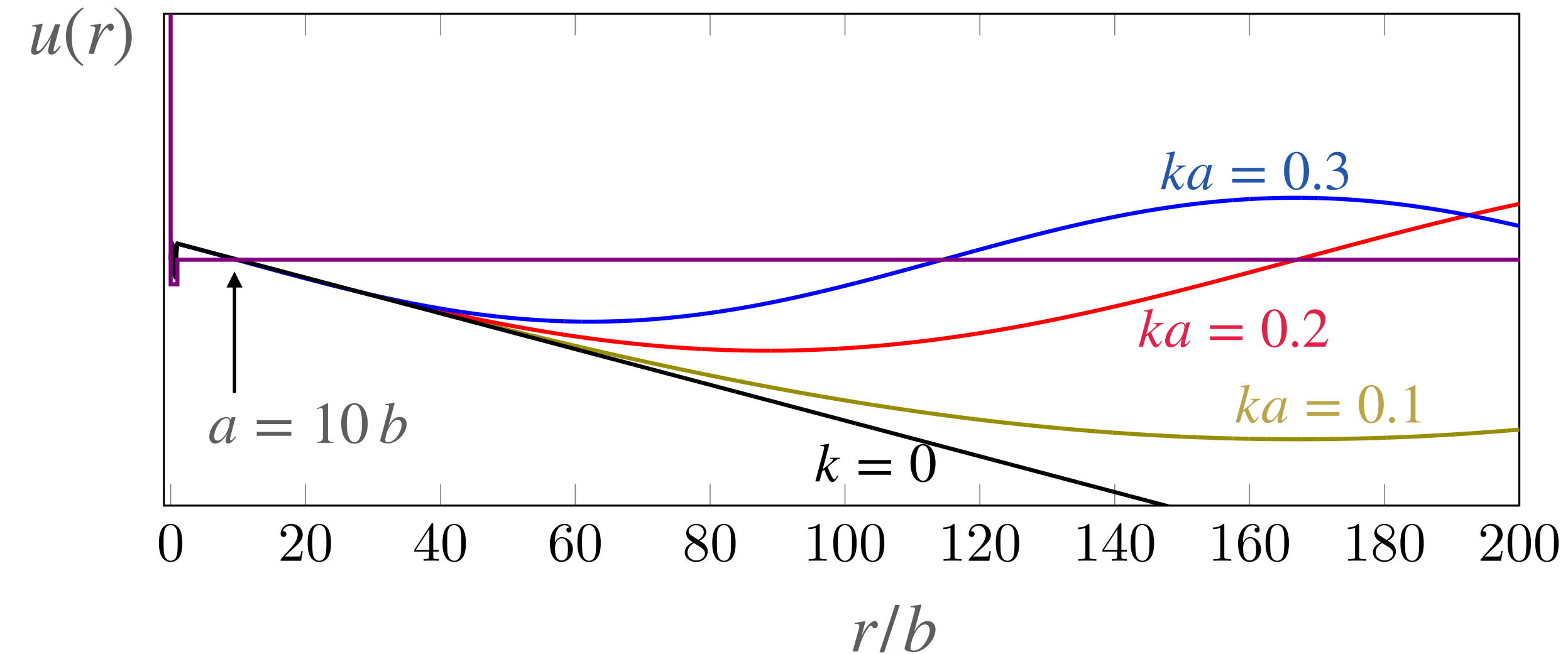
Dans la région  $kr \ll 1$  :

$$u_k(r) \approx u_0(r) \approx a - r + \mathcal{O}(r^2)$$

Valable en dehors du puits de potentiel :  $r \gtrsim b$

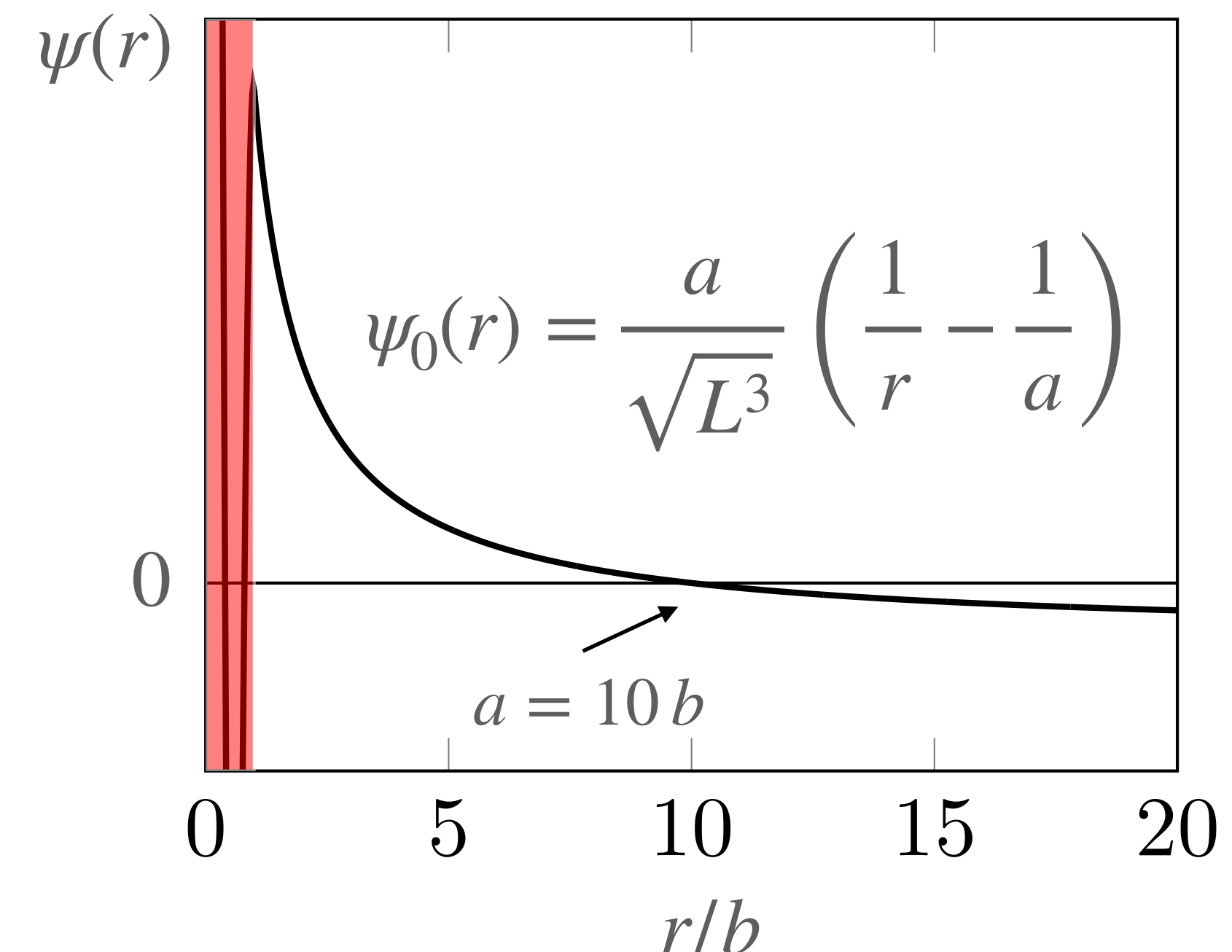
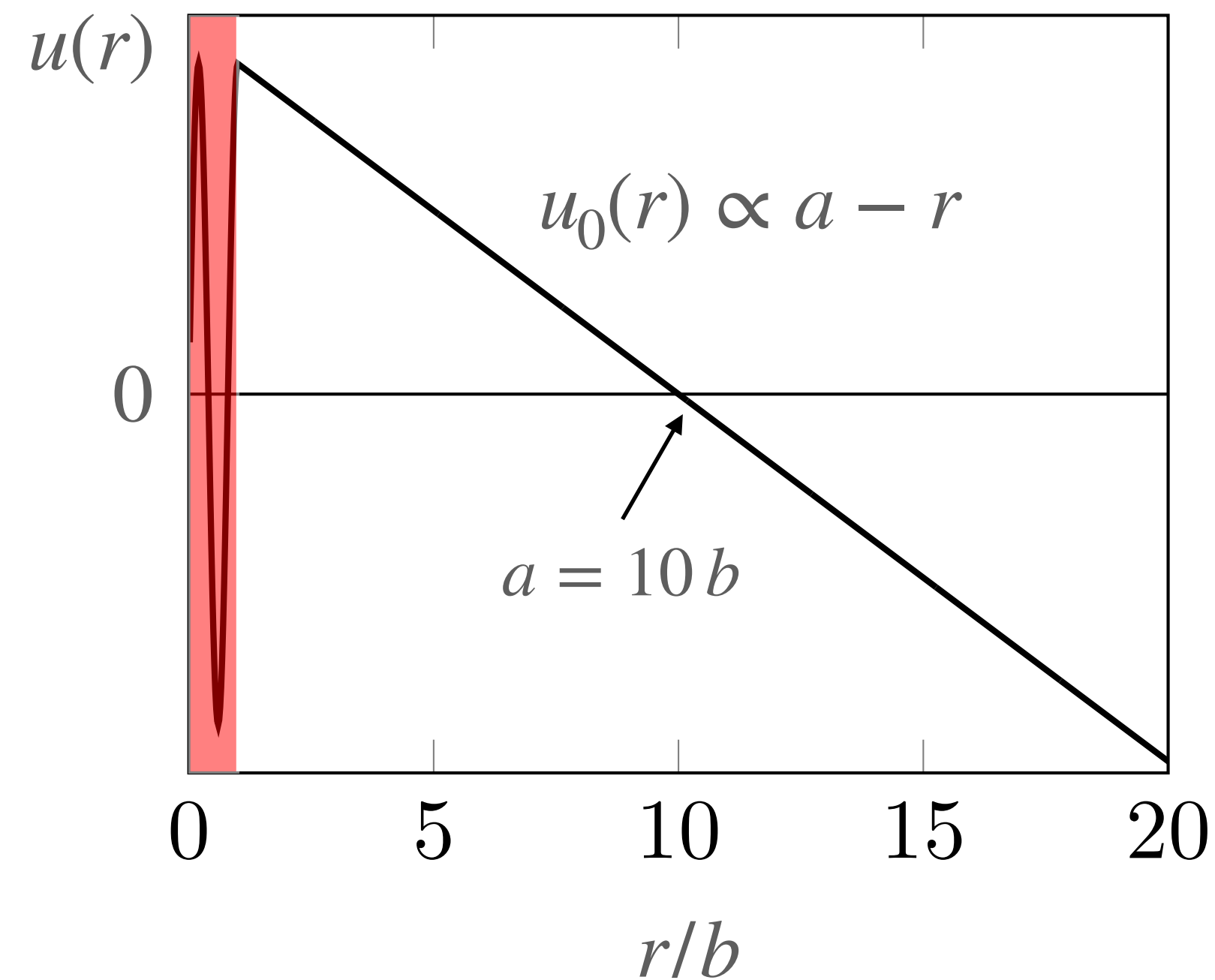
Exact pour le pseudo-potentiel ( $b = 0$ )

