

Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques (II)

de 2 à N corps

Jean Dalibard
Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2021-22

Introduction

Comment passer du simple au complexe, de l'individuel au collectif, du microscopique au macroscopique ? La connaissance des propriétés des constituants de base de la matière ordinaire, atomes et molécules, permet-elle de prédire le comportement d'une assemblée de $N \gg 1$ particules, qu'elle soit gazeuse, liquide ou solide ?

Cette question s'est posée dès la mise en place du formalisme de la physique statistique. Un exemple célèbre est l'équation d'état pour un fluide de volume V , de pression P et de température T écrite¹ par Johannes Diderik van der Waals en 1873 dans sa thèse de doctorat, équation qui lui valut le prix Nobel de physique en 1910 :

$$\left(P + a' \frac{N^2}{V^2}\right) (V - Nb') = Nk_B T. \quad (1)$$

Dans cette équation, les paramètres a' et b' sont censés décrire les processus physiques microscopiques qui induisent une déviation par rapport au gaz parfait, pour lequel $PV = Nk_B T$: a' caractérise les interactions entre particules, en particulier les interactions de van der Waals, et b' le volume occupé par chacune, considérée comme une sphère dure impénétrable.

Une prédiction importante de cette équation est l'universalité des phénomènes caractéristiques des fluides décrits par la physique classique, comme l'existence d'une transition liquide-gaz et d'un point critique où la distinction entre liquide et vapeur disparaît². L'équation d'état de van der Waals permet également de relier les propriétés des fluides entre eux pourvu qu'on utilise des unités réduites qui éliminent les paramètres microscopiques a' et b' . Si on note P_c , T_c et n_c la pression, la température et la

1. Les variables utilisées par van der Waals n'étaient pas le nombre de molécules N , ni la constante de Boltzmann k_B , mais le nombre de moles et la constante R des gaz parfaits. On passe d'un système de notation à l'autre par une multiplication par le nombre d'Avogadro.

2. Rappelons que ce point critique est obtenu par la recherche du point d'inflexion du

densité $n = N/V$ au point critique, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{P}{P_c} = F\left(\frac{T}{T_c}, \frac{n}{n_c}\right) \quad (3)$$

où F est une fonction identique pour tous les fluides.

Cette universalité, appelée *loi des états correspondants*, est illustrée sur la figure 1 extraite de l'article de GUGGENHEIM (1945). L'auteur y a tracé pour huit fluides différents la densité du gaz et la densité du liquide pour toute une gamme de températures inférieures à la température critique. Les densités sont mesurées en unité de n_c et les températures en unité de T_c , de sorte que l'universalité exprimée par (3) doit conduire à une seule et même courbe pour les différents fluides. C'est effectivement ce qui se produit, en bonne approximation, pour les huit fluides considérés.

L'équation de van der Waals et sa généralisation par GUGGENHEIM (1945) sont des approches entièrement classiques. Elles sont valables à haute température, plus précisément à basse densité dans l'espace des phases :

$$n\lambda^3 \ll 1 \quad \text{avec} \quad \lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}\right)^{1/2}, \quad (4)$$

où λ est la longueur d'onde thermique.

Nous allons dans ce cours nous intéresser au point de vue opposé, dans lequel les effets quantiques jouent un rôle essentiel. Ce point de vue est résumé par le réseau de courbes isothermes $P(V)$ à T donnée. Il faut donc résoudre

$$\text{Point critique :} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0, \quad (2)$$

exprimant notamment que la compressibilité du fluide est infinie en ce point.

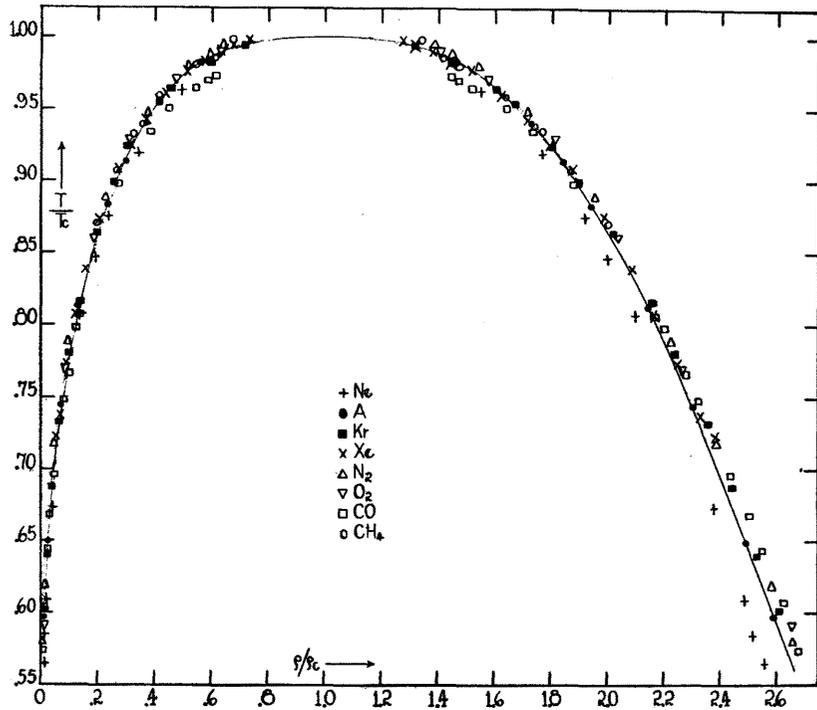


FIGURE 1. Caractère "universel" de la coexistence liquide-gaz pour une série de fluides différents, représentée ici sur un diagramme densité-température. On a tracé sur ce graphique la densité du gaz (branche de gauche) et celle du liquide (branche de droite). Les densités et les températures sont exprimées en unités des valeurs critiques pour chacun des corps, n_c (notée ici ρ_c) et T_c . Au point critique, en haut du graphe, les deux courbes se rejoignent. Notons que les ajustements indiqués par une ligne continue diffèrent quantitativement de la prédiction pour l'équation d'état de van der Waals, même si l'allure générale des résultats est conforme à ce qu'on attend pour (1). Figure tirée de GUGGENHEIM (1945).

bien entendu motivé par le développement considérable des recherches autour de la physique des gaz à très basse température qui s'est produit au cours des vingt dernières années. Grâce à la combinaison du refroidissement d'atomes par laser et par évaporation, on sait produire des fluides bosoniques ou fermioniques fortement dégénérés. Pour ces fluides, les interactions doivent être décrites par la physique quantique. Plus précisément, les collisions se produisent essentiellement dans l'onde partielle de moment cinétique nul, l'onde s . Elles sont donc caractérisées par un nombre, la longueur de diffusion a , dont la valeur peut, pour certaines espèces atomiques, être ajustée à une valeur arbitraire, voire même $a = \pm\infty$, grâce à des résonances de diffusion appelée résonances de Fano-Feshbach.

Notre but va être de comprendre dans quelle mesure on peut retrouver une universalité quantique, similaire dans son principe à celle montrée en figure 1. Cette universalité doit permettre de relier les propriétés macroscopiques du fluide, comme son énergie, à cette grandeur microscopique a . Nous allons pour cela procéder par étapes selon le plan suivant :

- Le chapitre 1 sera consacré au cas faiblement dégénéré, $n\lambda^3 \lesssim 1$, qui peut être abordé par le développement du viriel, c'est-à-dire un développement de l'équation d'état en puissances de $n\lambda^3$.
- Les chapitres 2, 3 et 4 seront consacrés au cas du gaz de Bose fortement dégénéré, $n\lambda^3 \gg 1$, mais en interaction relativement faible au sens où $na^3 \ll 1$. Nous commencerons par la présentation détaillée de la méthode de Bogoliubov, puis nous étudierons les corrections d'ordre supérieur, comme celle de Lee-Huang-Yang (LEE, HUANG et al. 1957). Nous présenterons également plusieurs expériences récentes fournissant des tests quantitatifs de ces théories. Nous expliquerons par ailleurs comment ces corrections permettent de stabiliser des états "liquides", c'est-à-dire des états de densité indépendante du nombre de particules (PETROV 2015).
- Dans les chapitres 5 et 6, nous aborderons le cas des systèmes en interaction forte, dans lesquels une résonance de diffusion permet de réaliser une situation telle que $na^3 \gtrsim 1$, tout en restant dans le régime dilué $nb^3 \ll 1$ où b est la portée du potentiel. Nous présenterons le concept de contact introduit par S. Tan (TAN 2008a; TAN 2008b) et nous montrerons comment il permet de relier la physique à un ou deux corps, par exemple la distribution en impulsion $n(\mathbf{k})$ et la fonction de corrélation spatiale $g_2(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$, à la physique à N corps par l'intermédiaire

des fonctions thermodynamiques.

Nous utiliserons dans ce cours un certain nombre de notions qui ont été développées en détail dans le cours de l'an passé : collision en onde s et longueur de diffusion, développement de Born, résonances de Fano–Feshbach. Nous rappellerons au fur et à mesure les ingrédients essentiels pour utiliser ces notions et nous renvoyons le lecteur vers les notes du cours 2020-21 (DALIBARD 2021) pour les approfondir si besoin est.

Je remercie Jérôme Beugnon, Markus Holzmann, Raphael Lopes, Sylvain Nascimbene, Félix Werner et Willi Zwerger pour de nombreuses discussions sur les points abordés dans ce cours.

Références

- DALIBARD, Jean (2021), « Les interactions entre atomes froids (I) : de l'universalité de van der Waals aux résonances de Fano–Feshbach », <https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/CdF/2021/total-fr.pdf>.
- GUGGENHEIM, E Ao (1945), « The principle of corresponding states », in *The Journal of Chemical Physics* **13**, p. 253-261.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- PETROV, DS (2015), « Quantum mechanical stabilization of a collapsing Bose-Bose mixture », in *Physical Review Letters* **115**, p. 155302.
- TAN, Shina (2008a), « Energetics of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* **323**, p. 2952-2970.
- (2008b), « Large momentum part of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* **323**, p. 2971-2986.

Chapitre 1

Gaz quantiques faiblement dégénérés : l'approche "développement du viriel"

Sommaire

1	Le développement du viriel	2
1-1	Equation d'état d'un fluide	2
1-2	Le gaz parfait classique (Boltzmann)	3
1-3	Les gaz parfaits quantiques	3
1-4	Le principe du développement du viriel	4
2	Le deuxième coefficient du viriel	5
2-1	Séparation "centre de masse" et "mvt. relatif"	5
2-2	Interactions en onde s loin de résonance	6
2-3	Pression et énergie interne du gaz	7
2-4	Le voisinage d'une résonance de diffusion	9
3	Le gaz de Fermi unitaire	11
3-1	Développement du viriel pour un gaz spineur	12
3-2	Le coefficient b_3	13
3-3	Résultats expérimentaux	14
3-4	Au delà des effets à trois corps	16

Nous abordons dans ce chapitre une première méthode pour relier la physique à petit nombre de corps et les propriétés macroscopiques d'un fluide. Cette méthode, qui porte le nom de développement du viriel, est utilisable pour des fluides faiblement dégénérés, c'est-à-dire une densité dans l'espace des phases $n\lambda^3 \ll 1$, où n est la densité spatiale et $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ la longueur d'onde thermique, T désignant la température.

