

Chapitre 6

Les différentes facettes du contact à deux corps

Sommaire

1	Contact et pseudo-potentiel	2
1-1	Rappels sur la définition du contact	2
1-2	La limite d'une portée b nulle	3
1-3	L'approche pseudo-potentiel	3
1-4	Le cas d'un potentiel en "vrai" Dirac	4
2	Contact et spectroscopie radio-fréquence	6
2-1	Position du problème	6
2-2	Le centre de gravité du spectre	6
2-3	L'aile du spectre radio-fréquence	8
3	Études expérimentales sur le gaz de Fermi	9
3-1	Spectroscopie radio-fréquence	9
3-2	Mesure du contact par pertes d'atomes	11
3-3	Le contact en onde p	12
4	Contact à deux corps pour le gaz de Bose	14
4-1	Les différents régimes pour le gaz de Bose	14
4-2	Prédictions pour le contact à deux corps	15
4-3	Contact à deux corps et spectroscopie rf	16
4-4	Mesure par spectroscopie de Ramsey	17

Nous continuons dans ce dernier chapitre notre étude du *contact* commencée au chapitre 5. Rappelons que le contact C est une quantité qui permet, pour un système dilué, de relier les aspects de la physique à deux corps, comme la fonction de distribution de paires $G_2(r)$, à la thermodynamique à l'équilibre du gaz, son énergie interne E par exemple (voir figure 1). Pour un gaz de fermions de spin $1/2$, ce lien entre propriétés microscopique et macroscopiques est *a priori* possible quelle que soit la force des interactions – caractérisée par la longueur de diffusion a_- et la dégénérescence du gaz – caractérisée par la densité dans l'espace des phases $n\lambda^3$. Pour un gaz de bosons, des restrictions sont à apporter sur la densité et la longueur de diffusion pour éviter que des processus à plus de deux corps ne viennent jouer un rôle significatif.

Notre but dans ce chapitre est de présenter une série de mesures du contact mettant en jeu des techniques spectroscopiques ou l'étude des pertes induites par les collisions entre atomes. Pour mettre en place le formalisme permettant de décrire ces mesures, il est utile de reformuler les résultats du chapitre précédent en terme du pseudo-potentiel \hat{V}_{pp} , c'est-à-dire un potentiel de portée $b = 0$. Cette reformulation n'est pas anodine : elle s'accompagne d'une divergence de certaines quantités caractérisant le système, son énergie cinétique par exemple. Nous montrerons que cette divergence est compensée par la divergence de l'autre composante de l'énergie du fluide, l'énergie d'interaction, la somme des deux énergies, c'est-à-dire la fonction thermodynamique *énergie interne* E étant quant à elle convergente, comme il se doit.

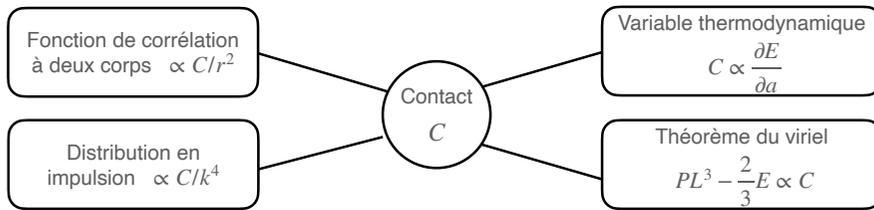


FIGURE 1. Les différents liens établis par le contact à deux corps introduit au chapitre 5.

Une fois mis en place le formalisme pour décrire un potentiel de portée nulle, nous passerons à la modélisation d'une expérience de spectroscopie radio-fréquence et nous montrerons comment les corrélations à courte portée étudiées au chapitre précédent se traduisent sur la forme de la raie de résonance. Nous décrirons les observations expérimentales de cette aile, ainsi que d'autres manifestations du contact pour un gaz de fermions, comme les pertes d'atomes induites par la présence d'impuretés au sein du gaz.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée au gaz de Bose. Nous y expliquerons brièvement pourquoi les processus à trois corps de type Efimov rendent la situation plus complexe que pour les fermions. Nous décrirons des expériences mettant en évidence le contact à deux corps dans différents régimes de densité, en nous limitant à des situations où les effets à trois corps ne jouent pas de rôle significatif.

1 Contact et pseudo-potentiel

1-1 Rappels sur la définition du contact

Au chapitre précédent, partant d'une fonction d'onde $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ pour N particules, nous avons défini le contact C à partir de la fonction de corrélation à deux corps. Nous nous sommes intéressés en particulier au cas d'une résonance de diffusion, quand la longueur de diffusion a devient beaucoup plus grande que la portée du potentiel b .

Rappelons la démarche suivie dans le cas d'un gaz de fermions de spin $1/2$. Supposons ce gaz équilibré, c'est-à-dire $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$ et affectons les indices impairs (resp. pairs) aux particules de spin \uparrow (resp. \downarrow). La fonction $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ est donc antisymétrique par tout échange d'indices impairs, et également antisymétrique par tout échange d'indices pairs.

Nous avons introduit la fonction de corrélation à deux corps

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) &= \langle \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{N^2}{4} \int d^3 r_3 \dots d^3 r_N \Phi^*(\mathbf{r}', \mathbf{0}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &\quad \times \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{0}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N), \end{aligned} \quad (1)$$

puis, en utilisant la fonction d'onde d'énergie nulle $\psi_0(\mathbf{r})$ décrivant la variable relative dans une collision entre deux particules, nous avons expliqué que la fonction de corrélation à deux corps pouvait se mettre sous la forme

$$r, r' \ll d, a : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0(r') \psi_0(r) \quad (2)$$

où $d = n^{-1/3}$ est la distance moyenne entre particules et où le contact C décrit l'effet des $N - 2$ corps restants. Nous avons écrit une relation similaire pour une assemblée de bosons sans spin ou polarisés.

Nous nous sommes également intéressés à la distribution en impulsion $n(k)$ associée et nous avons montré pour des fermions de spin $1/2$ que :

$$\text{Fermions : } \quad \frac{1}{a} \ll k \ll \frac{1}{b} : \quad n_\uparrow(k) = n_\downarrow(k) \approx \frac{C}{k^4}. \quad (3)$$

Une question naturelle à ce stade concerne l'extension de ces résultats au cas d'un potentiel de portée $b = 0$, c'est-à-dire le pseudo-potentiel \hat{V}_{pp} . L'utilisation du pseudo-potentiel permet de simplifier notablement les calculs et de dégager d'autres lois d'échelle remarquables, comme nous le verrons à propos de la spectroscopie radio-fréquence.