## Exemple d'un puits carré



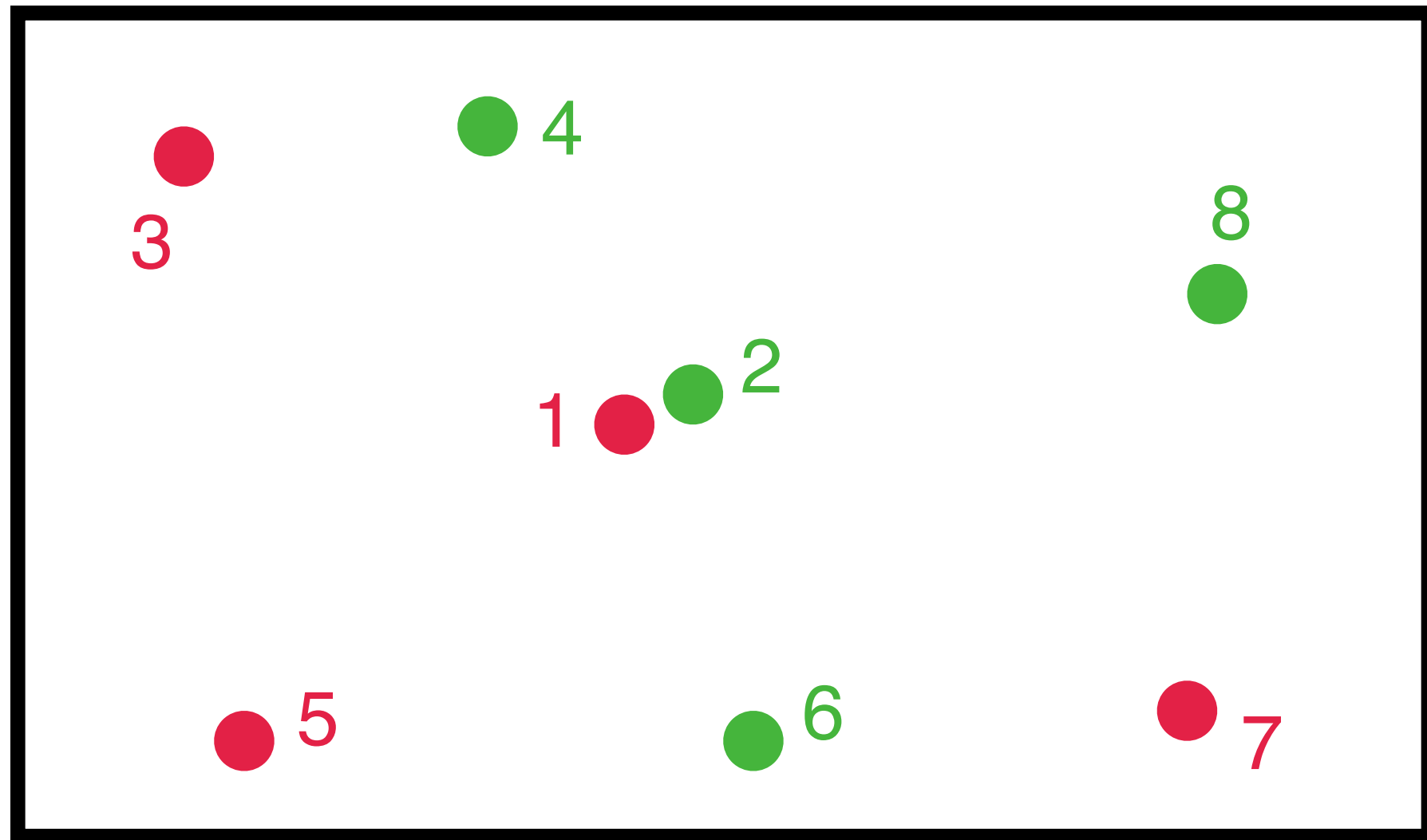
# Les états de diffusion à deux corps (suite)

Comportement de la fonction d'onde à énergie nulle  $\psi_0(r) = \frac{u_0(r)}{r}$  pour  $r \gtrsim b$



Dans ce qui va suivre, c'est le terme dominant  $\psi_0(r) \propto \frac{1}{r}$  pour  $r \gtrsim b$  qui va jouer le rôle principal (en supposant  $b \ll a$  pour que ce régime existe sur une plage appréciable)

# Passage à N corps : argument qualitatif



Etat fondamental :  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$

Indices impairs :  $\uparrow$

Indices pairs :  $\downarrow$

Fermions:  $\Phi$  antisymétrique par échange de deux indices pairs ou de deux indices impairs

On fixe les positions  $\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$  :

Que se passe-t-il quand  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  se rapprochent l'un de l'autre, suffisamment loin des  $N - 2$  particules restantes?

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}$$

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \approx \psi_0(\mathbf{r}) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$

fonction d'onde à  $E = 0$  du problème à deux corps

# Fonctions de corrélation à deux corps

Zhang & Leggett, Yu, Bruun & Baym (2009)

On définit :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) \equiv \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{N^2}{4} \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}',0,\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \Phi(\mathbf{r},0,\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$$

**Quel est le comportement de  $\mathcal{G}_2$  quand  $r, r' \rightarrow 0$  ?**

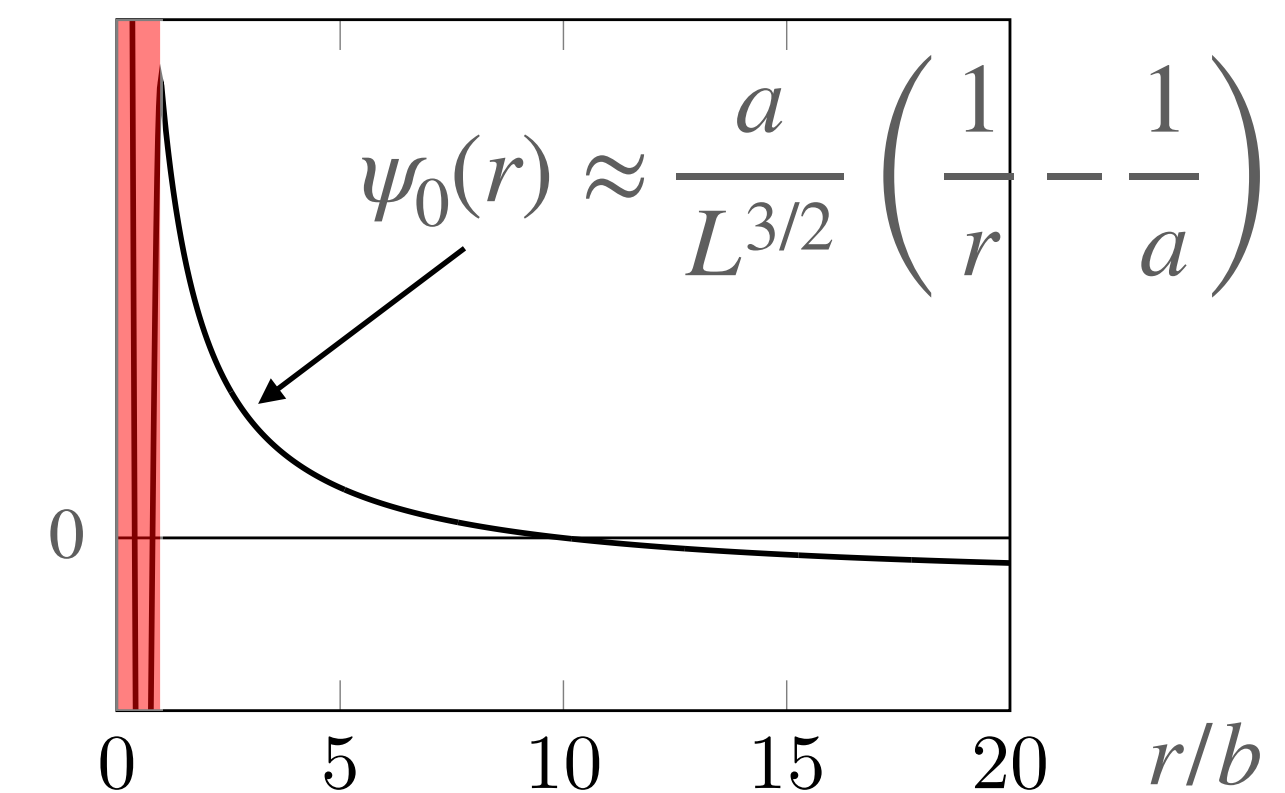
$\mathcal{G}_2$  : opérateur hermitien en représentation position. On peut le diagonaliser :  $\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) = \sum_j \gamma_j \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r})$