Cette approche du viriel consiste à proposer un développement d'une fonction thermodynamique du fluide macroscopique, sa pression par exemple, en puissances de la densité n ou de la fugacité¹ $z = \exp(\mu/k_B T)$, où μ est le potentiel chimique. Ce type de développement a été proposé par Kamerlingh Onnes au tout début du vingtième siècle pour un fluide décrit par la thermodynamique classique, puis étendu à une description quantique par UHLENBECK & BETH (1936) et BETH & UHLENBECK (1937). De manière remarquable, le coefficient du terme d'ordre n (avec en pratique n de l'ordre de 2 à 5) est calculable pourvu que l'on sache traiter exactement le problème à n corps, donc un "tout petit" système très loin du cas macroscopique [cf. figure 1].

1. Pour un développement en puissances de z , certains auteurs préfèrent utiliser le terme "développement en amas" (*cluster expansion*). Nous garderons ici la terminologie la plus commune, "développement du viriel".

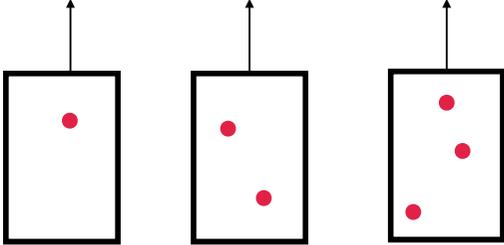
$$\frac{P}{k_B T / \lambda^3} = b_1(T) z + b_2(T) z^2 + b_3(T) z^3 + \dots$$


FIGURE 1. Principe du développement du viriel. On exprime la pression P (en unités de $k_B T / \lambda^3$) comme un développement en puissances de la fugacité $z = \exp(\mu / k_B T)$. Le coefficient d'ordre n , $b_n(T)$, se calcule en résolvant le problème à n corps correspondant. On fait ainsi le lien entre les propriétés macroscopiques du fluide et le problème à petit nombre de corps (n allant typiquement de 2 à 5), au moins dans le cas faiblement dégénéré : $n\lambda^3 \sim z \ll 1$.

Nous commençons ce chapitre par un rappel des bases de la description thermodynamique d'un gaz quantique parfait, décrit par la statistique de Bose ou de Fermi. Nous trouvons ainsi une première source de déviation des coefficients du développement du viriel par rapport à un gaz de Boltzmann. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons au premier coefficient du viriel non trivial, noté b_2 . Nous détaillons son calcul dans le cas d'interactions "standard" et nous retrouvons un résultat célèbre de BETH & UHLENBECK (1937). Nous discutons ensuite le cas d'interactions binaires résonantes. La troisième partie est consacrée au cas du gaz de Fermi de spin 1/2 unitaire, c'est-à-dire avec des interactions $\uparrow\downarrow$ résonantes. Il s'agit d'un système qui joue actuellement un rôle central en physique des gaz quantiques, car il permet de tester de manière très fine différentes approches théoriques en les confrontant à des résultats expérimentaux. Nous décrivons ces expériences et présentons les différents résultats connus pour les coefficients b_3 , b_4 et b_5 du développement.

1 Le développement du viriel

1-1 Equation d'état d'un fluide

L'état d'un fluide à l'équilibre thermodynamique est caractérisé par la valeur d'un certain nombre de variables thermodynamiques. Pour un gaz de particules sans spin, on utilise en général les trois variables suivantes :

- la température T ou sa variable conjuguée, l'entropie S .
- le volume L^3 ou sa variable conjuguée, la pression P .
- le nombre de particules N ou sa variable conjuguée, le potentiel chimique μ

L'équation d'état d'un fluide consiste à exprimer une fonction thermodynamique, l'énergie $E(S, L^3, N)$ ou le grand potentiel $\Omega(T, L^3, \mu)$ par exemple, en fonction d'un triplet formé à partir de ces variables. Dans un premier temps, nous allons utiliser le grand potentiel $\Omega(T, L^3, \mu)$, dont la différentielle totale s'écrit :

$$d\Omega = -S dT - P dL^3 - N d\mu \quad (1)$$

On montre en physique statistique [voir par exemple LANDAU & LIFSHITZ (1975)] que Ω est relié à la fonction de partition dans l'ensemble grand-canonique Z_{GC}

$$\Omega = -k_B T \log Z_{GC} \quad (2)$$

avec

$$Z_{GC} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \quad (3)$$

où l'on a introduit la fugacité $z = \exp(\mu / k_B T)$ et où Z_N est la fonction de partition de l'ensemble canonique à N particules, avec $Z_0 = 1$ par convention. Rappelons la définition de Z_N :

$$Z_N = \sum_j e^{-E_j / k_B T} \quad (4)$$

où la somme porte sur tous les états ϕ_j du système à N particules. En pratique, du fait du facteur de Boltzmann $e^{-E_j / k_B T}$, seuls l'état fondamental

d'énergie E_0 et les états excités d'énergie $E_j - E_0 \lesssim$ quelques $k_B T$ contribuent significativement à Z_N .

Une fois connu le grand potentiel $\Omega(L^3, T, \mu)$, on déduit les quantités thermodynamiques conjuguées des trois variables, l'entropie S , la pression P et le nombre de particules moyen N (ou la densité spatiale n) :

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{L^3, \mu} \quad P = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial L^3} \right)_{T, \mu} \quad n = \frac{N}{L^3} = - \frac{1}{L^3} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, L^3}. \quad (5)$$

Nous considérons ici un fluide dans lequel les interactions sont à suffisamment courte portée pour que le grand potentiel Ω soit une fonction extensive, c'est-à-dire proportionnelle au volume quand on maintient T et μ constants. L'intérêt du choix du grand potentiel est alors clair : la relation entre Ω et P ne peut être que la relation linéaire

$$\boxed{\Omega = -PL^3} \quad (6)$$

En d'autres termes, une équation d'état possible pour le fluide est l'expression de la pression P en termes de la température et du potentiel chimique. Pour travailler avec des quantités sans dimension, on peut s'intéresser par exemple à

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T}. \quad (7)$$

Par transformation de Legendre, on peut ensuite calculer d'autres potentiels thermodynamiques comme l'énergie libre $F(L^3, T, N) = \Omega + \mu N$ ou l'énergie interne $E(L^3, S, N) = \Omega + TS + \mu N$.

1-2 Le gaz parfait classique (Boltzmann)

Le gaz parfait classique correspond à une assemblée de particules de masse m , non interagissantes et non corrélées, et il obéit à la statistique de Boltzmann. Si on prend des conditions aux limites périodiques dans la boîte de volume L^3 , une base d'états propres à une particule est donnée par les ondes planes

$$\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^3, \quad (8)$$

d'énergie $\hbar^2 k^2 / 2m$. La fonction de partition à une particule est donc

$$Z_1 = \sum_{\mathbf{k}} e^{-\hbar^2 k^2 / 2mk_B T} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int e^{-\hbar^2 k^2 / 2mk_B T} d^3k \quad (9)$$

ou encore

$$\boxed{Z_1 = \frac{L^3}{\lambda^3}} \quad (10)$$

Comme les particules ne sont pas corrélées, la fonction de partition à N particules est égale au produit de N fonctions Z_1 , au facteur $1/N!$ près nécessaire pour la résolution du paradoxe de Nernst. On a donc

$$Z_{GC} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(z Z_1)^N}{N!} = \exp(z Z_1) \quad (11)$$

et donc

$$\Omega = -k_B T z Z_1 = -k_B T z \frac{L^3}{\lambda^3}. \quad (12)$$

On déduit de (6) l'expression de la pression

$$\boxed{\text{Gaz parfait classique : } \frac{P\lambda^3}{k_B T} = z} \quad (13)$$

La densité spatiale se déduit de (5) :

$$n\lambda^3 = z. \quad (14)$$

Pour le gaz parfait classique, la fugacité est égale à la densité dans l'espace des phases.

1-3 Les gaz parfaits quantiques

Dans notre monde physique, le gaz parfait classique étudié ci-dessus n'existe pas. Même si les particules n'interagissent pas (gaz parfait), le fait qu'elles obéissent à la statistique de Bose ou de Fermi vient introduire des corrélations entre elles. Par exemple, le principe de Pauli interdit que deux fermions de même spin occupent le même état \mathbf{k} .

Pour des particules quantiques sans interaction, le calcul (2) du grand potentiel Ω à partir de la fonction de partition grand-canonique Z_{GC} est un exercice de dénombrement traité dans tous les ouvrages de physique statistique. Indiquons ici le résultat :

$$\text{Gaz parfait (Bose) : } \quad \Omega = k_B T \sum_j \log \left(1 - z e^{-E_j/k_B T} \right) \quad (15)$$

$$\text{Gaz parfait (Fermi) : } \quad \Omega = -k_B T \sum_j \log \left(1 + z e^{-E_j/k_B T} \right) \quad (16)$$

où la somme porte sur tous les états ϕ_j (spin et orbital) à une particule, d'énergie E_j .

Prenons un gaz de particules sans spin ou polarisées, de sorte que le degré de liberté de spin n'intervienne pas. Les états ϕ_j sont les ondes planes et on trouve, en remplaçant la somme discrète sur \mathbf{k} par une intégrale :

$$\Omega = \pm k_B T \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \log \left(1 \mp z e^{-\hbar^2 k^2 / 2m k_B T} \right) d^3 k \quad (17)$$

En utilisant le développement en série

$$\log(1 - x) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}, \quad (18)$$

on arrive à

$$\text{Gaz parfait (bosons polarisés) : } \quad \frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{5/2}} z^j \quad (19)$$

et

$$\text{Gaz parfait (fermions polarisés) : } \quad \frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^{5/2}} z^j \quad (20)$$

Le premier terme ($j = 1$) des développements (19) et (20) coïncide avec le résultat du gaz classique (13). L'apparition des termes suivants ($j \geq 2$) dans le cas des bosons ou des fermions traduit l'émergence des corrélations entre particules dues aux statistiques quantiques.