Rappelons qu'en réalité, les potentiels inter-atomiques ont une portée b non nulle, de l'ordre de la longueur de van der Waals R_{vdW} . Si l'utilisation du pseudo-potentiel conduit à une expression divergente pour une certaine quantité physique, il est important de garder en mémoire cette

limitation naturelle aux courtes distances ($R_{\text{vdW}} \lesssim r$) ou, de manière équivalente, aux grandes impulsions ($k \lesssim R_{\text{vdW}}^{-1}$).

1-2 La limite d'une portée b nulle

Dans le cas limite d'un potentiel de portée nulle, la queue de la distribution en impulsion $n(k) = C/k^4$ donnée en (3) s'étend jusqu'à l'infini. On en déduit immédiatement que l'énergie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} [n_{\uparrow}(k) + n_{\downarrow}(k)] d^3k \quad (4)$$

diverge puisque l'intégrande tend vers une constante à l'infini :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{2C}{k^4} 4\pi k^2 = \frac{\hbar^2 C}{2\pi^2 m}. \quad (5)$$

Le remède habituel à ce type de divergence "ultra-violette" est de placer une coupure dans l'espace des impulsions. Si on note k_{max} la borne supérieure de l'intégrale sur k , l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\boxed{\text{Fermions : } E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2 C k_{\text{max}}}{2\pi^2 m} + \dots} \quad (6)$$

où "..." représente une contribution finie et régulière. On remarquera que la présence de termes en k^{-5} pourrait invalider cette affirmation, en conduisant à une divergence en $\log(k_{\text{max}})$. Heureusement, on peut montrer que la présence de tels termes est exclue dans le cas du gaz de Fermi considéré ici (TAN 2008).

Pour rendre plus quantitative cette limite de portée nulle, nous allons maintenant aborder le problème en modélisant l'interaction entre atomes par le pseudo-potentiel.

1-3 L'approche pseudo-potentiel

Dans le cas d'une interaction binaire décrite par le pseudo-potentiel

$$\hat{V}_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial}{\partial r} [r\psi(\mathbf{r})] \right|_{r=0} \quad \text{avec } g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (7)$$

on peut déterminer de manière exacte les états de diffusion $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ et l'éventuel état lié $\psi_{\text{lie}}(r)$ (cf. cours 2020-21). Un état de diffusion d'énergie $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$ ($m_r = m/2$ est la masse réduite) s'écrit

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{a}{1 + ika} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (8)$$

avec notamment pour l'énergie nulle, la fonction d'onde normalisée :

$$\psi_0(r) = \frac{a}{L^3} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (9)$$

L'état lié existe si et seulement si $a > 0$ et s'écrit :

$$\psi_{\text{lie}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{e^{-r/a}}{r} \quad (10)$$

d'énergie $E = -\hbar^2 / ma^2$.

Rappelons également l'action du pseudo-potentiel sur une fonction présentant une divergence en $1/r$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} + \psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) \Rightarrow V_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \psi_{\text{reg}}(0) \delta(\mathbf{r}) \quad (11)$$

Chaque état propre (8,9,10) a le même comportement au voisinage de l'origine :

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r) \quad (12)$$

et ce comportement, qui lie les coefficients du terme en r^{-1} et du terme en r^0 , est donc partagé par toutes les fonctions physiquement acceptables en présence du pseudo-potentiel ; il constitue le domaine de l'hamiltonien faisant intervenir ce pseudo-potentiel.

Ce comportement se généralise à un système à N corps, si les interactions binaires sont décrites par le pseudo-potentiel. La fonction d'onde fermionique $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$ introduite plus haut vérifie dans ce cas :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{a} \right) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (13)$$

quand la distance r_{12} tend vers 0. On a posé ici $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ et supposé que \mathbf{R} était différent de tous les $\mathbf{r}_j, j = 3, \dots, N$. La fonction de corrélation à deux corps vaut aux courtes distances¹ :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r') \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r) \right). \quad (14)$$

Considérons maintenant l'énergie d'interaction. Nous prenons là encore le cas de N fermions de spin 1/2, le calcul pour un gaz de N bosons étant compliqué par la prise en compte des effets à trois corps. Cette énergie d'interaction s'évalue à partir de

$$E_{\text{int}} = \frac{N^2}{4} \int \Phi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \left\{ \hat{V}_{\text{pp}}(r_{12}) [\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)] \right\} d^3 r_1 \dots d^3 r_N \quad (15)$$

En utilisant (14), on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{C}{(4\pi)^2} \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \left[\hat{V}_{\text{pp}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \right] d^3 r \\ &= -\frac{\hbar^2 C}{4\pi m} \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \delta(\mathbf{r}) d^3 r. \end{aligned} \quad (16)$$

avec une contribution manifestement divergente puisqu'on doit faire agir la distribution de Dirac sur la fonction $1/r$.

Comme pour le calcul de l'énergie cinétique, mettons une coupure en k à une valeur k_{max} , ce qui revient à lisser la divergence de $1/r$ en $r = 0$ sur un domaine d'extension k_{max}^{-1} . On peut alors calculer l'intégrale (16) en utilisant

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3 k \quad (17)$$

de sorte que

$$\frac{1}{r} \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} \delta(\mathbf{r}) d^3 k = \frac{2k_{\text{max}}}{\pi} \delta(\mathbf{r}) \quad (18)$$

1. Le comportement indiqué en (14) est une conséquence directe de l'argument présenté au chapitre précédent, selon lequel $\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0})$ peut être vu comme l'élément de matrice en point de vue position d'un opérateur hermitien. Cet opérateur peut être mis sous la forme diagonale $\sum \gamma_j \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r})$ et chaque fonction ϕ_j vérifie (12) puisqu'elle appartient au domaine de l'hamiltonien.

d'où

$$\text{Fermions : } E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2 C}{4\pi m} \left(-\frac{2k_{\text{max}}}{\pi} + \frac{1}{a} \right) \quad (19)$$

Les deux contributions linéairement divergentes en k_{max} de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction sont donc égales en valeur absolue et de signes opposés. Elles se compensent exactement quand on calcule l'énergie totale, c'est-à-dire la fonction thermodynamique considérée au chapitre précédent : cette fonction est donc finie, même pour un potentiel de portée $b = 0$. Une forme commode pour cette énergie totale est

$$\text{Fermions : } E = \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[n_{\sigma}(k) - \frac{C}{k^4} \right] d^3 k + \frac{\hbar^2 C}{4\pi m a} \quad (20)$$

où les termes divergents de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction ont été isolés et se sont compensés.

Pour les bosons, si on oublie les effets à trois corps, on trouve de même

$$\text{Bosons sans Efimov : } E = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[n(k) - \frac{C}{k^4} \right] d^3 k + \frac{\hbar^2 C}{8\pi m a} \quad (21)$$

Les états d'Efimov qui apparaissent au voisinage d'une résonance de diffusion viennent compliquer la situation en introduisant une autre composante divergente dans la distribution en impulsion, variant comme k^{-5} (CASTIN & WERNER 2011). La divergence n'est que logarithmique et elle vient se compenser elle aussi avec un terme supplémentaire provenant des effets à trois corps dans l'énergie d'interaction (BRAATEN, KANG et al. 2011).