**Hypothèse à la base de la théorie du contact :**

Quand  $r \ll d$  :  $\phi_j(r) \propto \psi_0(r)$

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0^*(r') \psi_0(r) \quad \mathbf{C : contact}$$

$$b \lesssim r, r' \ll d, a : \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r}$$



# Distribution de paires

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) \equiv \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle$$

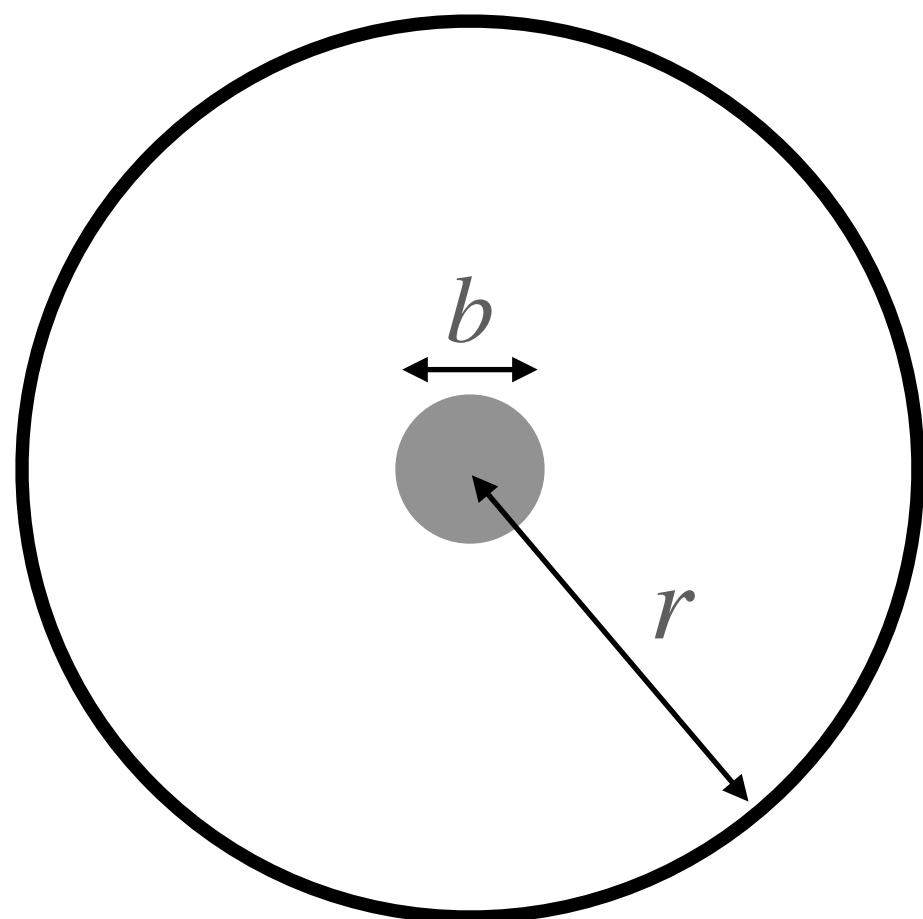
$$\approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r}$$

Fonction de distribution de paires pour deux fermions  $\uparrow \downarrow$  (ou deux bosons)

$$G_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) = \int \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}, \mathbf{r}_a; \mathbf{r}_a + \mathbf{r}, \mathbf{r}_a) d^3 r_a = L^3 \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, 0; \mathbf{r}, 0) \quad \int G_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) d^3 r = \left(\frac{N}{2}\right)^2$$

$$\approx \frac{C}{(4\pi)^2} \frac{1}{r^2} \quad \text{pour } b \lesssim r \ll a, d \quad \text{Contact } C : \text{variable extensive, dimension : (longueur)}^{-1}$$

Tendance au groupement des particules (fermions  $\uparrow \downarrow$  ou bosons)



Pour un atome donné, probabilité  $\delta P(r)$  de trouver un voisin (de spin opposé dans le cas des fermions) à une distance inférieure à  $r$  ( $\ll d, a$ ) ?

**$\delta P(r) \propto r$  au lieu de  $\delta P(r) \propto r^3$  pour des particules non corrélées**

# Distribution en impulsion ?

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) &\equiv \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{N^2}{4} \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}',0,\mathbf{r}_3,\dots,\mathbf{r}_N) \Phi(\mathbf{r},0,\mathbf{r}_3,\dots,\mathbf{r}_N)\end{aligned}$$

$$b \lesssim r, r' \ll d, a : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \quad n_{\uparrow}(k) = n_{\downarrow}(k) \approx \frac{C}{k^4} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{a}, \frac{1}{d} \ll k \lesssim \frac{1}{b}$$

# Plan du cours

---

1. Champ d'application du concept de contact
2. Contact et corrélations à deux corps
3. Définition thermodynamique du contact
4. Premières mesures du contact



# Potentiels thermodynamiques

L'état d'équilibre d'un fluide est caractérisé par une fonction thermodynamique, par exemple l'énergie  $E$ , elle-même fonction de variables thermodynamiques :

$$E(S, L^3, N) \quad dE = TdS - PdL^3 + \mu dN$$

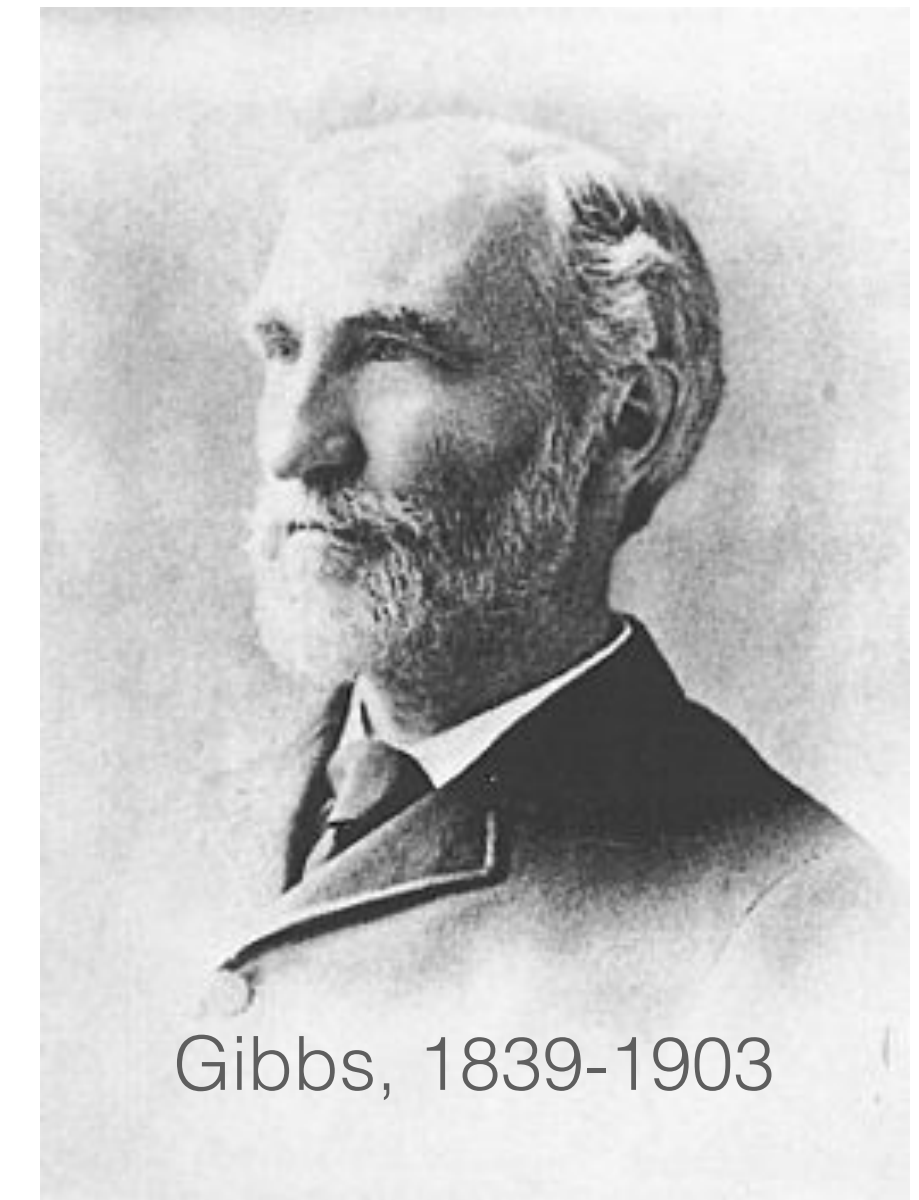
avec les variables conjuguées

$$T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{L^3, N} \quad P = - \left( \frac{\partial E}{\partial L^3} \right)_{S, N} \quad \mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, L^3}$$

On devrait en principe inclure le potentiel d'interaction  $V(r)$  dans les variables thermodynamiques, mais ça ferait une infinité de paramètres !