1-4 Le principe du développement du viriel

Nous considérons maintenant un gaz de particules sans spin ou polarisées, en interaction, et confiné dans une boîte de volume L^3 . Le développement du viriel est basé sur la série en puissances de la fugacité z :

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(T) z^j \quad (21)$$

Ce développement est utile quand la fugacité z est petite devant 1, c'est-à-dire μ négatif avec $|\mu| \gg k_B T$. Comme nous l'avons vu sur le cas du gaz parfait classique [cf. (14)], cela correspond à un gaz faiblement dégénéré, de petite densité dans l'espace des phases $n\lambda^3$. On peut alors se restreindre aux premiers termes du développement, que l'on suppose convergent dans cette limite $z \ll 1$ (LEBOWITZ & PENROSE 1964).

Une fois connu le développement de la pression, on en déduit les autres quantités thermodynamiques comme la densité n qui se calcule à partir de (5)

$$n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T, L^3}, \quad (22)$$

ce qui conduit à

$$n\lambda^3 = \sum_{j=1}^{\infty} j b_j(T) z^j. \quad (23)$$

Les différents coefficients $b_j(T)$ sont obtenus en identifiant terme à terme les puissances de z dans l'égalité

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = \frac{\lambda^3}{L^3} \log Z_{GC} \quad (24)$$

c'est-à-dire :

$$b_1(T) z + b_2(T) z^2 + \dots = \frac{\lambda^3}{L^3} \log (1 + z Z_1 + z^2 Z_2 + \dots) \quad (25)$$

On constate alors immédiatement que le premier coefficient du viriel $b_1(T)$ ne fait intervenir que la fonction de partition à un corps Z_1 et ne contiendra

donc pas trace des interactions :

$$b_1(T) = \frac{\lambda^3}{L^3} Z_1 \quad (26)$$

ou encore, en utilisant la relation $Z_1 = L^3/\lambda^3$:

$$\boxed{b_1(T) = 1} \quad (27)$$

Le deuxième coefficient du viriel $b_2(T)$ requiert la connaissance de Z_2 , donc de la physique à deux corps :

$$\boxed{b_2(T) = \frac{1}{Z_1} \left(Z_2 - \frac{Z_1^2}{2} \right)} \quad (28)$$

et on trouve de même :

$$\boxed{b_3(T) = \frac{1}{Z_1} \left(Z_3 - Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^3}{3} \right)} \quad (29)$$

Plus généralement, le coefficient d'ordre j , $b_j(T)$, fait intervenir la solution des problèmes à au plus j corps, et seulement eux! On a donc la propriété remarquable suivante : le développement du viriel, quand il converge, permet de relier de manière naturelle la physique à petit nombre de corps et les propriétés macroscopiques du fluide. Dans le paragraphe qui suit, nous allons nous concentrer sur les processus à deux corps, c'est-à-dire la première déviation par rapport au gaz parfait.

2 Le deuxième coefficient du viriel

D'après les résultats énoncés au paragraphe précédent, le deuxième coefficient du viriel, $b_2(T)$, contient les premières corrections au gaz parfait classique. Ces corrections correspondent à l'émergence de corrélations entre particules causées par

- les simples effets des statistiques quantiques, avec

$$b_2^{(0)} = \pm \frac{1}{2^{5/2}} \quad (30)$$

comme nous l'avons vu en (19) et (20). L'exposant (0) indique ici que le résultat est obtenu pour un gaz parfait.

- les interactions entre particules, auxquelles nous allons nous intéresser dans les paragraphes qui suivent.

D'après (28), la correction à b_2 liée aux interactions est directement proportionnelle à la correction à Z_2 , que nous noterons ΔZ_2 .

Les effets quantiques pour b_2 . Avant de passer au rôle des interactions, il est instructif de vérifier que l'on peut retrouver simplement le coefficient $b_2^{(0)}$. Pour des bosons, une base d'états possibles est donnée par les paires $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, en ne comptant qu'une fois la paire $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv (\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$ et sans restriction pour l'état $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. Pour des fermions polarisés, on ne compte également qu'une fois chaque paire mais l'état $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ est exclu. On peut regrouper les deux cas en écrivant :

$$Z_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{-\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)/(2mk_B T)} \pm \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} e^{-\hbar^2 k^2/(mk_B T)} = \frac{Z_1^2}{2} \pm \frac{Z_1}{2^{5/2}} \quad (31)$$

avec le signe + pour les bosons et - pour les fermions. On retrouve bien

$$\boxed{\text{Gaz parfait quantique : } b_2^0 = \pm \frac{1}{2^{5/2}}} \quad (32)$$

2-1 Séparation "centre de masse" et "mouvement relatif"

Considérons un gaz de bosons polarisés dans lequel les particules interagissent deux à deux par le potentiel $V(r)$, supposé isotrope. Nous réécrivons ici la fonction de partition à deux particules Z_2 sous la forme :

$$Z_2 = \left(\sum_{\mathbf{K}} e^{-\hbar^2 K^2/(4mk_B T)} \right) \left(\sum_j e^{-E_j/k_B T} \right). \quad (33)$$

Nous avons séparé le mouvement libre du centre de masse, paramétré par son impulsion $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ associé à la masse totale $2m$, et le mouvement de la variable relative, caractérisé par ses états propres $\psi_j(\mathbf{r})$ d'énergie E_j , et associé à la masse réduite $m_r = m/2$.

La partie "centre de masse" se calcule comme précédemment pour donner :

$$Z^{\text{CdM}} = \sum_{\mathbf{K}} e^{-\hbar^2 K^2 / (4mk_B T)} = 2^{3/2} Z_1 \quad (34)$$

La somme intervenant dans la partie "variable relative"

$$Z^{\text{rel}} = \sum_j e^{-E_j / k_B T} \quad (35)$$

contient la contribution de tous les états de moment cinétique (ondes partielles) $\ell = 0, 2, 4, \dots$ autorisés par le principe de symétrisation :

$$Z^{\text{rel}} = \sum_{\ell} Z_{\ell}^{\text{rel}}. \quad (36)$$

Nous supposons ici le gaz de bosons suffisamment froid pour que seules les interactions en onde s jouent un rôle (rappelons que des fermions polarisés n'ont pas d'interaction dans ce canal). La contribution des ondes partielles $\ell \neq 0$ à cette somme est donc identique à celle d'un gaz parfait et nous ne l'écrivons pas explicitement. En ce qui concerne la contribution $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$ du canal de moment cinétique $\ell = 0$ (onde s), rappelons qu'elle contient à la fois la contribution des états liés (molécules diatomiques) et des états de diffusion, asymptotiquement libres.

2-2 Interactions en onde s loin de résonance

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans une situation "normale" de l'interaction entre deux atomes, c'est-à-dire une longueur de diffusion a comparable à la portée du potentiel de van der Waals² $b \equiv R_{\text{vdW}}$. Cette hypothèse vient simplifier notablement le calcul du coefficient b_2 , à la fois en ce qui concerne la contribution des états de diffusion et des états liés [cf. figure 2] :

2. Rappelons que le rayon de van der Waals est défini à partir de la masse d'un atome et du coefficient C_6 décrivant l'interaction de van der Waals par

$$R_{\text{vdW}} = \frac{1}{2} \left(\frac{mC_6}{\hbar^2} \right)^{1/4}. \quad (37)$$

Pour les espèces atomiques utilisées dans les expériences, ce rayon de van der Waals est de l'ordre de quelques nanomètres.

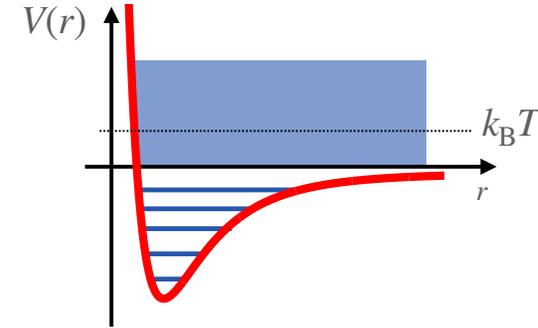


FIGURE 2. États de diffusion et états liés pour le problème à deux corps. Dans le cas non résonnant ($|a| \ll \lambda$), nous allons nous concentrer essentiellement sur les états de diffusion, et plus particulièrement sur ceux dont l'énergie ne dépasse pas quelques $k_B T$. Dans le cas résonnant ($|a| \gg \lambda$), nous prendrons également en compte la contribution du dernier état lié, dont l'énergie $\sim -\hbar^2 / ma^2$ est (en valeur absolue) petite devant $k_B T$.

- Les états libres qui contribuent de façon significative à Z_2^{rel} sont tels que $\hbar^2 k^2 / 2m \lesssim$ quelques $k_B T$, c'est-à-dire $k \lesssim 1/\lambda$. Or les énergies thermiques $k_B T$ des gaz quantiques sont très inférieures à $E_{\text{vdW}} \equiv \hbar^2 / mR_{\text{vdW}}^2$, qui est de l'ordre de la dizaine de microkelvin, voire plus pour les atomes légers. D'ailleurs, si ce n'était pas le cas, les collisions ne se produiraient pas uniquement en onde s . On a donc $a \ll \lambda$, soit pour tous les vecteurs d'onde \mathbf{k} pertinents la relation $ka \ll 1$.
- Le potentiel d'interaction entre deux atomes contient généralement de nombreux états liés, et l'énergie du dernier lié en absence d'une résonance de diffusion est de l'ordre de $-E_{\text{vdW}}$. Comme nous venons de le dire, cette énergie de liaison est en valeur absolue grande devant $k_B T$. S'il y avait dans le gaz un processus de collision qui établissait un équilibre entre les populations des états libres et celles des états liés, essentiellement tous les atomes se trouveraient sous forme de dimères (ou de trimères, tétramères, etc.). Heureusement, ce n'est pas le cas : la formation de dimères peut se produire, mais c'est un processus marginal à l'échelle de temps des expériences. D'ailleurs, sitôt formés, ces

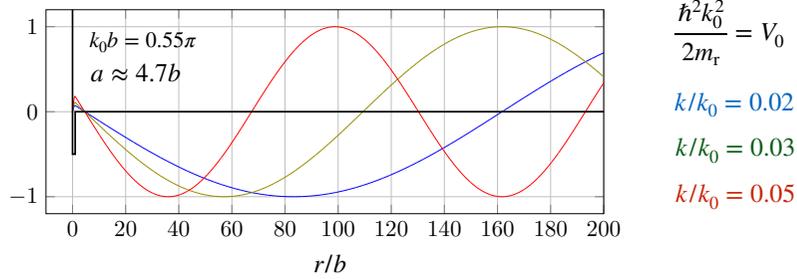


FIGURE 3. Etats de diffusion dans un puits carré de profondeur V_0 et de largeur b , avec un nœud commun aux fonctions d'onde en $r = a$.

dimères s'échappent généralement du piège confinant les atomes car l'énergie libérée lors de leur formation est supérieure à la profondeur du piège.