1-4 Le cas d'un potentiel en "vrai" Dirac

Une méthode communément utilisée (cf. chapitre 3) pour décrire un potentiel de portée négligeable consiste à utiliser une véritable distribution de Dirac $\bar{g} \delta(\mathbf{r})$, associée à la coupure k_{max} dans l'espace des moments, et à choisir

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\bar{g}} + \frac{mk_{\text{max}}}{2\pi^2 \hbar^2}, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{\bar{a}} + \frac{2k_{\text{max}}}{\pi}, \quad (22)$$

où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage "physique" et $\bar{g} = 4\pi\hbar^2 \bar{a}/m$ la constante de couplage "nue".

La contrainte (22) s'obtient en imposant à la fonction propre $\psi_0(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}$ d'énergie nulle pour $\hat{p}^2/2m_r + \hat{V}_{pp}$ d'être également fonction propre d'énergie nulle pour $\hat{p}^2/2m_r + \bar{g}\delta(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) + \bar{g}\delta(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = 0 \quad (23)$$

soit

$$\delta(r) \left[\frac{4\pi\hbar^2}{m} + \bar{g} \left(\frac{2}{k_{\max}} - \frac{1}{a} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

où l'on a utilisé $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$ et $\frac{1}{r}|_0 = 2k_{\max}/\pi$ [cf. (18)].

Dans un calcul, les résultats intermédiaires peuvent faire intervenir la constante de couplage "nue" \bar{g} et/ou la coupure k_{\max} , mais les quantités physiques doivent être calculées en prenant la limite $k_{\max} \rightarrow \infty$ et elles doivent s'exprimer à l'aide de g uniquement. Quand ce n'est pas possible, cela signifie que l'on est en présence d'un problème dont la réponse dépend explicitement de la portée b du potentiel.

On constate que l'énergie d'interaction (19) s'écrit dans ces conditions

$$\text{Fermions : } E_{\text{int}} = \frac{\hbar^4 C}{m^2 \bar{g}} \quad (25)$$

et une expression similaire pour des bosons hors effet Efimov :

$$\text{Bosons sans Efimov : } E_{\text{int}} = \frac{\hbar^4 C}{2m^2 \bar{g}} \quad (26)$$

Ce n'est donc pas une quantité physique, tout comme l'énergie cinétique (6) qui fait explicitement intervenir k_{\max} . En revanche, l'énergie totale ne fait intervenir que la constante de couplage physique g .

Vérifions maintenant que l'on peut retrouver directement le résultat (25-26) pour un potentiel en "vrai" Dirac. Considérons des bosons sans spin pour simplifier les notations. L'hamiltonien s'écrit dans ces conditions

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (27)$$

avec

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\bar{g}}{2} \hat{K} \quad \text{et} \quad \hat{K} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3r \quad (28)$$

d'où l'énergie d'interaction

$$E_{\text{int}} = \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \frac{\bar{g}}{2} \langle \hat{K} \rangle. \quad (29)$$

La quantité $\langle \hat{K} \rangle$ fait intervenir la valeur de la fonction $\mathcal{G}_2(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ quand les quatre points sont identiques, soit pour un système uniforme :

$$\langle \hat{K} \rangle = L^3 \mathcal{G}_2(0, 0; 0, 0). \quad (30)$$

Reprenons l'expression (14) de \mathcal{G}_2 aux courtes distances. On voit apparaître de nouveau la "valeur en 0" de la fonction $1/r$, que nous avons donnée en (18). Reportons cette valeur dans l'expression (2) de \mathcal{G}_2 :

$$\mathcal{G}_2(0, 0) = \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \left(\frac{2k_{\max}}{\pi} - \frac{1}{a} \right)^2 = \frac{\hbar^4 C}{L^3 m^2} \frac{1}{\bar{g}^2}. \quad (31)$$

La fonction de corrélation \mathcal{G}_2 prise en $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ n'est donc pas une quantité physique pour un gaz en interaction, puisqu'elle fait intervenir le couplage nu \bar{g} et non le couplage physique g . Elle diverge quand on prend la limite $k_{\max} \rightarrow \infty$. La situation pour un gaz en interaction est donc radicalement différente du cas du gaz parfait (NARASCHEWSKI & GLAUBER 1999).

Revenons maintenant à l'énergie d'interaction (29)

$$E_{\text{int}} = \frac{\bar{g}}{2} \langle \hat{K} \rangle = \frac{\bar{g}}{2} L^3 \frac{\hbar^4 C}{L^3 m^2} \frac{1}{\bar{g}^2}. \quad (32)$$

Ce résultat coïncide avec celui annoncé en (26) et il est, rappelons-le, lui aussi divergent pour une portée nulle.

L'utilisation du couple (\bar{g}, k_{\max}) , suivi de la limite $k_{\max} \rightarrow \infty$ sous la condition (22) reliant \bar{g}, k_{\max} au couplage réel g permet donc de mener les calculs de manière relativement simple et transparente. C'est la méthode que nous allons utiliser dans la partie suivante consacrée à la spectroscopie radio-fréquence.

2 Contact et spectroscopie radio-fréquence

2-1 Position du problème

La spectroscopie radio-fréquence est un moyen puissant pour analyser les propriétés d'un gaz quantique. Alors que pour un atome nu, le spectre d'absorption n'est composé que de raies discrètes, le spectre d'un gaz en interaction est généralement un continuum dont la forme de raie, le centre de gravité et les ailes renseignent sur la nature des états à N particules pouvant exister au sein du fluide.

Nous allons nous intéresser ici au cas d'un gaz de fermions de spin $1/2$. L'idée est d'éclairer le gaz avec une onde électromagnétique de pulsation ω qui peut induire une transition depuis un des deux états internes atomiques, \uparrow par exemple, vers un troisième état que nous noterons e (figure 2). Le fait de choisir une onde "radio-fréquence", donc de grande longueur d'onde, entraîne que le passage de \uparrow vers e ne s'accompagne d'aucun transfert d'impulsion, contrairement à ce qui se passerait si on utilisait un faisceau lumineux (spectroscopie de Bragg). Les classes d'impulsion dont nous allons parler dans la suite sont naturellement peuplées dans l'état stationnaire du gaz, en particulier lors de l'interaction entre deux atomes proches pour ce qui concerne les "grandes" impulsions.