Pour les gaz quantiques dilués ( $nb^3 \ll 1$ ), on suppose ici que seule la longueur de diffusion  $a$  du problème à deux corps est importante

On va la traiter comme une variable thermodynamique à part entière :  $E(S, L^3, N, a)$



Gibbs, 1839-1903



# La définition thermodynamique du contact

*On se place à température nulle pour commencer (donc entropie  $S = 0$ )*

Pour la fonction thermodynamique  $E(L^3, N, a)$ , quelle est la quantité conjuguée de  $a$  ?

Bosons polarisés :  $\frac{\hbar^2 C}{8\pi m a^2} = \left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{L^3, N}$  ou encore  $\frac{\hbar^2 C}{8\pi m} = - \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{L^3, N}$

Fermions de spin 1/2 :  $\frac{\hbar^2 C}{4\pi m a^2} = \left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{L^3, N}$  ou encore  $\frac{\hbar^2 C}{4\pi m} = - \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{L^3, N}$

***Cette définition coïncide-t-elle avec celle basée sur la fonction de corrélation à deux corps ?***

# Un lemme utile

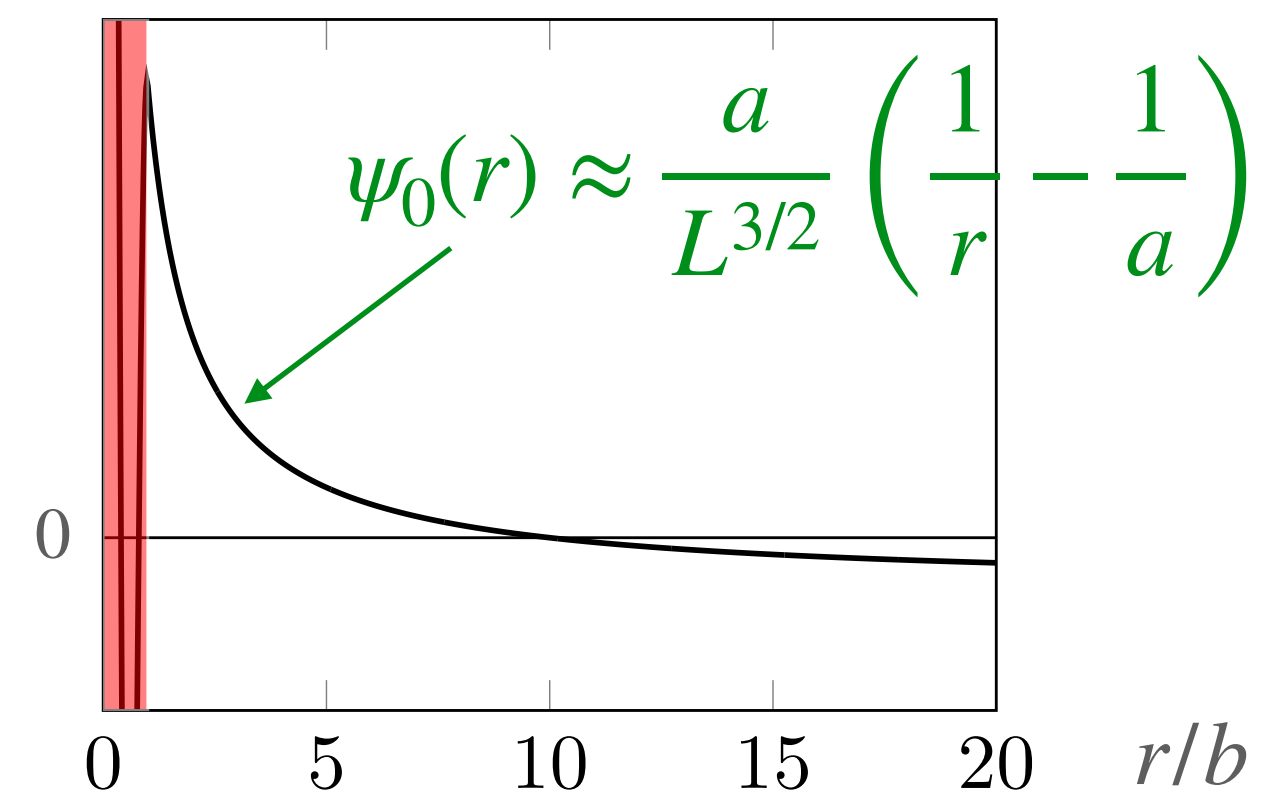
On considère un potentiel d'interaction  $V(r)$  conduisant à la longueur de diffusion  $a$

On fait un léger changement de potentiel :  $V(r) \longrightarrow V(r) + \delta V(r)$

***De combien change la longueur de diffusion ?***

Réponse :  $a \longrightarrow a + \delta a$  avec  $L^3 \int \delta V(r) \psi_0^2(r) d^3r = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \delta a$

$\psi_0(r)$  fonction radiale réduite d'énergie nulle



# Lien entre les deux définitions du contact

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) &\equiv \langle \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\downarrow}(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{N^2}{4} \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}',0,\mathbf{r}_3,\dots,\mathbf{r}_N) \Phi(\mathbf{r},0,\mathbf{r}_3,\dots,\mathbf{r}_N)\end{aligned}$$

$$r, r' \ll d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}',0;\mathbf{r},0) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0^*(r') \psi_0(r)$$

$$C = C^{\text{thermo}} ???$$

$$\frac{\hbar^2 C^{\text{thermo}}}{4\pi m a^2} = \left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{L^3, N}$$

$$\text{Lemme : } \int_{L^3} \delta V(r) \psi_0^2(r) d^3r = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \delta a$$

# Le cas de la température non nulle

Description du système par un opérateur densité à  $N$  corps à température  $T$  :  $\hat{\rho} = \sum_j P_j |\Phi_j\rangle\langle\Phi_j|$

Pour chaque état  $|\Phi_j\rangle$ , on peut refaire la même démarche :

$$C_j = - \frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E_j}{\partial(1/a)} \right)_{N,L^3}$$

à condition que les échelles d'énergie restent compatibles avec les hypothèses (onde s)

Contact à température  $T$  :  $C = \sum_j P_j C_j$

Définition prise à populations constantes : correspond à la définition d'un processus adiabatique

$$C = - \frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{S,N,L^3}$$

# Contact et théorème du viriel

Utilisation de l'analyse dimensionnelle pour établir des relations entre quantités thermodynamiques

Exemple de l'entropie : 
$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dL^3 - \frac{\mu}{T}dN + \frac{\hbar^2 C}{[4/8]\pi m T}d(1/a)$$

- On utilise l'extensivité de l'entropie
- On choisit une échelle naturelle d'énergie ( $\hbar^2/ma^2$ ) et de volume ( $a^3$ )

$$S = Nk_B f\left(\frac{E/N}{\hbar^2/ma^2}, \frac{L^3/N}{a^3}\right)$$

On en déduit : 
$$PL^3 = \frac{2}{3}E + \frac{\hbar^2 C}{[12/24]\pi m a} \quad \text{Tan (généralisé par Werner)}$$

Si  $|a| \rightarrow +\infty$ , le contact est régulier : 
$$PL^3 = \frac{2}{3}E$$

# Plan du cours

---

1. Champ d'application du concept de contact
2. Contact et corrélations à deux corps
3. Définition thermodynamique du contact
4. Premières mesures du contact
  - *Expériences sur un gaz de Fermi*
  - *Simulations numériques*
  - *Fraction de dimères au voisinage d'une résonance de Feshbach*

# Expérience de Boulder (2010)

Stewart *et al.*, PRL **104** 235301

Gaz de  $2 \cdot 10^5$  atomes de potassium 40 (fermion), avec  $F = 9/2$  pour le niveau fondamental