Grâce à ces deux remarques, on limite donc le calcul de $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$ à la seule contribution des états de diffusion en onde s , repérés par leur impulsion $\hbar k$ et leur énergie $\hbar^2 k^2 / 2m_r = \hbar^2 k^2 / m$. La seule difficulté est de les dénombrer correctement, sachant que le comportement asymptotique de leur fonction d'onde réduite est pour $ka \ll 1$ (voir figure 3) :

$$u(r) \approx \sin[k(r - a)]. \quad (38)$$

La présence du terme en $-ka$ dans le sinus vient en effet modifier leur densité d'états. Supposons que la particule relative est insérée au centre d'une sphère de rayon R , avec des conditions aux limites de Dirichlet sur les parois de la sphère. Les nombres d'onde k doivent donc satisfaire la condition de quantification

$$k_n = n \frac{\pi}{R - a}, \quad n \text{ entier positif}, \quad (39)$$

au lieu de $k_n = n\pi/R$ en absence d'interaction. Le passage d'une somme discrète à une intégrale pour le calcul de $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$ donne alors :

$$\begin{aligned} Z_{\ell=0}^{\text{rel}} &= \sum_n e^{-\hbar^2 k_n^2 / (mk_B T)} = \frac{R - a}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\hbar^2 k^2 / (mk_B T)} dk \\ &= \frac{R - a}{\sqrt{2} \lambda}. \end{aligned} \quad (40)$$

La contribution en R/λ serait présente même en l'absence d'interactions et elle vient s'ajouter à celle des autres ondes partielles pour donner, tous calculs faits, la fonction de partition Z_2 du gaz parfait quantique. Le terme intéressant ici est celui lié aux interactions, en a/λ . Une fois multiplié par $Z^{\text{CdM}} = 2^{3/2} Z_1$ [cf. (34)], ce terme conduit à la contribution des interactions à la fonction de partition Z_2 recherchée :

$$\Delta Z_2 = -2Z_1 \frac{a}{\lambda} \quad (41)$$

d'où l'on déduit le deuxième coefficient du viriel

$$\boxed{\text{Bosons hors résonance } (a \ll \lambda) : \quad b_2(T) = \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{2a}{\lambda}} \quad (42)$$

avec les deux contributions $b_2^{(0)} = 2^{-5/2}$ provenant des statistiques quantiques et $b_2^{(\text{int.})} = -2a/\lambda$ provenant des interactions.

2-3 Pression et énergie interne du gaz

Comme nous l'avons expliqué en §1-1, la connaissance du grand potentiel (à un ordre donné en z) permet de retrouver les autres fonctions d'état au même ordre. Nous allons utiliser ici le développement du viriel à l'ordre 2 pour retrouver l'expression de l'énergie d'interaction dans le régime faiblement dégénéré.

Nous partons de l'expression de Ω :

$$\Omega(T, L^3, \mu) \approx -k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} [z + b_2(T)z^2] \quad (43)$$

dont nous déduisons le nombre de particules moyen

$$N = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{L^3, T} \approx \frac{L^3}{\lambda^3} (z + 2b_2 z^2) \quad (44)$$

et l'entropie :

$$\frac{S}{k_B} = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial (k_B T)} \right)_{L^3, \mu} \approx \frac{L^3}{\lambda^3} \left[\frac{5}{2} (z + b_2 z^2) - \frac{\mu}{k_B T} (z + 2b_2 z^2) + z^2 T \frac{db_2}{dT} \right]. \quad (45)$$

À cet ordre du calcul, la relation (44) entre nombre de particules et fugacité peut s'inverser pour donner :

$$z \approx n\lambda^3 - 2b_2(n\lambda^3)^2, \quad (46)$$

ce qui donne à cet ordre pour la relation pression-densité :

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} \approx [n\lambda^3 - 2b_2(n\lambda^3)^2] + b_2(n\lambda^3)^2 = n\lambda^3 - b_2(n\lambda^3)^2. \quad (47)$$

Si on se limite aux corrections liées aux statistiques quantiques, $b_2(T) = \pm 2^{-5/2}$, on constate qu'il y a, pour une densité et une température fixées, un abaissement de pression pour les bosons ($b_2 > 0$) et un accroissement pour les fermions ($b_2 < 0$), par rapport au cas d'un gaz parfait classique. Cela se comprend à partir du postulat de (anti)symétrisation. Par exemple, pour des fermions, le fait d'empêcher deux particules d'être présentes au même endroit constitue en quelque sorte une diminution de l'espace accessible, d'où une augmentation de la pression.

Exprimons maintenant l'énergie interne du gaz en fonction de T, L^3 et N (ou $n = N/L^3$) :

$$E = \Omega + TS + \mu N = Nk_B T \left[\frac{3}{2} + n\lambda^3 \left(T \frac{db_2}{dT} - \frac{3b_2}{2} \right) \right] \quad (48)$$

On retrouve bien entendu le terme dominant $\frac{3}{2}k_B T$ correspondant à l'énergie cinétique d'un gaz parfait classique. Examinons les corrections à ce modèle classique en passant en revue les deux contributions à $b_2(T)$ trouvées en (42).

— Le terme lié aux statistiques quantiques, $b_2^{(0)} = 2^{-5/2}$, ne dépend pas de la température. Il correspond à un abaissement de l'énergie (pour des bosons) donné par

$$\text{Bosons : } \Delta E^{(0)} = -\frac{3}{2^{7/2}} Nk_B T n\lambda^3. \quad (49)$$

On trouverait la même contribution au signe près pour un gaz de fermions polarisés :

$$\text{Fermions : } \Delta E^{(0)} = +\frac{3}{2^{7/2}} Nk_B T n\lambda^3. \quad (50)$$

On voit bien apparaître ici l'infiniment petit du développement, la densité dans l'espace des phases $n\lambda^3$.

— Le terme lié aux interactions, issu de $b_2^{(\text{int.})} = -2a/\lambda$, conduit à la modification de l'énergie

$$\text{Bosons : } \Delta E^{(\text{int.})} = gnN \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (51)$$

Ce terme serait absent pour un gaz de fermions polarisés (pas d'interaction en onde s).

La forme trouvée pour $\Delta E^{(\text{int.})}$ est intéressante à au moins deux titres. Tout d'abord, elle permet de vérifier que la longueur de diffusion a est bien le seul paramètre du potentiel d'interaction $V(r)$ qui joue un rôle dans le problème à N corps, au moins dans le régime faiblement dégénéré. Ce résultat important ne nécessite pas que le potentiel $V(r)$ puisse être traité par l'approximation de Born.

Par ailleurs, le coefficient numérique apparaissant dans (51) est instructif. Dans ce cours, nous serons fréquemment amenés à modéliser le potentiel d'interaction par une interaction de contact (éventuellement régularisée), conduisant à la même longueur de diffusion a que le potentiel réel. Cela revient à remplacer l'hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3r d^3r' \quad (52)$$

où $\hat{n}(\mathbf{r})$ est l'opérateur associé à la densité au point \mathbf{r} , par

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int [\hat{n}(\mathbf{r})]^2 d^3r \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (53)$$

Pour un système homogène, on attend donc pour la moyenne de l'énergie d'interaction

$$\Delta E^{(\text{int.})} = \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \frac{g}{2} \langle n^2(0) \rangle L^3 \quad (54)$$

ce qui entraîne, par comparaison avec (51), que l'on a dans le régime faiblement dégénéré :

$$\langle n^2(0) \rangle = 2n^2. \quad (55)$$

On retrouve ici l'effet de groupement de type Hanbury-Brown et Twiss, caractéristique d'une statistique de champ classique avec des fluctuations gaussiennes (HANBURY-BROWN & TWISS 1956).

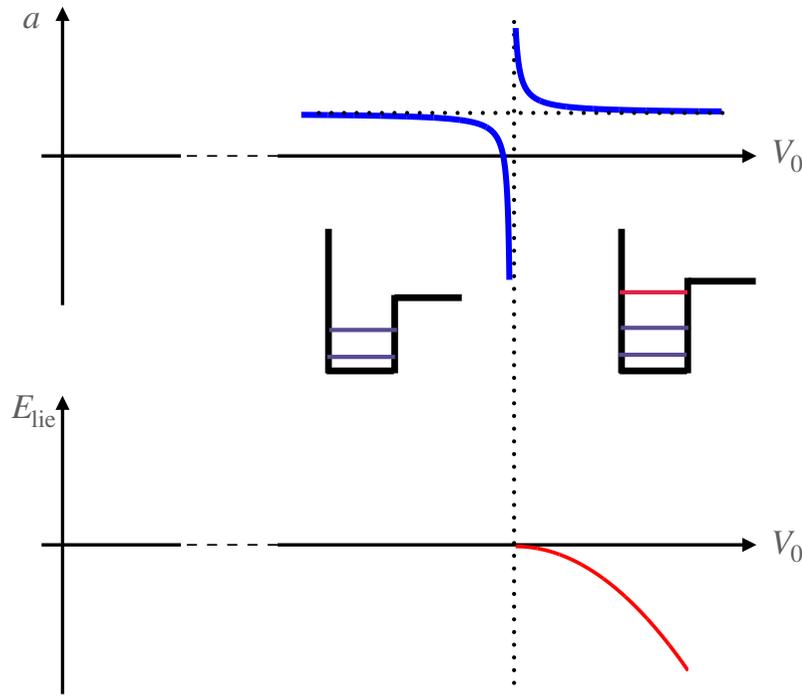


FIGURE 4. Apparition d'un état lié et divergence de la longueur de diffusion a lors d'une résonance de diffusion.

2-4 Le voisinage d'une résonance de diffusion

Une résonance de diffusion est caractérisée par une longueur de diffusion a anormalement grande, c'est-à-dire $|a| \gg b$ où b est la portée du potentiel. Au voisinage d'une telle résonance, l'évaluation du coefficient b_2 doit être modifiée.

Rappelons pour commencer la nature de ces résonances, en supposant que l'on peut modifier finement un des paramètres du potentiel d'interaction $V(r)$ en faisant apparaître un nouvel état lié dans ce potentiel³. On a

3. La description qui suit s'applique sans modification au cas d'une résonance de Fano-

le résultat général suivant, connu sous le nom de théorème de Levinson [cf. figure 4] :

- Juste avant que l'état lié n'apparaisse, la longueur de diffusion est grande et négative.
- Au seuil d'apparition de l'état lié, la longueur de diffusion est infinie.
- Juste après l'apparition de l'état lié, la longueur de diffusion est grande et positive.