Nous allons étudier ici la variation avec ω du taux d'atomes transférés $\Gamma(\omega)$, et nous allons regarder deux grandeurs :

- La position moyenne de la résonance fait intervenir le contact et s'écrit dans la limite des grandes longueurs de diffusion $|a_{\uparrow\downarrow}|, |a_{e\downarrow}| \gg b$:

$$\langle \omega \rangle \equiv \frac{\int \omega \Gamma(\omega) d\omega}{\int \Gamma(\omega) d\omega} \approx \omega_0 + \left(\frac{1}{a_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{a_{e\downarrow}} \right) \frac{\hbar C}{4\pi m N_{\uparrow}} \quad (33)$$

où ω_0 désigne la fréquence de transition $\uparrow e$ d'un atome libre (on supposera ici $\omega_0 > 0$ pour fixer les idées).

- Quand les atomes dans l'état e n'interagissent pas avec les atomes \downarrow ($a_{e\downarrow}=0$), le déplacement moyen (33) diverge. On peut montrer que cela est dû à l'apparition d'une aile à grand désaccord de $\Gamma(\omega)$, qui fait elle

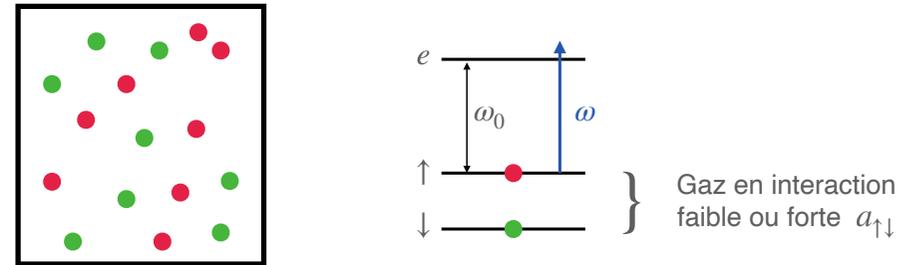


FIGURE 2. Principe de la spectroscopie radio-fréquence pour un gaz de Fermi à deux composantes. Une onde radio-fréquence couple un des deux états de spin, ici \uparrow , à un troisième état interne possible, noté e .

aussi intervenir le contact :

$$\frac{\Gamma(\omega)}{\int \Gamma(\omega) d\omega} \approx \frac{1}{4\pi^2 N_{\uparrow}} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \frac{C}{(\omega - \omega_0)^{3/2}} \quad (34)$$

Nous verrons que cette aile est étroitement liée à la décroissance en $1/k^4$ de la distribution en impulsion.

Ces résultats ont été obtenus à la suite d'une succession de travaux décrits dans YU & BAYM (2006), BAYM, PETHICK et al. (2007), PUNK & ZWERGER (2007), HAUSSMANN, PUNK et al. (2009) et PIERI, PERALI et al. (2009) et BRAATEN, KANG et al. (2010).

2-2 Le centre de gravité du spectre

Le calcul du taux $\Gamma(\omega)$ se fait en utilisant la règle d'or de Fermi, ou d'une manière équivalente, la théorie de la réponse linéaire. La perturbation créée par l'onde radio fréquence se décrit par l'opérateur

$$\hat{H}_{\text{rf}}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{-i\omega t} \hat{Y} + \text{H.c.} \quad \text{avec} \quad \hat{Y} = \int \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) d^3r, \quad (35)$$

où Ω est la fréquence de Rabi de la radio-fréquence, proportionnelle à son champ électromagnétique oscillant. Nous avons fait ici l'approximation

RWA ("champ tournant") en ne gardant que la partie quasi-résonnante (en $e^{-i\omega t}$ avec $\omega > 0$) pour le passage de \uparrow vers e .

Le taux de transfert s'écrit alors [voir par exemple COHEN-TANNOUJLI, DIU et al. (1973), XIII-C-3]

$$\Gamma(\omega) = \frac{\pi}{2} \Omega^2 \sum_{\Phi_f} |\langle \Phi_f | \hat{Y} | \Phi_i \rangle|^2 \delta[\omega - (E_f - E_i)/\hbar]. \quad (36)$$

Dans cette expression, l'état $|\Phi_i\rangle$, d'énergie E_i , représente l'état initial avec N_\uparrow et N_\downarrow particules dans les deux états de spin \uparrow et \downarrow , et aucune particule dans l'état e . La somme porte sur tous les états $|\Phi_f\rangle$ (d'énergie E_f) possibles. Ces états ont $N_\uparrow - 1$ particules dans l'état \uparrow , 1 particule dans l'état e , et toujours N_\downarrow particules dans l'état \downarrow .

Pour montrer (33), intéressons-nous d'abord au dénominateur $\int \Gamma(\omega) d\omega$. L'intégrale sur ω de la distribution de Dirac donne 1; en utilisant la relation de fermeture $\hat{1} = \sum_{\Phi_f} |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f|$, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \int \Gamma(\omega) d\omega &= \frac{\pi}{2} \Omega^2 \langle \Phi_i | \hat{Y}^\dagger \hat{Y} | \Phi_i \rangle \\ &= \frac{\pi}{2} \Omega^2 \int \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}') | \Phi_i \rangle d^3r d^3r'. \end{aligned} \quad (37)$$

Pour des fermions, on a la relation d'anti-commutation $[\hat{\Psi}_e(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}')]_+ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Comme l'état $|\Phi_i\rangle$ ne contient pas de particule dans l'état e , on en déduit :

$$\int \Gamma(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \Omega^2 \int \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle d^3r = \frac{\pi}{2} \Omega^2 N_\uparrow. \quad (38)$$

Le calcul du numérateur de (33), $\int \omega \Gamma(\omega) d\omega$, est légèrement plus compliqué. On utilise la présence de $\delta[\omega - (E_f - E_i)/\hbar]$ pour établir

$$\hbar\omega \langle \Phi_i | \hat{Y}^\dagger | \Phi_f \rangle = (E_f - E_i) \langle \Phi_i | \hat{Y}^\dagger | \Phi_f \rangle = \langle \Phi_i | [\hat{Y}^\dagger, \hat{H}] | \Phi_f \rangle, \quad (39)$$

où \hat{H} désigne l'hamiltonien en absence de couplage radio-fréquence. Cela conduit à (toujours en utilisant une relation de fermeture sur $|\Phi_f\rangle$) :

$$\int \omega \Gamma(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2\hbar} \Omega^2 \int \langle \Phi_i | \left[\hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r}), \hat{H} \right] \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}') | \Phi_i \rangle d^3r d^3r', \quad (40)$$

où l'hamiltonien contient l'énergie interne $\hbar\omega_0$ de l'état e , les termes d'énergie cinétique pour les trois composantes \uparrow, \downarrow et e , et les trois termes d'interaction $\uparrow\downarrow, e\downarrow$ et $e\uparrow$.