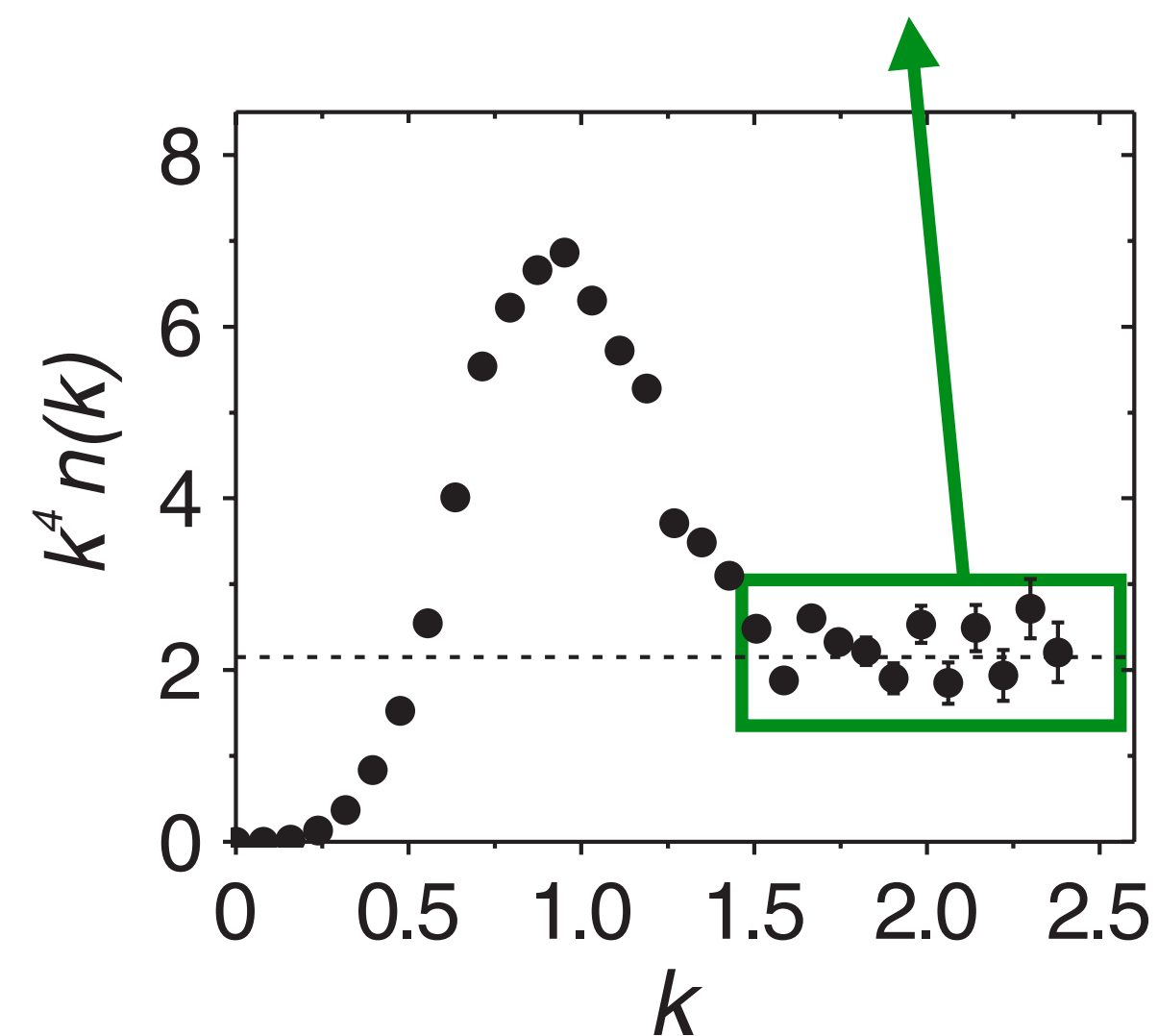
$$|\uparrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -7/2\rangle$$

$$|\downarrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -9/2\rangle$$

Confinement dans un piège optique et refroidissement par évaporation jusqu'à  $T \approx 0.1 T_F$  ( $a = 40$  nm)

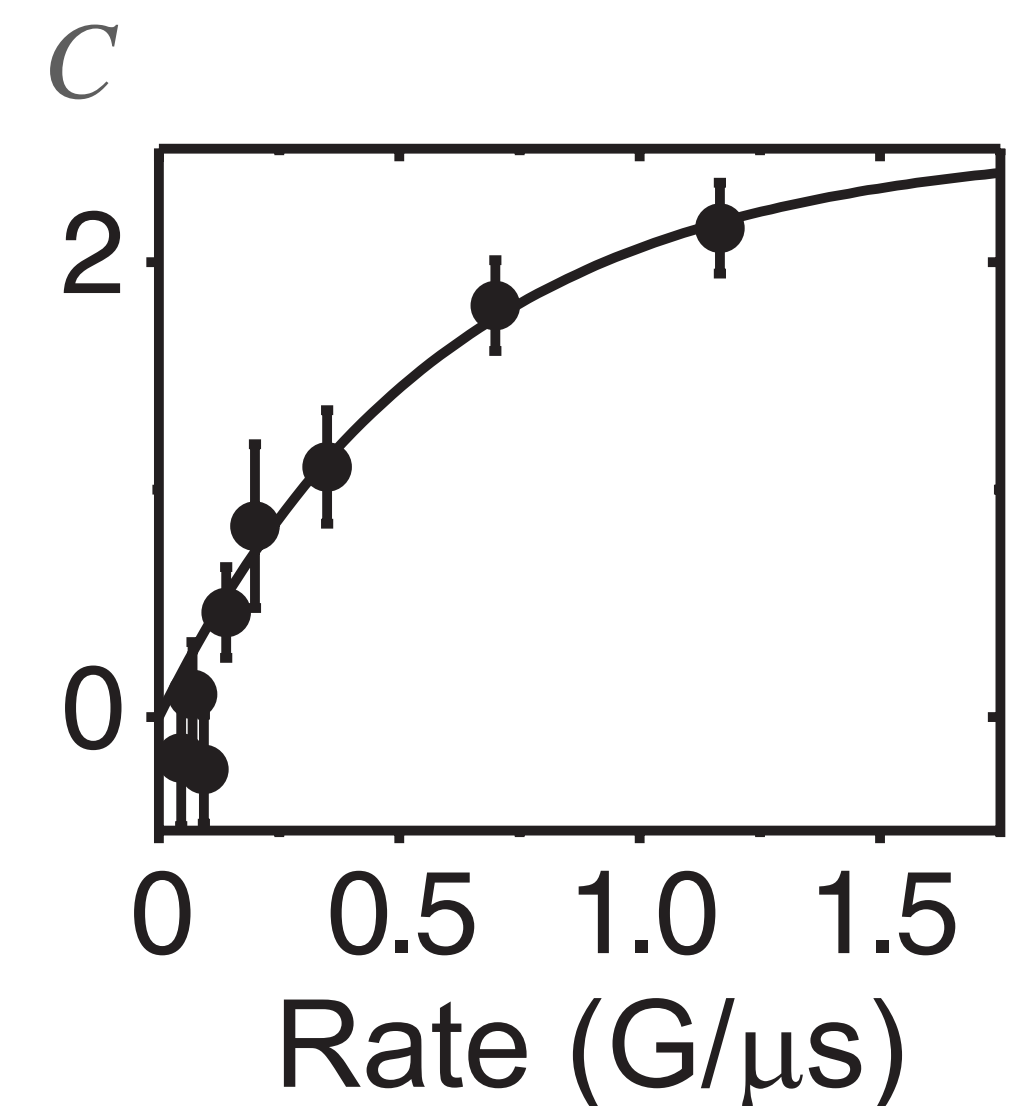
Rampe adiabatique de  $a$  jusqu'à une valeur proche de résonance ( $1/k_F a = -0.08$ ), puis mesure de  $n(k)$