Dans ces conditions, il est indispensable de prendre en compte la contribution de cet état faiblement lié à la fonction de partition car sa fonction d'onde est très étendue ($\sim a$) et il peut être significativement peuplé lors de collisions entre atomes. Par ailleurs, son énergie (négative) :

$$E_{\text{lie}} \approx -\frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (56)$$

peut devenir très faible devant $k_B T$ et une population significative de cet état lié est possible sans que le gaz ne soit entièrement sous forme de dimères.

Par ailleurs, le déphasage $\delta_0(k)$ varie très vite avec k et il n'est plus légitime de supposer $\delta_0(k) \approx -ka$ comme nous l'avons fait en (38). Il faut revenir à l'expression

$$u(r) \approx \sin[kr + \delta_0(k)] \quad (57)$$

où le déphasage se déduit de l'expression générale

$$\tan[\delta_0(k)] = -ka. \quad (58)$$

Comme dans le cas non résonnant, les interactions viennent changer la densité d'états qui intervient dans la sommation sur tous les nombres d'onde possibles. En prenant ici encore des conditions aux limites de Dirichlet dans une boîte sphérique de rayon R , on a maintenant la condition de quantification sur k :

$$k_n R + \delta_0(k_n) = n\pi, \quad n \text{ entier positif} \quad (59)$$

Feshbach, au moins pour le cas d'une résonance large. Pour une étude dans le cas d'une résonance étroite, on pourra consulter ENDO & CASTIN (2016b)

de sorte que l'intervalle entre deux valeurs de k successives vérifie

$$(k_{n+1} - k_n) \left(R + \frac{d\delta_0}{dk} \right) = \pi. \quad (60)$$

On peut alors reprendre le calcul de la fonction de partition $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$ comme en (40) pour trouver :

$$Z_{\ell=0}^{\text{rel}} = (\dots) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\delta_0}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / mk_B T} dk + \left[e^{-E_{\text{lie}} / k_B T} \right]. \quad (61)$$

Dans cette expression, le premier terme (...) représente la contribution de R : elle est indépendante des interactions et sera donc omise dans ce qui suit. Par ailleurs, le dernier terme correspond à la contribution de l'éventuel état lié : cette contribution ne doit être prise en compte que du côté $a > 0$, puisque cet état n'existe pas tant que a est négatif; les crochets autour de ce terme indiquent cette restriction. Dans ce qui suit, on multipliera cette contribution par la fonction de Heaviside $\Theta(a)$ pour prendre en compte les deux possibilités.

En utilisant l'expression de la fonction de partition pour le centre de masse, $Z^{\text{CdM}} = 2^{3/2} Z_1$ [cf. (34)], on trouve alors la contribution des interactions au deuxième coefficient du viriel⁴ :

$$b_2^{(\text{int})} = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\delta_0}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / mk_B T} dk + 2^{3/2} e^{-E_{\text{lie}} / k_B T} \Theta(a). \quad (63)$$

Calculons explicitement l'intégrale sur k dans le cas d'une résonance de diffusion. La relation $\tan[\delta_0(k)] = -ka$ se différencie pour donner :

$$\frac{d\delta_0}{dk} = \frac{-a}{1 + k^2 a^2}. \quad (64)$$

La variation de $\delta_0(k)$ avec k est représentée sur la figure 5. Pour $a < 0$, $\delta_0(k)$ est une fonction croissante qui part de la valeur 0 en $k = 0$ pour atteindre

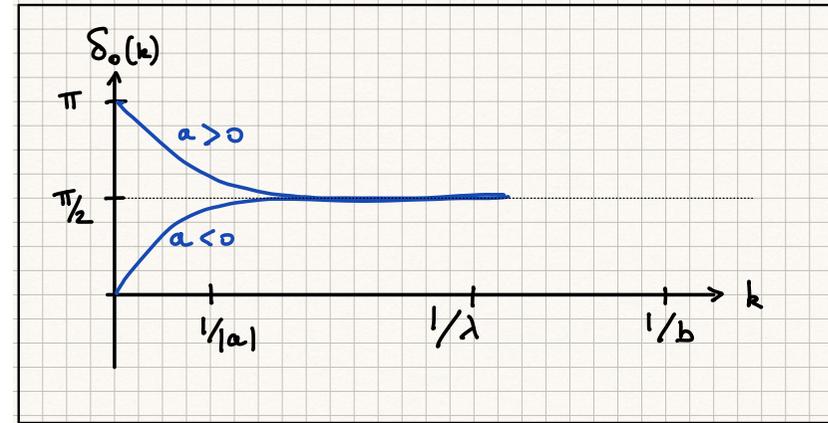


FIGURE 5. Représentation schématique de la variation du déphasage en onde s $\delta_0(k)$ au voisinage d'une résonance de diffusion ($|a| \gg \lambda$).

une valeur proche de $\pi/2$ quand k devient supérieur à $1/a$. Pour $a > 0$, $\delta_0(k)$ est une fonction décroissante, qui part de π en $k = 0$ pour tendre elle aussi vers $\pi/2$ aux grands k .

Si on définit la résonance comme la zone où la longueur de diffusion $|a|$ est beaucoup plus grande que la longueur d'onde thermique λ , on voit que dans ce cas, les variations de l'intégrande de (63) sont dominées par $\frac{d\delta_0}{dk}$ et on peut prendre $e^{-\hbar^2 k^2 / mk_B T} \approx 1$ dans cette intégrale. Par ailleurs, l'état lié quand il existe ($a > 0$) a également une contribution très simple à (63) : $e^{-E_{\text{lie}} / k_B T} \approx 1$. On trouve donc (HO & MUELLER 2004) :

$$b_2^{(\text{int})} \approx \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-a}{1 + k^2 a^2} dk + 2^{3/2} \Theta(a) \quad (65)$$

c'est-à-dire :

$$a < 0 : \quad b_2^{(\text{int})} \approx \sqrt{2} \quad (\text{pas d'état lié}) \quad (66)$$

et

$$a > 0 : \quad b_2^{(\text{int})} \approx -\sqrt{2} + 2^{3/2} = \sqrt{2}. \quad (67)$$

Le coefficient b_2 lié aux interactions ne présente donc pas de discontinuité au passage à la résonance et il prend en ce point une valeur "universelle",

4. On retrouve la formule générale de BETH & UHLENBECK (1937)

$$b_2^{(\text{int})} = \frac{2^{3/2}}{\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \int_0^{\infty} \frac{d\delta_{\ell}}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / mk_B T} dk + 2^{3/2} \sum_j e^{-E_j / k_B T} \quad (62)$$

restreinte ici au cas de l'onde s , $\ell = 0$. La somme discrète sur j correspond aux états liés.

c'est-à-dire indépendante de la température :

$$\boxed{\text{Bosons à résonance : } b_2^{(\text{int})} = \sqrt{2}.} \quad (68)$$

Nous retrouverons ce même comportement, à un facteur 2 près, pour le gaz de Fermi à deux composantes dans le régime unitaire. En ajoutant la contribution liée à la statistique, on a donc :

$$\boxed{\text{Bosons à résonance : } b_2 = \frac{1}{2^{5/2}} + \sqrt{2}.} \quad (69)$$

3 Le gaz de Fermi unitaire

Nous nous intéressons dans cette partie à un gaz de particules de spin (ou de pseudo-spin) égal à 1/2, suffisamment froid pour que les interactions soient dans le régime de l'onde s (figure 6). Ce gaz présente une résonance de diffusion de sorte que l'interaction $\uparrow\downarrow$ correspond à une longueur de diffusion a infinie (figure 4). Par ailleurs, on suppose le gaz suffisamment dilué pour que la distance entre particules reste grande devant la portée b du potentiel (ou sa portée effective r_0) de sorte que b et r_0 n'interviennent pas dans la physique du problème. On parle alors de gaz de Fermi unitaire puisque les interactions atteignent la valeur la plus grande possible, compte tenu de la contrainte imposée par l'unitarité de la physique quantique. Rappelons qu'il n'y a pas d'interaction en onde s pour une paire $\uparrow\uparrow$ ou $\downarrow\downarrow$, en raison de l'antisymétrie d'échange entre deux fermions.

Ce paradigme du gaz de Fermi unitaire se rencontre dans plusieurs circonstances dans la nature, au moins de manière approchée. On le trouve par exemple dans les étoiles à neutrons : la longueur de diffusion a est de l'ordre de 18 fm alors que la portée effective r_0 n'est que de 2.8 fm. On peut donc envisager des configurations où la distance entre particules est grande devant r_0 (donc un système dilué), mais petite devant a (donc une interaction forte). D'autres systèmes physiques s'approchant du régime d'un gaz de Fermi unitaire sont le plasma quark-gluon ou certains supraconducteurs à haute température critique.

Le gaz de Fermi unitaire constitue un système universel dans la mesure

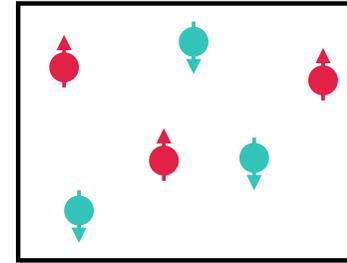


FIGURE 6. Gaz de Fermi à deux composantes, composé d'atomes de spins \uparrow et \downarrow

où il ne présente aucune échelle de longueur associée aux interactions⁵. C'est donc un banc d'essai remarquable pour les différentes approches des systèmes de particules fortement corrélées. Pour le développement du viriel qui nous intéresse ici, cette invariance d'échelle se traduit par le fait que les coefficients b_n du développement sont de purs nombres. Nous avons déjà constaté ce point au paragraphe §2-4 sur le cas de bosons polarisés pour le coefficient b_2 , mais pour le cas du gaz de Fermi unitaire, il est en fait valable pour tous les b_n comme nous l'expliquerons en §3-2.

Des efforts considérables ont été fait au cours des 15 dernières années pour aller au delà du coefficient b_2 . On dispose désormais de valeurs théoriques fiables pour b_3 et pour b_4 , validées (au moins dans une certaine mesure) par l'expérience. Nous n'allons pas détailler ici les calculs complexes qui ont menés à ces prédictions, mais simplement esquisser la progression qui s'est faite durant ces dernières années. Le lecteur désireux d'approfondir la question pourra consulter les articles de revues de LIU (2013) et ENDO (2020).

5. Pour le gaz de Bose unitaire, les effets liés au phénomène d'Efimov (apparition d'une série infinie d'états liés à trois corps quand $|a| = +\infty$) viennent introduire une échelle de longueur spécifique, ce qui brise l'invariance d'échelle. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'article de CASTIN & WERNER (2013) qui explique comment obtenir le coefficient b_3 dans ce cas. Une situation similaire se produit si les deux états de (pseudo-)spin du gaz de Fermi unitaire ont des masses très différentes. Nous supposons ici que les deux masses m_\uparrow et m_\downarrow sont égales; il n'y a donc pas d'effet Efimov, d'où l'universalité annoncée.