Constatons pour commencer que les commutateurs de $\hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r})$ avec les termes d'énergie cinétique ainsi qu'avec le couplage $e\uparrow$ ont une contribution nulle pour l'état initial considéré.

Nous allons traiter ici les termes d'interaction en utilisant de "vrais" potentiels en Dirac, selon la procédure expliquée en § 1-4. Nous introduisons pour cela les couplages nus $\bar{g}_{\uparrow\downarrow}, \bar{g}_{e\downarrow}, \bar{g}_{e\uparrow}$ associés à la même coupure k_{\max} dans l'espace des impulsions. Dans le calcul du commutateur intervenant dans (40), les seules contributions non nulles viennent de l'énergie interne de e qui fait apparaître le coefficient ω_0 , et de la contribution des couplages $e\downarrow$ et $\uparrow\downarrow$. On arrive alors à

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 + \frac{1}{\hbar N_\uparrow} (\bar{g}_{e\downarrow} - \bar{g}_{\uparrow\downarrow}) \langle \hat{K}_{\text{int}} \rangle. \quad (41)$$

L'opérateur \hat{K} , défini par :

$$\hat{K} = \int \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) d^3r \quad (42)$$

est la version fermionique de l'opérateur introduit en (28) pour des bosons. Il a pour moyenne $\hbar^4 C / (m^2 \bar{g}_{\uparrow\downarrow}^2)$ [cf. (30,31)], ce qui conduit à :

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 + \frac{\bar{a}_{e\downarrow}}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} \left(\frac{1}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\bar{a}_{e\downarrow}} \right) \frac{\hbar C}{4\pi m N_\uparrow}. \quad (43)$$

En utilisant l'identité entre couplages nus (\bar{g}, \bar{a}) et couplages physiques (g, a) :

$$\frac{1}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\bar{a}_{e\downarrow}} = \frac{1}{a_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{a_{e\downarrow}}, \quad (44)$$

cette relation peut encore s'écrire :

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 + \frac{\bar{a}_{e\downarrow}}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} \left(\frac{1}{a_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{a_{e\downarrow}} \right) \frac{\hbar C}{4\pi m N_\uparrow} \quad (45)$$

Finalement, nous pouvons écrire le rapport $\bar{a}_{e\downarrow}/\bar{a}_{\uparrow\downarrow}$ comme :

$$\frac{\bar{a}_{e\downarrow}}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} = \frac{k_{\max} - \frac{\pi}{2a_{\uparrow\downarrow}}}{k_{\max} - \frac{\pi}{2a_{e\downarrow}}} \rightarrow 1 \quad \text{quand } k_{\max} \rightarrow \infty. \quad (46)$$

On arrive alors au résultat annoncé en (33). Rappelons que la limite $k_{\max} \rightarrow \infty$ doit être comprise physiquement comme $k_{\max} \sim 1/b$ puisqu'au delà de cette valeur, la portée du potentiel doit être prise en compte. Le résultat (46) n'est donc physiquement pertinent que si les longueurs de diffusion sont telles que $|a_{\uparrow\downarrow}|, |a_{e\downarrow}| \gg b$. On pourra consulter l'article de BAYM, PETHICK et al. (2007) pour une discussion des situations où cette inégalité n'est pas satisfaite.

On pourrait s'étonner de ne pas voir apparaître de terme d'interaction proportionnel à $g_{e\uparrow}$ dans ce qui précède. La raison en est que l'action de la radio-fréquence consiste à faire basculer chacun des N_{\uparrow} atomes depuis l'état $|\uparrow\rangle$ vers l'état $\cos\theta|\uparrow\rangle + \sin\theta|e\rangle$ (avec $\theta \ll 1$ dans notre approche perturbative). Ces N_{\uparrow} atomes restent tous dans le même état interne, ce sont donc des fermions polarisés et ils n'interagissent pas entre eux (GUPTA, HADZIBABIC et al. 2003). La situation serait bien sûr différente si on considérait des bosons.

2-3 L'aile du spectre radio-fréquence

Nous considérons dans ce paragraphe le cas où les atomes dans l'état e n'interagissent pas avec les atomes en \uparrow et \downarrow . En particulier, le fait de poser $a_{e\downarrow} = 0$ entraîne la divergence de (33). Nous voulons montrer ici que cette divergence de l'intégrale $\int \omega \Gamma(\omega) d\omega$ provient de l'apparition d'une aile en $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$, dont l'expression est donnée en (34).

Puisque les atomes dans l'état e évoluent librement, la forme des états finaux possibles Φ_f intervenant dans la règle d'or de Fermi (36) est simple : ce sont des états produits $|e : \mathbf{k}\rangle \otimes |\Phi_f^{(N-1)}\rangle$, d'énergie $E_f = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_f^{(N-1)}$. Un élément de matrice générique intervenant dans (36) s'écrit alors :

$$\langle \Phi_f | \hat{Y} | \Phi_i \rangle = \int \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{L^3}} \langle \Phi_f^{(N-1)} | \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle d^3r. \quad (47)$$

Quand $\omega - \omega_0$ est grand, un atome isolé \uparrow est quasiment insensible à la radio-fréquence. Les états finaux dominants sont ceux où la radio-fréquence fait basculer l'état interne d'un atome \uparrow , initialement très proche d'un atome \downarrow . Selon la valeur de a , ces deux atomes pouvaient, avant la bascule, former un état lié ou alors être dans un état de collision. Dans les



FIGURE 3. Processus contribuant à l'aile en $(\omega - \omega_0)^{3/2}$ du spectre radio-fréquence.

deux cas, l'impulsion du centre de masse de cette paire était faible, alors que les distributions en impulsion de chacun des deux partenaires (ou de manière équivalente, la distribution en impulsion de la variable relative) pouvaient être larges.

Lors de la bascule de \uparrow vers e , l'impulsion totale de la paire est inchangée et reste donc négligeable. L'énergie initiale totale de la paire, E_i , est supposée faible devant le désaccord $\hbar(\omega - \omega_0)$, même si ses deux composantes, cinétique et interaction (qui sont de signes opposés), sont chacune comparables à ce désaccord². Une fois le photon radio-fréquence absorbé et l'atome \uparrow passé dans l'état e , les deux atomes n'interagissent plus (figure 3). Ils se partagent de manière égale l'excès d'énergie $\hbar(\omega - \omega_0)$, chacun des deux atomes gagnant l'énergie cinétique $\hbar^2 k^2 / 2m$. La distribution $\delta[\omega - (E_f - E_i)/\hbar]$ peut alors être approchée par $\delta(\omega - \omega_0 - \hbar k^2/m)$.