$$n(k) \approx C/k^4 \text{ avec } C \approx 2.2 N k_F$$

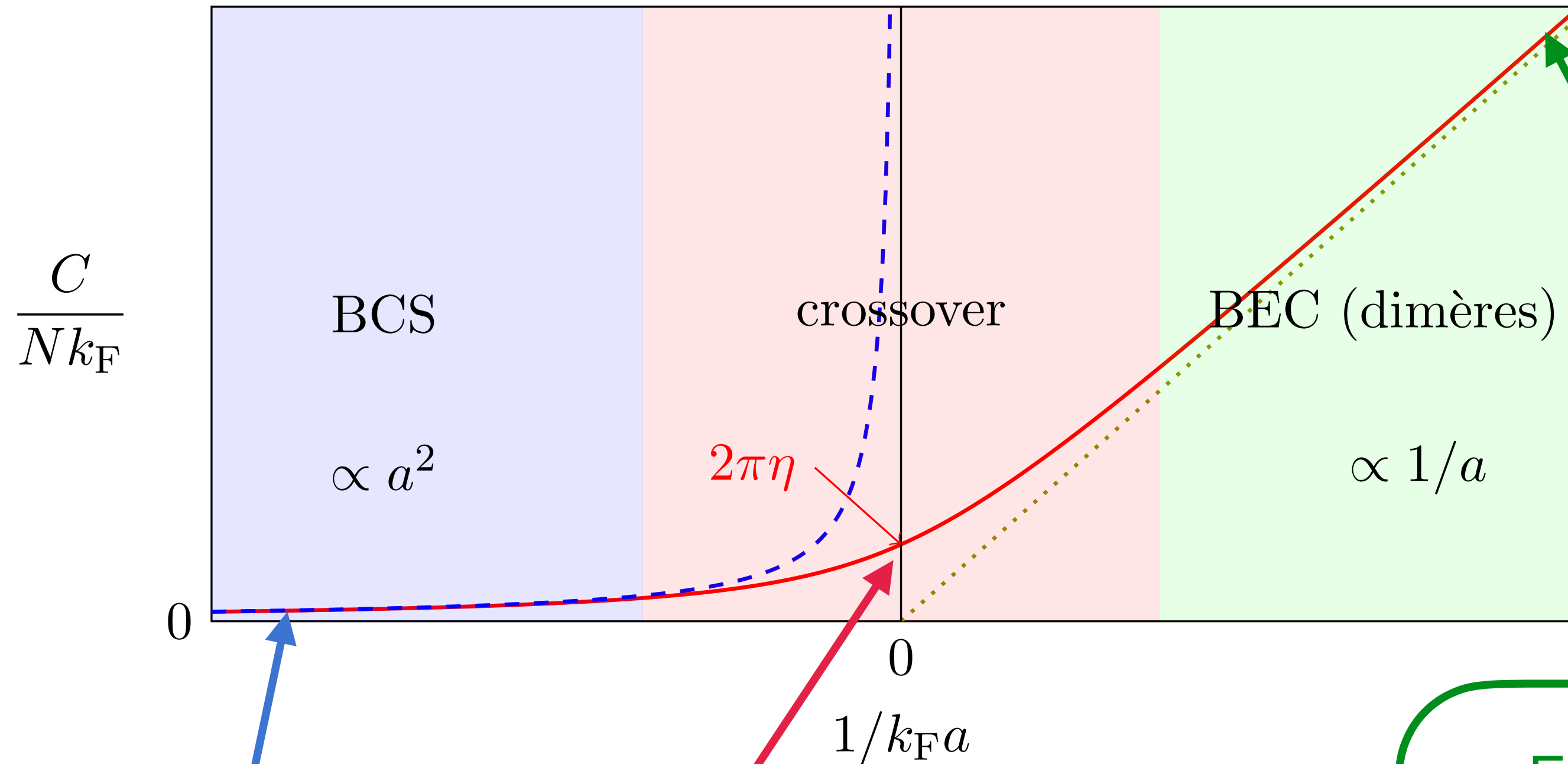


Pour obtenir  $n(k)$  :

- Coupure soudaine du piège optique
- On amène  $a$  à  $\approx 0$  en changeant  $B$
- Temps de vol de 6 ms



# Lois d'échelle attendues pour un gaz de Fermi



$$E_{\text{int}} = \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{4\pi\hbar^2 a}{mL^3}$$

(corrections BCS négligeables)

$$\frac{C}{Nk_F} \approx \frac{4}{3}(k_F a)^2$$

Problème difficile !

Monte Carlo quantique  
de Drut et al (2011):

$$2\pi\eta = 2.95(10)$$

Energie d'un dimère :  $-\frac{\hbar^2}{ma^2}$

$$E_{\text{int}} = -\frac{N}{2} \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

(interaction dimère-dimère négligeable)

$$\frac{C}{Nk_F} \approx \frac{4\pi}{k_F a}$$



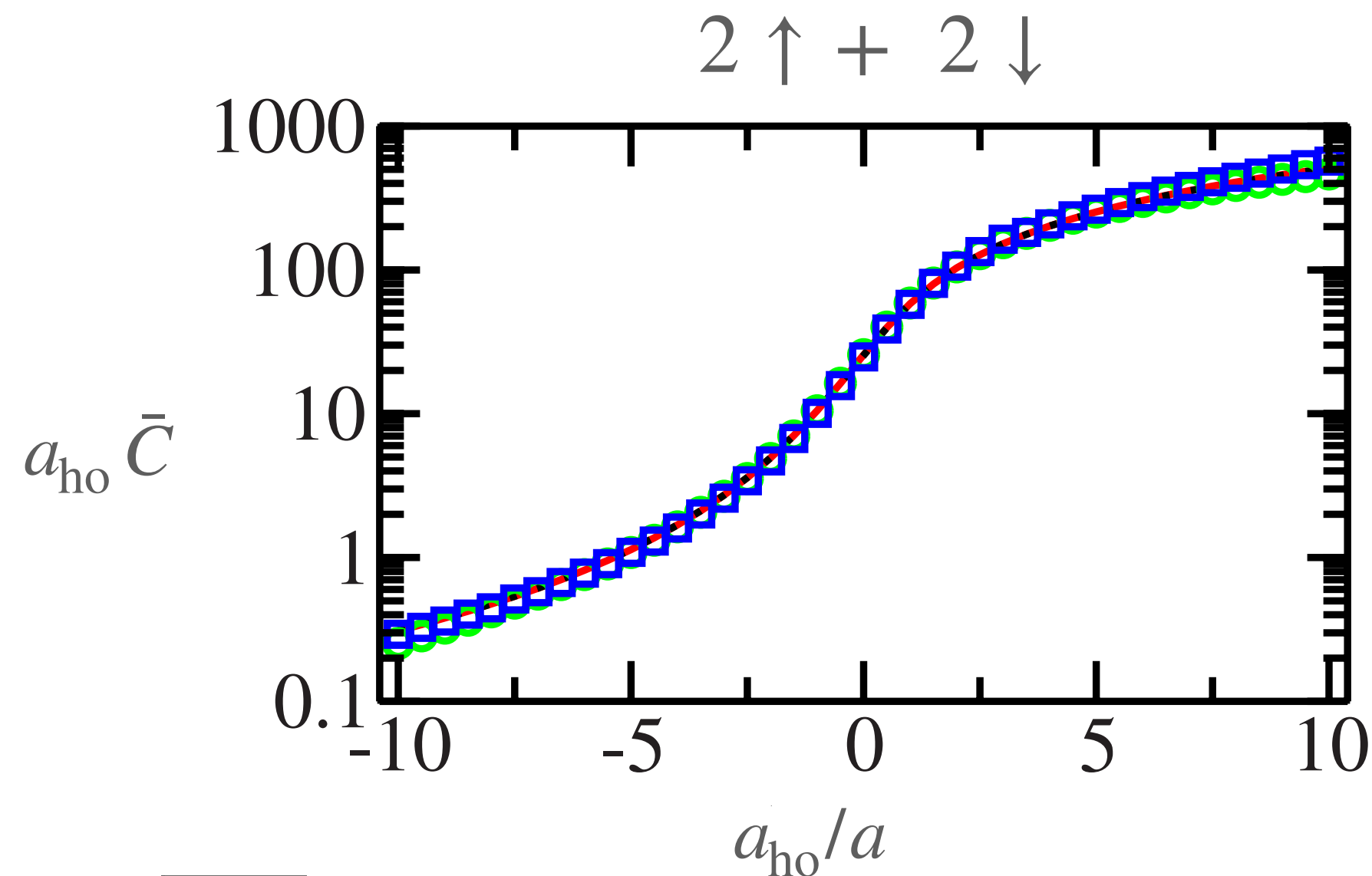
# Etudes numériques

Blume & Daily (2009), Yin & Blume (2015)

$N = 4$  à 10 fermions confinés dans un piège harmonique, avec un potentiel d'interaction gaussien

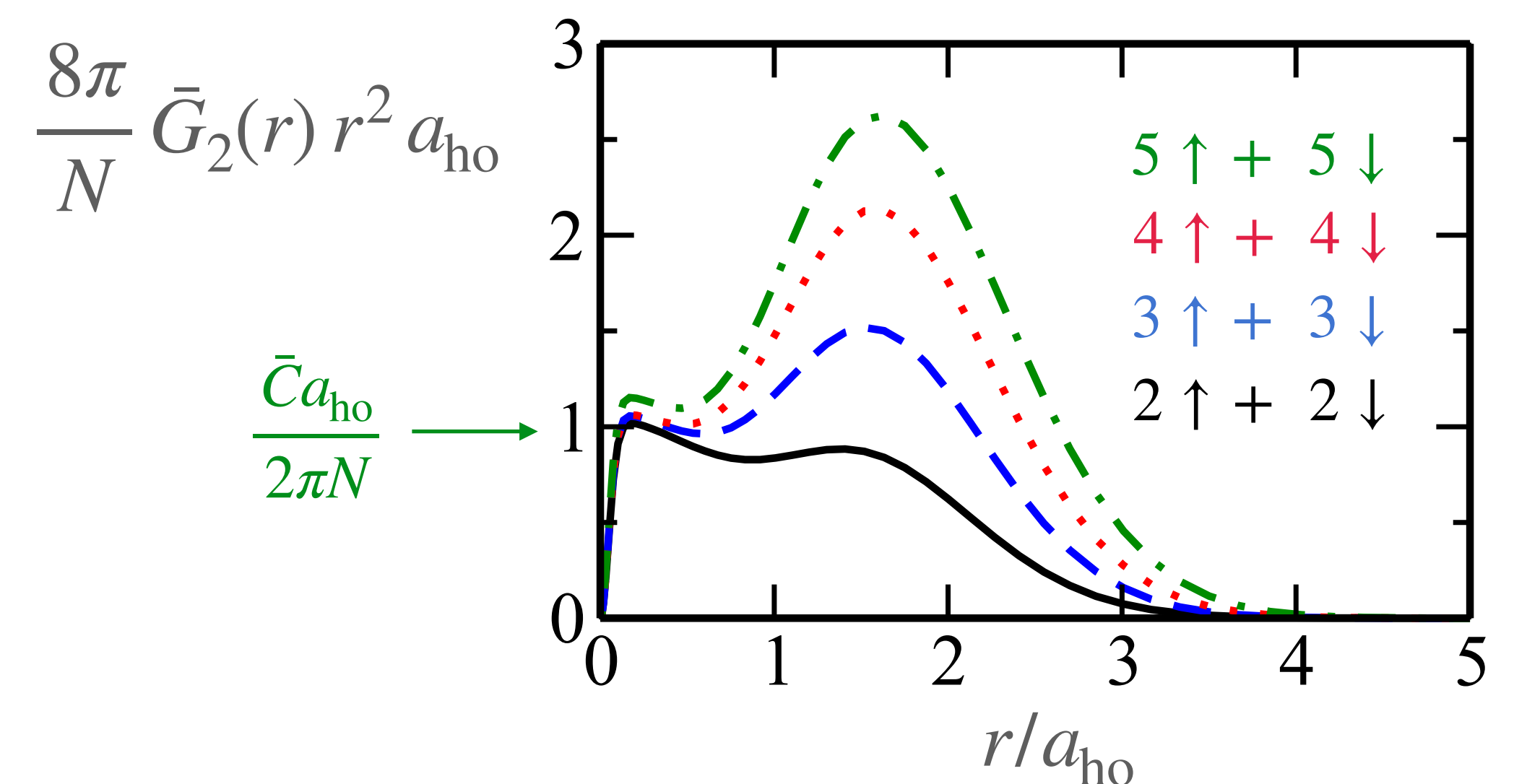
Diagonalisation de l'hamiltonien à  $N$  corps