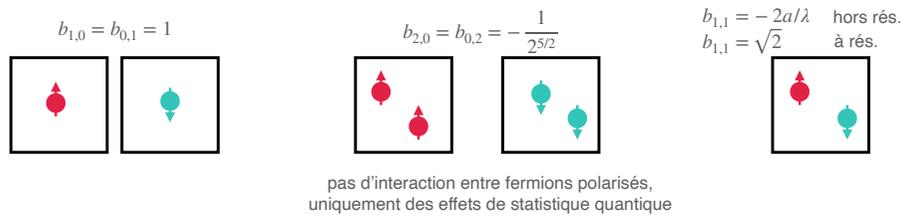


FIGURE 7. Les premiers coefficients du viriel pour un gaz de spin 1/2.

3-1 Développement du viriel pour un gaz spineur

Pour décrire l'équilibre thermodynamique d'un gaz à deux composantes, on est amené à introduire un potentiel chimique pour chacune d'elles, que nous noterons μ_+ et μ_- . Nous supposons ici que les deux composantes ont la même masse et la même énergie pour l'état fondamental à une particule $k = 0$. Elles sont à la même température et occupent le même volume L^3 de sorte que la fonction de partition grand-canonique s'écrit maintenant

$$Z_{GC} = \sum_{N_+, N_-} z_+^{N_+} z_-^{N_-} Z_{N_+, N_-}. \quad (70)$$

La fonction de partition canonique Z_{N_+, N_-} décrit un système de N_+ particules dans l'état \uparrow et N_- particules dans l'état \downarrow , le tout à la température T . La relation entre Z_{GC} et le grand potentiel est inchangée :

$$\Omega = -k_B T \log Z_{GC}, \quad (71)$$

de sorte qu'on arrive à un développement pour Ω

$$\Omega = -k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} \sum_{i,j} b_{i,j} z_+^i z_-^j \quad (72)$$

que l'on espère rapidement convergent, au moins aux faibles densités dans l'espace des phases.

La valeur des deux premiers coefficients $b_{1,0}$ et $b_{0,1}$ est obtenue en mettant une seule particule (\uparrow ou \downarrow) dans la boîte de volume L^3 et elle est donc inchangée par rapport au cas à une composante (cf. figure 7) :

$$b_{1,0} = b_{0,1} = 1 \quad (73)$$

Pour évaluer les termes d'ordre 2, séparons les deux cas possibles :

- Les deux particules sont dans le même état de spin, $N_+ = 2, N_- = 0$ ou $N_+ = 0, N_- = 2$. On est alors ramené au cas déjà étudié précédemment de fermions polarisés, sans interaction dans l'onde s . Le coefficient du viriel correspondant est dû uniquement aux effets statistiques et on a donc [cf. (32)]

$$b_{2,0} = b_{0,2} = -\frac{1}{2^{5/2}} \quad (74)$$

- Les deux particules sont dans des états de spins opposés $N_+ = 1, N_- = 1$. On peut considérer :

- Des états symétriques de spin, donc antisymétriques d'espace (ondes partielles impaires), pour lesquels il n'y aura pas d'interaction en onde s et une contribution à $b_{1,1}$ due aux statistiques quantiques en $-2^{-5/2}$ comme ci-dessus.
- Des états antisymétriques de spin, donc symétriques d'espace (ondes partielles paires). On retrouve alors le même résultat que pour les bosons polarisés [cf. (42) et (68)] avec une contribution due aux statistiques quantiques en $+2^{-5/2}$ et une contribution due aux interactions égale à $-2a/\lambda$ hors résonance et à $\sqrt{2}$ à résonance.

En sommant les contributions de ces deux classes d'états, on arrive donc à

$$\text{Hors résonance : } b_{1,1} = -\frac{2a}{\lambda} \quad \text{À résonance : } b_{1,1} = \sqrt{2} \quad (75)$$

Dans la suite, nous allons considérer un gaz de Fermi équilibré, pour lequel $z_+ = z_- \equiv z$. En notant $n_s = 2$ le nombre d'états de spin, le grand potentiel s'écrit alors à l'ordre 2 inclus en fugacité :

$$\Omega \approx -n_s k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} [z + b_2 z^2] \quad (76)$$

avec le coefficient b_2 "effectif" :

$$b_2 = \frac{1}{2} (b_{2,0} + b_{0,2} + b_{1,1}). \quad (77)$$

On trouve alors hors résonance :

$$\text{Gaz de Fermi équilibré hors résonance : } b_2 = -\frac{1}{2^{5/2}} - \frac{a}{\lambda} \quad (78)$$

et à résonance (HO & MUELLER 2004)

$$\text{Gaz de Fermi équilibré à résonance : } b_2 = -\frac{1}{2^{5/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad (79)$$

soit un effet des interactions divisé par 2 par rapport au cas bosonique : chaque particule n'interagit qu'avec la moitié des particules restantes, à savoir celles qui ont un spin opposé au sien.

Énergie interne. Comme nous l'avons fait dans le cas de bosons polarisés en §2-3, il est intéressant d'étudier l'expression de l'énergie interne du gaz en fonction des densités n_+ et n_- . Nous nous plaçons ici dans le cas non-résonant et nous partons du grand potentiel à l'ordre deux inclus

$$\Omega \approx -k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} \left[z_+ + z_- - \frac{1}{2^{5/2}} (z_+^2 + z_-^2) - \frac{2a}{\lambda} z_+ z_- \right]. \quad (80)$$

Le calcul se déroule comme dans le cas bosonique. On commence par évaluer les nombres moyens de particules N_{\pm} et l'entropie S en dérivant Ω par rapport à μ_{\pm} et à T . On arrive notamment à (HO & MUELLER 2004)

$$z_+ \approx n_+ \lambda^3 + \frac{1}{2^{3/2}} (n_+ \lambda^3)^2 + \frac{2a}{\lambda} (n_+ \lambda^3) (n_- \lambda^3) \quad (81)$$

et un résultat similaire pour z_- , puis à la contribution des interactions à l'énergie interne :

$$\Delta E^{(\text{int})} = g n_+ n_- L^3 \quad \text{avec } g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m}. \quad (82)$$

Ce résultat correspond bien à celui attendu pour une interaction de contact entre les deux composantes :

$$\hat{H}_{\text{int}} = g \int \hat{n}_+(\mathbf{r}) \hat{n}_-(\mathbf{r}) d^3r, \quad (83)$$

avec des fluctuations non corrélées des densités spatiales des deux composantes.

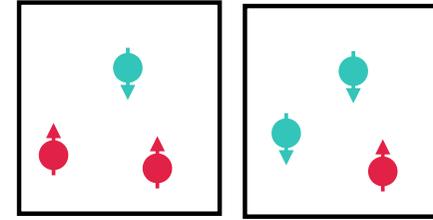


FIGURE 8. Les deux situations à prendre en compte pour le calcul du coefficient b_3 . Ces deux situations conduisent à des résultats identiques si $m_{\uparrow} = m_{\downarrow}$.

3-2 Le coefficient b_3

Le calcul du coefficient b_3 (et des suivants) est notoirement plus difficile puisqu'il implique la résolution du problème à (au moins) trois corps, avec la détermination de toutes ses énergies propres (figure 8). Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur le cas résonant ($a = \infty$) qui est la situation la plus discriminante en ce qui concerne la validité des différentes approches possibles.

Du fait de l'invariance d'échelle qui apparaît dans le régime unitaire $a = \infty$, le coefficient $b_3(T)$ – ainsi que tous les autres coefficients du viriel – ne peut être qu'un pur nombre. En effet, $b_n(T)$ est par construction une fonction de la température seulement, et pas du potentiel chimique μ . Par ailleurs, il est sans dimension et la température ne peut donc y intervenir que de manière adimensionnée. Quand la longueur de diffusion n'est pas infinie, elle fournit l'échelle d'énergie $E_a = \hbar^2/m a^2$ et on peut donc trouver $b_n(T)$ comme fonction de la variable $x = k_B T/E_a$. C'est bien ce qui s'est produit quand nous sommes arrivés au résultat $b_2^{(\text{int})} = -2a/\lambda$ dans le cas non résonant. En revanche, dans le cas résonant, la seule quantité sans dimension possible qui permettrait de "faire varier" $b_n(T)$ est $k_B T/\mu$, mais elle n'est pas éligible puisqu'elle dépend de μ . Les coefficients $b_n(T)$ sont donc des nombres indépendants de T dans le régime unitaire $a = \infty$.

Le calcul de ce coefficient b_3 dans le régime unitaire n'a été fait qu'assez récemment, avec au départ des résultats contradictoires. Le premier résultat publié (RUPAK 2007), $b_3 \approx 1.11$, dont on sait désormais qu'il est incorrect, utilisait une approche "théorie des champs". Deux ans plus tard, LIU,

HU et al. (2009) ont publié la valeur considérée désormais comme correcte et confirmée par l'expérience

Gaz de Fermi équilibré à résonance : $b_3 = \frac{1}{3^{5/2}} - 0.3551 \dots = -0.2910 \dots$

(84)

Ils se sont appuyés sur un travail précédent de WERNER & CASTIN (2006), qui avaient réussi à calculer quasi-analytiquement le spectre entier de trois particules identiques dans un piège harmonique isotrope, pour une interaction de portée nulle et résonante. LIU, HU et al. (2009) ont alors calculé la fonction de partition à trois corps dans un piège de fréquence ω et ils en ont déduit le coefficient $b_{3,\text{trap}}$ correspondant. Le retour vers un gaz homogène s'est fait via une approximation de densité locale qui devient exacte dans la limite $\omega \rightarrow 0$ et qui conduit à :

$$b_n = n^{3/2} b_{n,\text{trap}}. \quad (85)$$

Le résultat de LIU, HU et al. (2009) a ensuite été confirmé théoriquement par plusieurs auteurs, soit à partir des méthodes utilisant la théorie des champs (KAPLAN & SUN 2011 ; LEYRONAS 2011), soit par une solution numérique du problème à trois corps (RAKSHIT, DAILY et al. 2012). Comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, ce résultat est également en excellent accord avec l'expérience.