Une fois cette approximation faite, on peut utiliser de nouveau une relation de fermeture sur les états $|\Phi_f^{(N-1)}\rangle$. La somme des carrés des éléments de matrice du type (47) fait apparaître

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\Omega^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\Phi_f^{(N-1)}} | \langle e : \mathbf{k} | \otimes \langle \Phi_f^{(N-1)} | \hat{Y} | \Phi_i \rangle |^2 \delta \left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m} \right) \quad (48)$$

2. Un raisonnement voisin apparaît dans l'analyse de l'augmentation d'énergie induite par des pertes d'atomes dans un gaz en interaction (BOUCHOULE, DUBOIS et al. 2021). La perte d'atomes membres de paires de courte elongation conduit à une divergence du taux d'accroissement de l'énergie pour un potentiel de portée nulle.

ou encore

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\Omega^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{L^3} \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle \times \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) d^3r d^3r'. \quad (49)$$

On reconnaît la distribution en impulsion pour l'état \uparrow :

$$n_{\uparrow}(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle d^3r d^3r' \quad (50)$$

de sorte que $\Gamma(\omega)$ s'écrit :

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\Omega^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_{\uparrow}(\mathbf{k}) \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) d^3k. \quad (51)$$

Il suffit alors d'insérer la loi asymptotique $n_{\uparrow}(\mathbf{k}) \approx C/k^4$ pour arriver à

$$\int n_{\uparrow}(\mathbf{k}) \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) d^3k = 2\pi C \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^{3/2}} \quad (52)$$

et

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\Omega^2}{8\pi} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \frac{C}{(\omega - \omega_0)^{3/2}} \quad (53)$$

ce qui correspond à la prédiction (34).

Notons qu'en pratique, $a_{e\downarrow}$ n'est jamais rigoureusement nulle. BRAATEN, KANG et al. (2010) montrent que pour $\omega \gtrsim \hbar/ma_{e\downarrow}^2$, la décroissance lente en $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$ bascule vers une décroissance plus rapide en $(\omega - \omega_0)^{-5/2}$, qui assure la convergence de l'intégrale donnant le déplacement moyen de la raie [voir aussi CHIN & JULIENNE (2005)]. Les corrections liées à la portée $b \sim R_{\text{vdW}}$ du potentiel peuvent aussi jouer un rôle dans ce domaine des très grands désaccords.

3 Études expérimentales sur le gaz de Fermi

3-1 Spectroscopie radio-fréquence

Nous avons présenté au chapitre précédent une première partie des résultats obtenus par le groupe de Boulder en 2010, à partir de la distribution

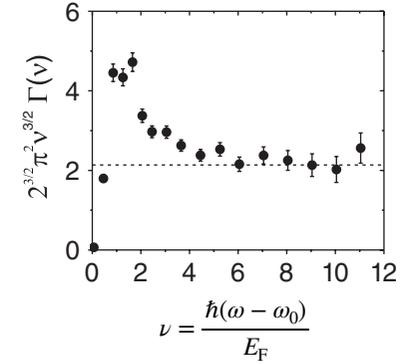


FIGURE 4. Variation de $\nu^{3/2} \Gamma(\nu)$, où $\Gamma(\nu)$ est le taux de transfert de $|\uparrow\rangle$ vers $|e\rangle$ par une radio-fréquence désaccordée de ν par rapport à la résonance, ν étant exprimé ici en unité de $E_F/2\pi\hbar$. Le plateau observé pour les grandes valeurs de ν permet de déterminer le contact pour la valeur de a choisie [$(k_F a)^{-1} = -0.03$ pour ces données]. Figure extraite de STEWART, GAEBLER et al. (2010).

en impulsion d'un gaz de fermions de ^{40}K avec $|\downarrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -9/2\rangle$ et $|\uparrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -7/2\rangle$ (STEWART, GAEBLER et al. 2010). Décrivons maintenant la deuxième étude menée par ce groupe au moyen de la spectroscopie radio-fréquence, effectuée depuis l'état $|\uparrow\rangle$ vers l'état $|e\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -5/2\rangle$. Le taux de transfert d'atomes en fonction du désaccord $\omega - \omega_0$ est montré en figure 4. On constate que ce taux varie bien comme $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$ aux grands désaccords, et le coefficient de proportionnalité fournit une autre détermination du contact.

La figure 5 regroupe les deux jeux de données pour le contact, obtenus à partir de la distribution en impulsion et de la spectroscopie radio-fréquence. Un troisième jeu de données a été obtenu avec la technique de spectroscopie de photo-émission que nous ne décrivons pas ici. Toutes ces données sont compatibles entre elles et leur variation avec $1/a$ est en bon accord avec la discussion qualitative du chapitre précédent.

Récemment, le groupe du MIT dirigé par M. Zwierlein a approfondi l'étude du contact au point unitaire $a = \pm\infty$ par spectroscopie radio-fréquence (MUKHERJEE, PATEL et al. 2019). Les chercheurs du MIT ont varié la température du gaz pour étudier le comportement du contact quand

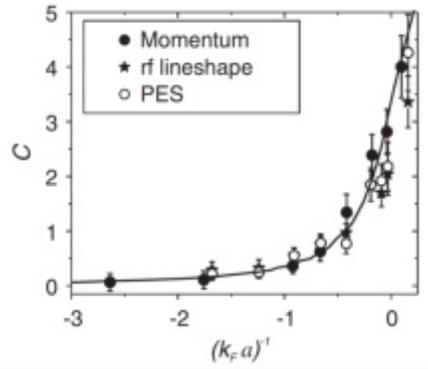


FIGURE 5. Récapitulation des valeurs obtenues pour le contact (en unité de Nk_F) par la mesure de la distribution en impulsion (points noirs) et de la spectroscopie radio-fréquence (étoiles). Le troisième jeu de données utilise la spectroscopie de photo-émission (PES). La courbe continue est la prédiction théorique de WERNER, TARRUELL *et al.* (2009). Figure extraite de STEWART, GAEBLER *et al.* (2010).

on croise la transition entre l'état superfluide et l'état normal ($T_c \approx 0.17 T_F$). Ces mesures, tracées en figure 6 (haut), ont été effectuées dans un gaz uniforme, confiné dans un potentiel lumineux en forme de boîte, ce qui permet d'éviter l'élargissement du spectre dû aux variations de densité dans un piège harmonique. Les spectres obtenus fournissent de nombreux renseignements sur la physique en jeu. Par exemple, le déplacement du maximum de la raie donne accès à l'énergie des paires de Cooper dont la formation devient énergétiquement favorable pour $T \lesssim 0.5 T_F$. Pour le spectre obtenu à la plus basse température, on voit clairement une aile en $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$ (figure 6, bas), avec aux très grands désaccords une décroissance un peu plus rapide liée aux interactions non nulles de l'état e avec les atomes \downarrow (voir la discussion après l'équation (53)).