- Energie totale
- Fonction de corrélation spatiale à deux corps
- Distribution en impulsion



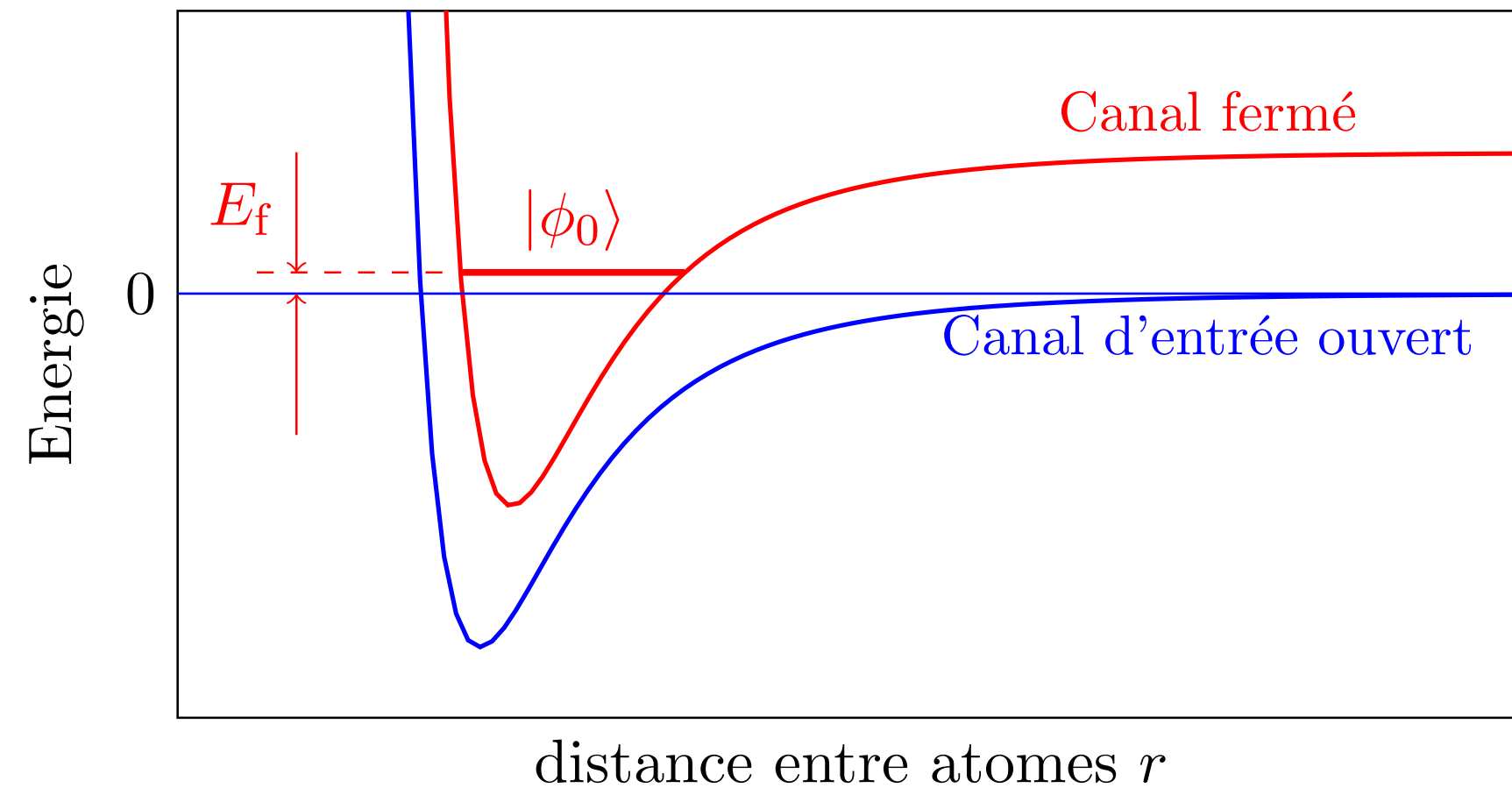
$$a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$$

“limite thermodynamique” pour  $|a| = +\infty$



# Contact et résonance de Fano-Feshbach

Werner, Tarruell, Castin



Les particules peuvent exister sous forme d'atomes libres ou de dimères

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{at}} + \sum_{\mathbf{K}} \left( \frac{\hbar^2 K^2}{4m} + E_{\text{dim}}(B) \right) b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} + \hat{V}_{\text{at,dim}}$$

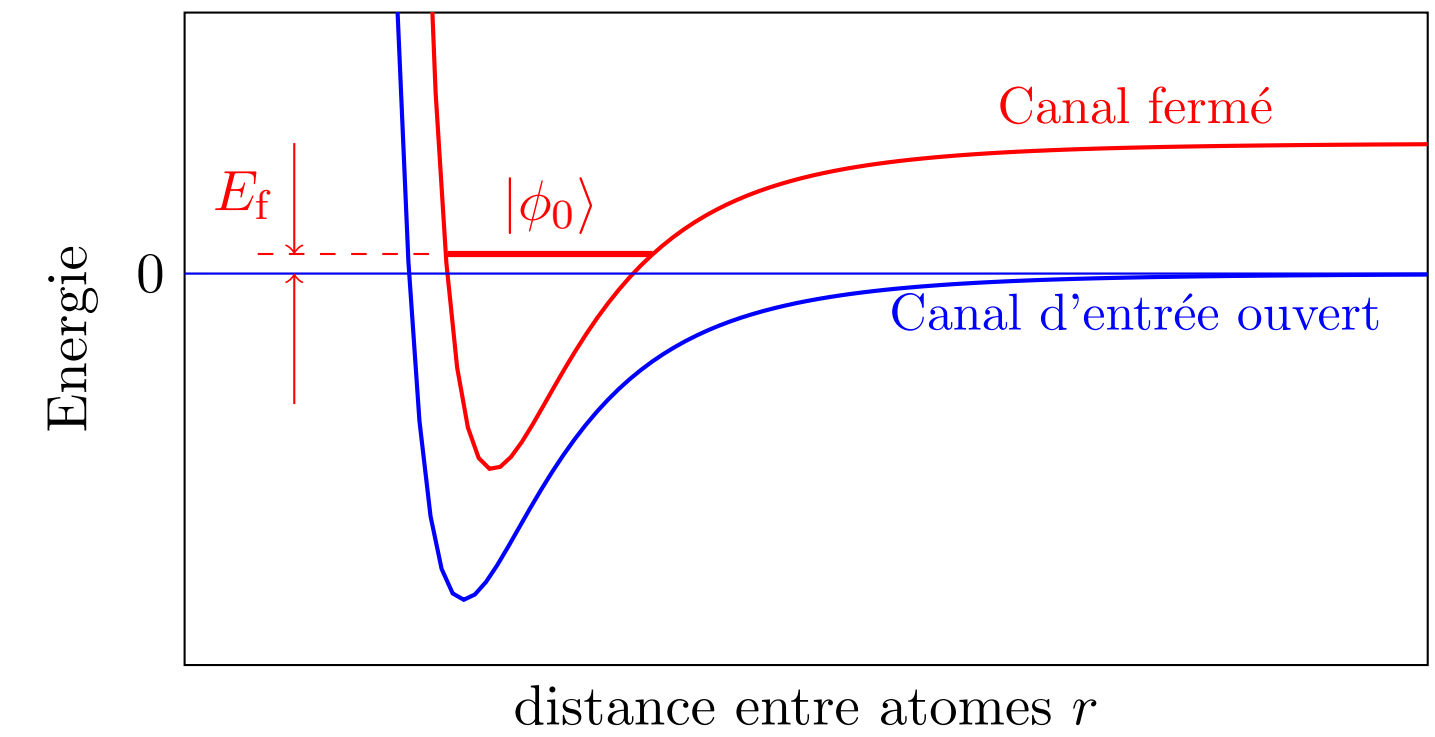
Variation de l'énergie du fondamental avec le champ magnétique :

$$\frac{\partial E}{\partial B} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial B} \right\rangle = \mu \langle N_{\phi_0} \rangle \quad \mu: \text{moment magnétique du dimère}$$