3-3 Résultats expérimentaux

La première mesure de la thermodynamique du gaz de Fermi dans le régime unitaire a été menée en 2009-10 dans le groupe de Christophe Salomon et Frédéric Chevy à l'ENS (NASCIMBÈNE, NAVON et al. 2010). L'expérience est menée sur une assemblée d'environ 10^5 atomes de ${}^6\text{Li}$, placés dans un champ magnétique $B = 834\text{ G}$ (centre d'une résonance de Fano-Feshbach large) et préparés dans un mélange équilibré des deux états Zeeman de plus basse énergie. On réalise ainsi un système de pseudospin $1/2$. La gamme de température explorée va de 150 nK à $1.3\ \mu\text{K}$. Les atomes sont confinés dans un piège harmonique allongé dans la direction x_3 (cf. figure

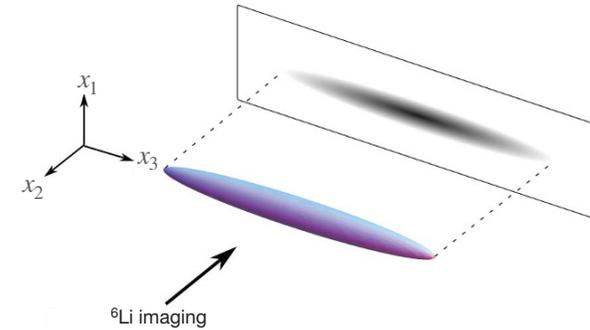


FIGURE 9. Imagerie d'un gaz de Fermi unitaire de lithium 6, avec quelques impuretés de lithium 7 utilisées pour mesurer la température. La longueur du gaz piégé selon la direction x_3 est de quelques centaines de micromètres. Figure extraite de NASCIMBÈNE, NAVON et al. (2010).

9), avec le potentiel :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_3^2x_3^2. \quad (86)$$

On mesure *in situ* la densité totale du gaz, $\bar{n}(x_3) = \bar{n}_+(x_3) + \bar{n}_-(x_3)$, intégrée le long des axes x_1 et x_2 :

$$\bar{n}(x_3) = \iint n(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2. \quad (87)$$

L'intégration le long de l'axe d'imagerie x_2 résulte naturellement de la procédure d'imagerie, et celle le long de l'axe x_1 est faite numériquement à partir des images à deux dimensions dans le plan (x_1, x_3) . Cette mesure permet de remonter à la pression du gaz $P(\mu, T)$ grâce à une remarque ingénieuse publiée par HO & ZHOU (2010), et établie indépendamment par Sylvain Nascimbene :

— On utilise la relation entre densité et pression du gaz, déduite des relations thermodynamiques déjà mentionnées :

$$n_+ = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu_+} \right)_{T, \mu_-}. \quad (88)$$

6. Nous notons ici les trois coordonnées d'espace x_1, x_2, x_3 plutôt que x, y, z pour éviter toute confusion avec la fugacité z .

et idem pour n_- . Ici, comme le gaz est équilibré, on prendra $\mu_+ = \mu_-$ et donc

$$n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T. \quad (89)$$

- On suppose que le gaz est suffisamment étendu pour être bien décrit par l'approximation de densité locale, c'est-à-dire que l'état d'équilibre en un point \mathbf{x} est celui d'un gaz homogène de potentiel chimique $\mu(\mathbf{x}) = \mu_c - V(\mathbf{x})$, où μ_c est le potentiel chimique au centre du piège ($\mathbf{x} = 0$ avec par convention $V(0) = 0$).
- On transforme alors l'intégrale sur l'espace de (87) en une intégrale sur le potentiel chimique :

$$\bar{n}(x_3) = 2\pi \int_0^\infty n(r, x_3) r dr = \frac{2\pi}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\mu(x_3)} \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T d\mu = \frac{2\pi}{\omega^2} P[T, \mu(x_3)]. \quad (90)$$

On a donc directement accès à la pression attendue pour un gaz homogène de paramètres $[T, \mu(x_3) = \mu_c - m\omega_3^2 x_3^2/2]$. Compte tenu de l'invariance d'échelle, cette quantité n'est en fait fonction que de $\mu(x_3)/k_B T$ de sorte qu'une seule image suffit en principe pour obtenir toute l'équation d'état depuis $z = 0$ (sur les bords du piège où $\mu \rightarrow -\infty$) jusqu'à $z = \exp(\mu_c/k_B T)$.

La température du gaz est quant à elle mesurée en insérant des impuretés de faible densité (quelques milliers d'atomes de lithium 7) et en mesurant leur distribution en vitesse par une méthode de temps de vol (SPIEGELHALDER, TRENKWALDER et al. 2009).

Un exemple de résultat est montré sur la figure 10, extraite de la thèse de Sylvain Nascimbène. On y trace les variations de la pression, normalisée par la pression du gaz parfait de fermions, $h(z) = P(z)/P_{\text{ideal}}(z)$ en fonction de la variable $\zeta = 1/z$. Le domaine d'applicabilité du développement du viriel ($z \lesssim 1$) correspond donc à la zone $\zeta \gtrsim 1$. On a représenté un ajustement des données avec un polynôme de degré 4 :

$$h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4, \quad (91)$$

les trois premiers coefficients étant fixés à leurs valeurs connues à l'époque :

$$b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad b_3 = -0.2910. \quad (92)$$

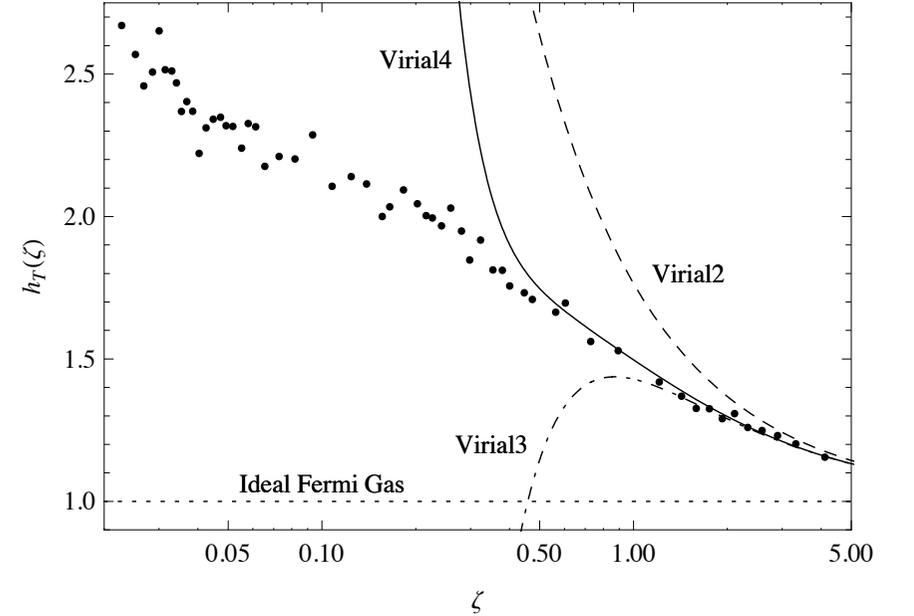


FIGURE 10. Mesure expérimentale de la pression P d'un gaz de Fermi dans le régime unitaire par le groupe de l'ENS [cf. NASCIMBÈNE, NAVON et al. (2010)]. On a tracé ici $h = P/P_{\text{ideal}}$ en fonction de l'inverse de la fugacité $\zeta = 1/z$. La zone des petites fugacités (grand ζ) est ajustée par un polynôme de degré 4 en z . Le résultat de cet ajustement conduit à $b_4 = -4^{-5/2} + 0.096 = 0.065$. Figure extraite de la thèse de Sylvain Nascimbène.

On déduit alors de cet ajustement une valeur de b_4 : $b_4 = 0.065$ (15).

La vérification de la valeur de b_3 est détaillée sur la figure 11. On y montre à gauche l'écart de la pression (en unité de P_{ideal}) à la loi $z + b_2 z^2$, en fonction de z^3 . L'ajustement par une fonction $b_3 z^3$ dépend de la valeur z_{cutoff} utilisée. Le rectangle gris indique les valeurs de b_3 compatibles avec les données.

Deux ans plus tard, une nouvelle série de données a été publiée par le groupe de Martin Zwierlein au MIT, également à partir d'un gaz de lithium 6 (KU, SOMMER et al. 2012). Nous ne rentrerons pas ici dans la description

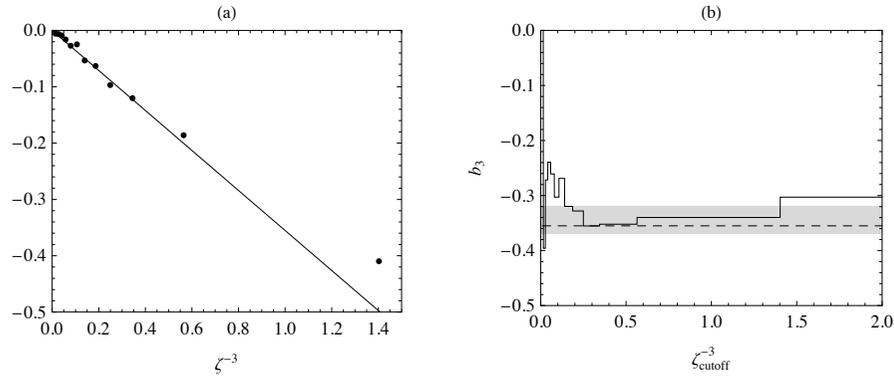


FIGURE 11. Détermination de b_3 (voir texte). Figure extraite de la thèse de Sylvain Nascimbène.

détaillée de cette expérience, dont nous donnons un des principaux résultats en figure 12. Dans la zone qui nous intéresse ici, $z \lesssim 1$, l'accord avec les données de l'ENS est excellent et conduit à une valeur compatible pour b_4 : $b_4 = 0.065(10)$.

3-4 Au delà des effets à trois corps

Une fois la valeur pour b_4 déduite des deux expériences que nous venons de décrire, la balle était dans le camp des théoriciens pour affiner les calculs de cette quantité. Le défi est bien sûr considérable puisqu'il s'agit de déterminer le spectre exact de 4 fermions en interaction avec deux configurations de nature différente, $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ et $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow$ (ou son symétrique).