Le contact déduit de l'analyse de l'aile du spectre radio-fréquence par le groupe du MIT est montré en figure 7, avec les résultats obtenus simultanément par le groupe de Swinburne utilisant la mesure du facteur de structure dynamique $S(\mathbf{q}, \omega)$. Les résultats des deux groupes sont en excellent accord et indiquent en particulier la valeur $C/Nk_F \approx 3$ à la limite de la température nulle.

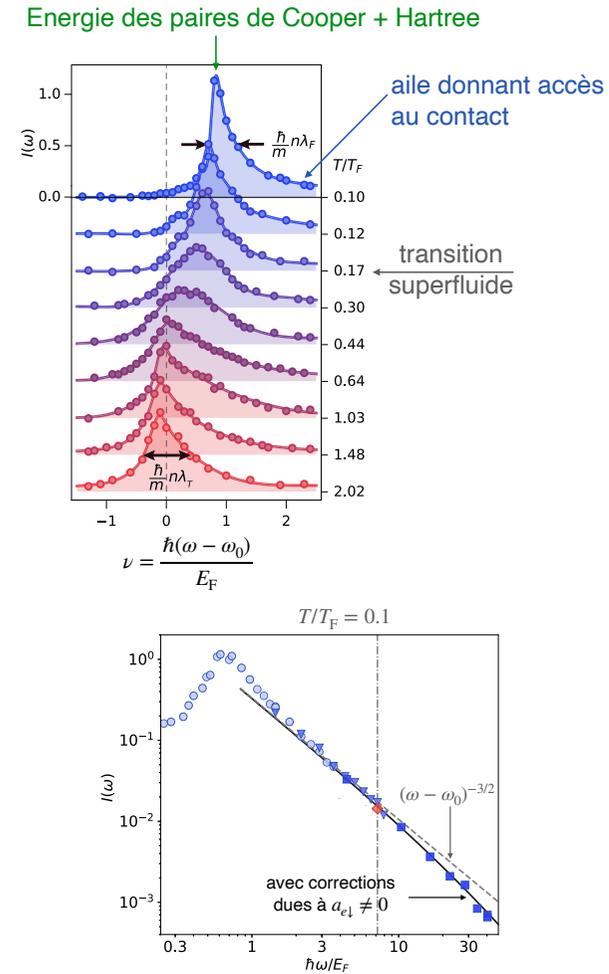


FIGURE 6. Haut : série de spectres radio-fréquence mesurés sur un gaz de Fermi unitaire ($|a| = +\infty$) pour différentes températures. Bas : spectre mesuré à basse température avec l'aile en $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$, et des corrections liées aux interactions résiduelles entre e et \downarrow . L'analyse de ces données donne $C = 3.07(6)$. Figures extraites de MUKHERJEE, PATEL *et al.* (2019).

MIT : contact déduit de l'aile du spectre r.f.

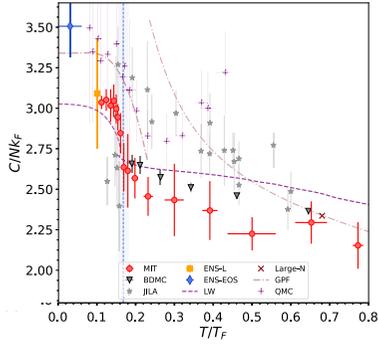
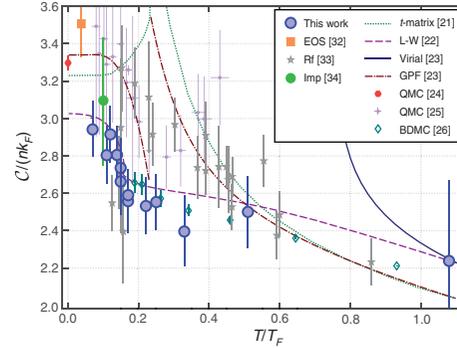
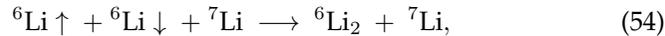

 Swinburne : contact déduit de l'aile de $S(q, \omega)$


FIGURE 7. Valeurs du contact pour un gaz de Fermi équilibré dans le régime unitaire, en fonction de la température. Figure de gauche extraite de MUKHERJEE, PATEL *et al.* (2019). Figure de droite extraite de CARCY, HOINKA *et al.* (2019). Les données théoriques BDMC (bold-diagrammatic Monte Carlo) ont été obtenues par ROSSI, OHGOE *et al.* (2018). La valeur de LAURENT, PIERCE *et al.* (2017) discutée en § 3-2 est indiquée par un carré orange (point vert) sur le graphe de gauche (droite).

3-2 Mesure du contact par pertes d'atomes

LAURENT, PIERCE *et al.* (2017) ont développé une approche originale pour mesurer le contact dans un gaz de ${}^6\text{Li}$ de spin $1/2$ confiné dans un piège optique, en y insérant quelques atomes de ${}^7\text{Li}$ jouant le rôle d'impuretés (voir aussi voir aussi SPIEGELHALDER, TRENKWALDER *et al.* (2009) et KHRAMOV, HANSEN *et al.* (2012)). Le principe de la mesure consiste à étudier comment les impuretés favorisent la formation de dimères ${}^6\text{Li}_2$. On s'intéresse donc au processus à trois corps :



la présence de l'impureté permettant d'assurer la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans ce processus.

Comme le dimère qui est formé a une extension faible ($b \sim R_{\text{vdW}}$), le taux avec lequel ce processus se produit renseigne sur la densité de probabilité pour avoir les deux atomes de ${}^6\text{Li}$ proches, à une distance $\sim b$ l'un

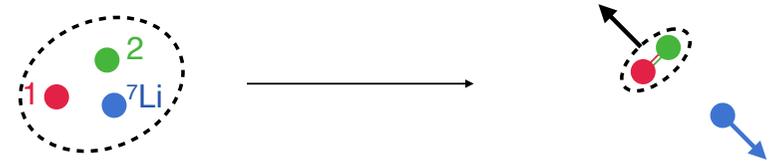


FIGURE 8. Processus de formation de dimères assisté par une impureté. À l'issue du processus, l'énergie libérée est convertie en énergie cinétique. Cette énergie est suffisamment grande pour que l'impureté s'échappe du piège confinant les particules.

de l'autre : c'est précisément la quantité à laquelle le contact donne accès. Comme l'atome de ${}^7\text{Li}$ possède une grande énergie cinétique après la formation du dimère, il s'échappe du piège. Le taux de pertes des atomes de ${}^7\text{Li}$ permet donc de remonter à la valeur du contact dans le gaz de ${}^6\text{Li}$.