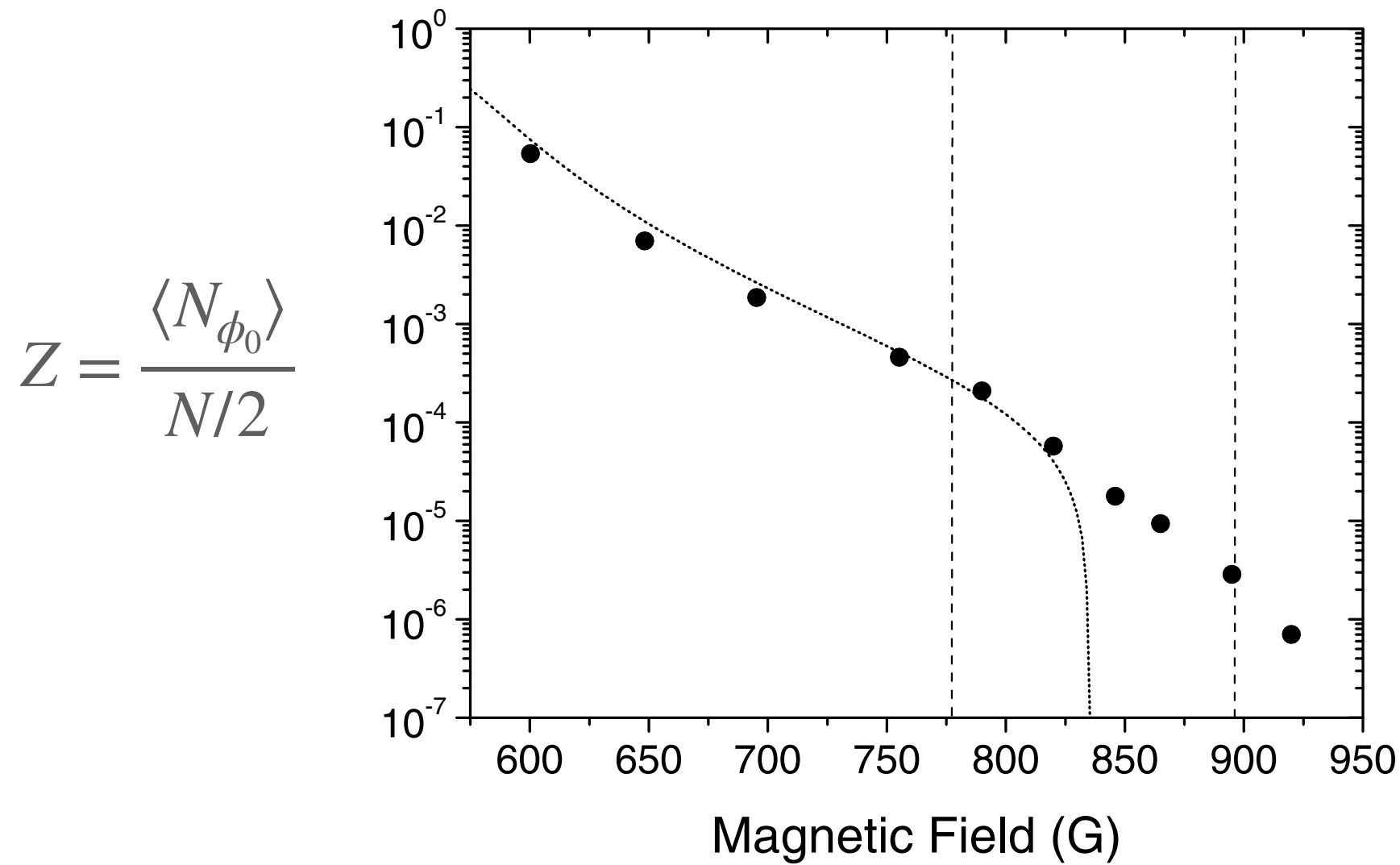
On sait par ailleurs que  $\frac{\hbar^2 C}{4\pi m a^2} = \left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{L^3, N}$  et que  $a(B) = a_{\text{bg}} \left( 1 - \frac{B_1}{B - B_0} \right)$

**Lien direct entre contact  $C$  et population de dimères  $\langle N_{\phi_0} \rangle$  grâce à  $\frac{\partial E}{\partial B} = \frac{\partial E}{\partial a} \frac{da}{dB}$**

# Contact et résonance de Fano-Feshbach



Données expérimentales de Partridge et al., 2005 sur un gaz de  ${}^6\text{Li}$

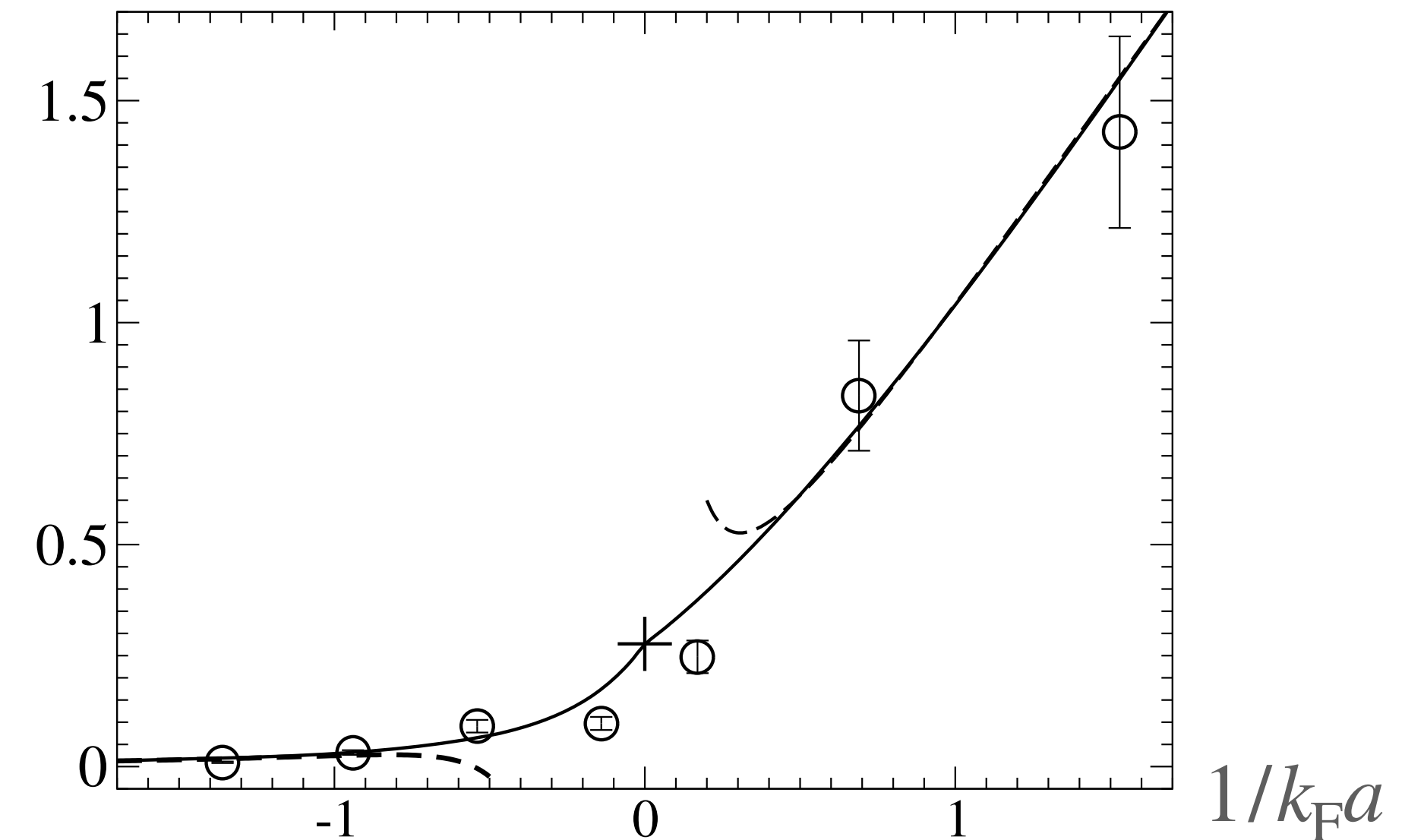


*Les dimères  $|\phi_0\rangle$  sont excités optiquement par un laser auxiliaire et on détecte les pertes correspondantes*

$$\langle N_{\phi_0} \rangle = \frac{\hbar^2}{4\pi m a^2 \mu} \frac{da}{dB} C$$

Werner, Tarruell, Castin

$$\frac{1}{4\pi} \frac{C}{Nk_F}$$



En résumé, pour un gaz dilué  $nb^3 \ll 1$ :