Le bilan de cette série de travaux est décrit par ENDO (2020) :

- Au moment où l'article expérimental du MIT a été publié, une seule prédiction était disponible : $b_4 = -0.047(4)$, en désaccord manifeste avec l'expérience (RAKSHIT, DAILY et al. 2012). Ce travail utilisait la méthode variationnelle pour trouver l'énergie des particules dans un piège et extrapolait ensuite les résultats vers la raideur nulle, correspondant au gaz homogène.
- NGAMPRUETIKORN, PARISH et al. (2015) ont utilisé une méthode de

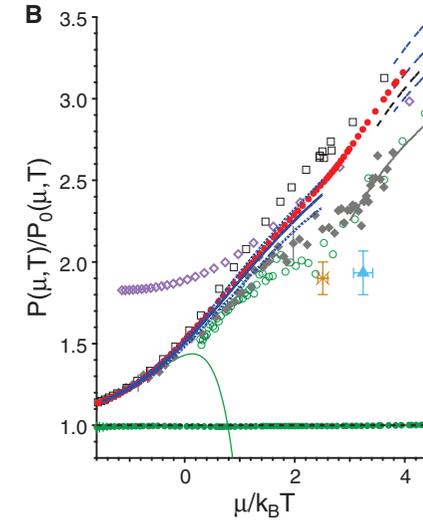


FIGURE 12. Pression d'un gaz de Fermi de lithium 6 dans le régime unitaire, normalisée par la pression du gaz parfait de Fermi. Points rouges : données du groupe du MIT (KU, SOMMER et al. 2012), losanges gris : données du groupe de l'ENS (NASCIMBÈNE, NAVON et al. 2010). Le développement du viriel à l'ordre 4 avec les paramètres donnés en (92) et $b_4 = 0.065$ est représenté par la ligne continue verte. Les autres points ou lignes correspondent à des prédictions théoriques dans le régime dégénéré, non décrites dans ce chapitre. Figure extraite de KU, SOMMER et al. (2012).

théorie des champs dans le cas homogène pour arriver à $b_4 \approx 0.03$.

- ENDO & CASTIN (2016a) ont utilisé un ansatz de Fadeev, inspiré de la résolution du problème à trois corps, pour traiter quasi-analytiquement le cas de particules piégées. Au prix d'une conjecture⁷ (non encore prouvée à notre connaissance), ils sont arrivés à une valeur précise de b_4 : $b_4 = 0.031(1)$.
- YAN & BLUME (2016) ont utilisé une méthode Monte-Carlo basée sur l'intégrale de chemin pour calculer numériquement le spectre de l'ha-

7. Le calcul passe par l'intégration dans le plan complexe d'une fonction dont les propriétés analytiques ne sont pas complètement connues. La conjecture en question est nécessaire pour pouvoir appliquer malgré tout le théorème des résidus.

miltonien à quatre particules piégées, puis procédé à une extrapolation à raideur nulle pour trouver la valeur de b_4 dans le cas homogène : $b_4 = 0.047$ (18).

- HOU & DRUT (2020) [voir aussi HOU, MORRELL et al. 2021] ont développé une méthode partiellement analytique pour évaluer les poids de Boltzmann intervenant dans la fonction de partition, en utilisant une décomposition de Trotter (alternance d'évolutions due à l'énergie cinétique et à l'énergie d'interaction). Ils ont confirmé le résultat (93) de ENDO & CASTIN (2016a), tout en remarquant que le résultat pour b_4 de NGAMPRUETIKORN, PARISH et al. (2015), même s'il est globalement compatible avec (93), correspond des valeurs notablement différentes pour chacune des deux composantes $\uparrow\uparrow\downarrow$ et $\uparrow\uparrow\downarrow$. En revanche, ces composantes individuelles ont des valeurs compatibles dans les deux approches de ENDO & CASTIN (2016a) et de HOU & DRUT (2020). Nous retiendrons donc la valeur :

Gaz de Fermi équilibré à résonance : $b_4 = -\frac{1}{4^{5/2}} + 0.062 = 0.031$ (1)

(93)

Notons que cette valeur est significativement différente de celle trouvée expérimentalement ($b_4 = 0.065$, cf. figure 10). Signalons également que HOU & DRUT (2020) proposent une valeur pour b_5 : $b_5 = 5^{-5/2} + 0.78 = 0.80$ (6).

La détermination de b_4 est donc clairement un problème difficile, et ENDO (2020) donne au moins une raison de cette difficulté sur le plan théorique : quand ce coefficient est d'abord calculé dans un piège de fréquence ω , le comportement de $b_4(\omega)$ n'est pas monotone ce qui rend très délicat le passage numérique à la limite $\omega \rightarrow 0$ utilisé par plusieurs auteurs. Sur le plan expérimental, une difficulté potentielle est illustrée sur la figure 13, extraite de ROSSI, OHGOE et al. (2018). Cette figure montre l'écart entre la densité calculée par une méthode de resommation de diagrammes de Feynman et la densité $n^{(3)}$ calculée par le développement du viriel à l'ordre 3. On y voit un plateau apparent pour des valeurs de la fugacité entre 0.6 et 1.1. Une extrapolation de ce plateau à fugacité nulle redonne la valeur proposée par les expérimentateurs. Mais les données obtenues pour des valeurs encore plus petites de la fugacité semblent plutôt compatibles avec la valeur $b_4 = 0.031$ donnée par ENDO & CASTIN (2016a).

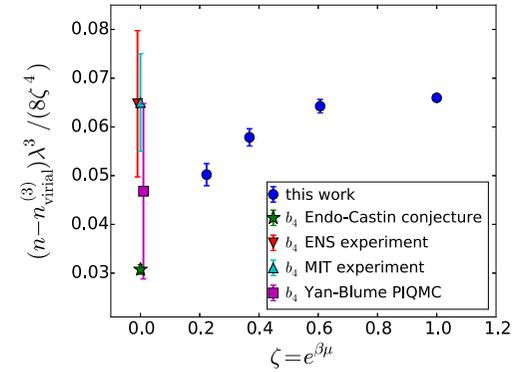


FIGURE 13. Calcul de la densité d'un gaz de Fermi unitaire en fonction de sa fugacité. Le calcul est fait par sommation d'une série de diagrammes de Feynman, associée à une méthode de Monte Carlo diagrammatique allant jusqu'à l'ordre 9. Figure extraite de ROSSI, OHGOE et al. (2018).

Références

- BETH, Erich & George E UHLENBECK (1937), « The quantum theory of the non-ideal gas. II. Behaviour at low temperatures », in *Physica* **4**, p. 915-924.
- CASTIN, Yvan & Félix WERNER (2013), « Troisième coefficient du viriel du gaz de Bose unitaire », in *Canadian Journal of Physics* **91**, p. 382-389.
- ENDO, Shimpei (2020), « Virial expansion coefficients in the unitary Fermi gas », in *SciPost Physics Proceedings*, p. 049.
- ENDO, Shimpei & Yvan CASTIN (2016a), « The interaction-sensitive states of a trapped two-component ideal Fermi gas and application to the virial expansion of the unitary Fermi gas », in *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **49**, p. 265301.
- (2016b), « Unitary boson-boson and boson-fermion mixtures : third virial coefficient and three-body parameter on a narrow Feshbach resonance », in *The European Physical Journal D* **70**, p. 238.
- HANBURY-BROWN, R. & R. Q. TWISS (1956), « Correlation between photons in two coherent beams of light », in *Nature* **177**, p. 27-29.

- HO, Tin-Lun & Erich J. MUELLER (2004), « High Temperature Expansion Applied to Fermions near Feshbach Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* **92**, p. 160404.
- HO, Tin-Lun & Qi ZHOU (2010), « Obtaining the phase diagram and thermodynamic quantities of bulk systems from the densities of trapped gases », in *Nature Physics* **6**, p. 131-134.
- HOU, Y. & J. E. DRUT (2020), « Fourth- and Fifth-Order Virial Coefficients from Weak Coupling to Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* **125**, p. 050403.
- HOU, Y, KJ MORRELL, AJ CZEJDO & JE DRUT (2021), « Fourth-and fifth-order virial expansion of harmonically trapped fermions at unitarity », in *Physical Review Research* **3**, p. 033099.
- KAPLAN, David B. & Sichun SUN (2011), « New Field-Theoretic Method for the Virial Expansion », in *Phys. Rev. Lett.* **107**, p. 030601.
- KU, Mark JH, Ariel T SOMMER, Lawrence W CHEUK & Martin W ZWIERLEIN (2012), « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », in *Science* **335**, p. 563-567.
- LANDAU, L. D. & E. M. LIFSHITZ (1975), *Physique Statistique*, Editions Mir.
- LEBOWITZ, J. L. & O. PENROSE (1964), « Convergence of Virial Expansions », in *Journal of Mathematical Physics* **5**, p. 841-847.
- LEYRONAS, X. (2011), « Virial expansion with Feynman diagrams », in *Phys. Rev. A* **84**, p. 053633.
- LIU, Xia-Ji (2013), « Virial expansion for a strongly correlated Fermi system and its application to ultracold atomic Fermi gases », in *Physics Reports* **524**, p. 37-83.
- LIU, Xia-Ji, Hui HU & Peter D. DRUMMOND (2009), « Virial Expansion for a Strongly Correlated Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 160401.
- NASCIMBÈNE, Sylvain, Nir NAVON, KJ JIANG, Frédéric CHEVY & Christophe SALOMON (2010), « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », in *Nature* **463**, p. 1057-1060.
- NGAMPRUETIKORN, Vudtiwat, Meera M. PARISH & Jesper LEVINSSEN (2015), « High-temperature limit of the resonant Fermi gas », in *Phys. Rev. A* **91**, p. 013606.
- RAKSHIT, D., K. M. DAILY & D. BLUME (2012), « Natural and unnatural parity states of small trapped equal-mass two-component Fermi gases at unitarity and fourth-order virial coefficient », in *Phys. Rev. A* **85**, p. 033634.
- ROSSI, R., T. OHGOE, K. VAN HOUCKE & F. WERNER (2018), « Resummation of Diagrammatic Series with Zero Convergence Radius for Strongly Correlated Fermions », in *Phys. Rev. Lett.* **121**, p. 130405.
- RUPAK, Gautam (2007), « Universality in a 2-Component Fermi System at Finite Temperature », in *Phys. Rev. Lett.* **98**, p. 090403.
- SPIEGELHALDER, F. M., A. TRENKWALDER, D. NAIK, G. HENDL, F. SCHRECK & R. GRIMM (2009), « Collisional Stability of ^{40}K Immersed in a Strongly Interacting Fermi Gas of ^6Li », in *Phys. Rev. Lett.* **103**, p. 223203.
- UHLENBECK, George E & Erich BETH (1936), « The quantum theory of the non-ideal gas I. Deviations from the classical theory », in *Physica* **3**, p. 729-745.
- WERNER, Félix & Yvan CASTIN (2006), « Unitary Quantum Three-Body Problem in a Harmonic Trap », in *Phys. Rev. Lett.* **97**, p. 150401.
- YAN, Yangqian & D. BLUME (2016), « Path-Integral Monte Carlo Determination of the Fourth-Order Virial Coefficient for a Unitary Two-Component Fermi Gas with Zero-Range Interactions », in *Phys. Rev. Lett.* **116**, p. 230401.