Pour un traitement quantitatif du problème, on introduit l'opérateur à trois corps :

$$\iiint g(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_\uparrow, \mathbf{r}_\downarrow) \hat{\Psi}_d^\dagger \left(\frac{\mathbf{r}_\uparrow + \mathbf{r}_\downarrow}{2} \right) \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}_i) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}_\uparrow) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}_\downarrow) d^3r_i d^3r_\uparrow d^3r_\downarrow. \quad (55)$$

On voit apparaître dans cet opérateur la densité d'impuretés au point \mathbf{r}_i , $\hat{n}_i(\mathbf{r}_i) = \hat{\psi}_i^\dagger(\mathbf{r}_i)\hat{\psi}_i(\mathbf{r}_i)$; par ailleurs, le dimère est créé au milieu du segment joignant les deux fermions \uparrow et \downarrow initialement présents. La fonction g , qui dépend des détails des potentiels d'interaction entre les trois atomes, ne prend des valeurs significatives que lorsque les trois atomes sont dans un même volume d'extension $\sim b$.

Pour calculer le taux de production de dimères (et donc de perte d'impuretés), on peut utiliser une approche basée sur la règle d'or de Fermi. Le traitement est détaillé dans le *Supplemental Material* de LAURENT, PIERCE *et al.* (2017) et il est proche de ce que nous avons développé pour le calcul du spectre radio-fréquence. On arrive au résultat

$$\dot{N}_i = -\gamma(C/L^3) N_i, \quad (56)$$

où le coefficient γ fait intervenir la fonction de couplage g intervenant dans (55), mais ne dépend pas de la valeur de la longueur de diffusion a pour le

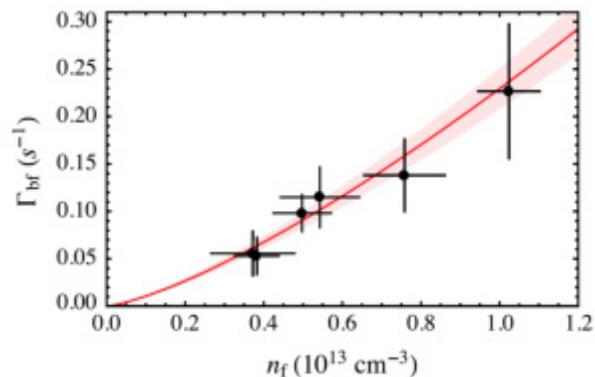


FIGURE 9. Variation du taux de pertes des impuretés de ${}^7\text{Li}$ en fonction de la densité n du gaz de fermions de ${}^6\text{Li}$. Ces données ont été prises à résonance ($a = \infty$ pour l'interaction entre fermions \uparrow et \downarrow) et la ligne rouge continue indique la loi de variation $n^{4/3}$ attendue. Figure extraite de LAURENT, PIERCE et al. (2017).

gaz de fermions.

La stratégie adoptée par LAURENT, PIERCE et al. (2017) a consisté à calibrer d'abord le coefficient γ en effectuant des mesures du taux de pertes \dot{N}_i dans un régime où le contact est bien connu. En pratique, ces mesures de calibration ont été faites pour a petit et positif, favorisant un gaz de dimères. La température était choisie nettement au dessus de la température de dégénérescence, de sorte que la distribution du gaz dans le piège était bien décrite par une simple loi de Boltzmann.

Une fois le coefficient γ connu, LAURENT, PIERCE et al. (2017) ont placé leur gaz de ${}^6\text{Li}$ à résonance ($a = \infty$) pour étudier le contact dans un régime d'interaction forte à une température aussi basse que possible, en pratique $T/T_F \approx 0.1$. Nous avons vu plus haut [voir par exemple la figure 7] que dans le régime unitaire, on attend pour le contact la loi suivante

$$\frac{C}{L^3} = 2\pi\eta k_F n \propto n^{4/3}. \quad (57)$$

D'après (56), cette même loi en $n^{4/3}$ est attendue pour le taux de perte d'impuretés. On vérifie sur la figure 9 que c'est effectivement le cas. L'ajustement des données expérimentales fournit la valeur $2\pi\eta \approx 3.1(4)$ pour le

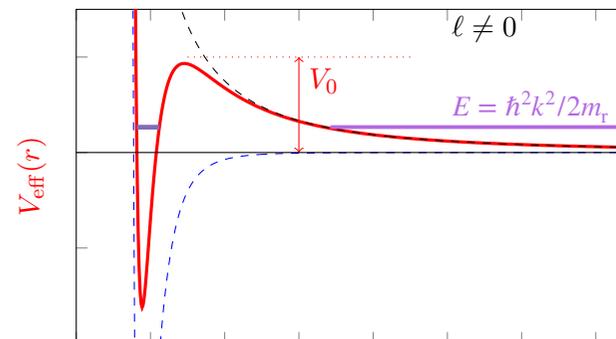


FIGURE 10. Résonance pour le canal en onde $\ell \neq 0$ due à la présence d'un état quasi-lié.

coefficient figurant dans (57), en bon accord avec les résultats montrés en figure 7.

3-3 Le contact en onde p

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux interactions en onde s , caractérisées par une longueur de diffusion a , et nous avons introduit le contact comme la quantité thermodynamique conjuguée de a (ou plus précisément $1/a$), à un facteur multiplicatif près. Cet intérêt porté aux interactions en onde s est justifié : que l'on prenne un gaz de bosons polarisés ou un gaz de fermions de spin $1/2$, le canal de moment cinétique $\ell = 0$ est généralement dominant par rapport à tous les autres à basse température. Rappelons que cela est dû à la barrière centrifuge $\hbar^2 \ell(\ell+1)/mr^2$ qui existe dans tous les canaux $\ell \neq 0$. Cette barrière est notablement plus grande que l'énergie des particules, de sorte que la diffusion dans ces canaux est généralement négligeable.

Il existe néanmoins des situations où la diffusion dans un canal autre que l'onde s peut jouer un rôle important. Considérons par exemple un gaz de Fermi polarisé, de sorte qu'il n'y a pas de collision en onde s . Supposons de plus que l'on tire parti d'une résonance de diffusion pour le canal en

onde p , c'est-à-dire $\ell = 1$. Une telle résonance peut se produire s'il y a un état quasi-lié d'énergie proche de 0 dans le puits formé par le potentiel de van der Waals attractif et la barrière centrifuge répulsive (voir figure 10) : on parle alors de résonance de forme. Cette résonance peut également être induite par un couplage entre deux canaux de collision, l'un ouvert, l'autre fermé, selon le schéma habituel des résonances de Fano–Feshbach.

Nous avons discuté dans le cours 2021 les caractéristiques principales d'un processus de diffusion en onde p :

- Dans la région $b \ll r \ll 1/k$, la forme attendue pour la partie radiale $\chi(r)$ de la fonction d'onde $\psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$ est une combinaison linéaire de r^{-2} et de r^1 (à comparer à la combinaison de r^{-1} et r^0 pour l'onde s). On introduit le volume de diffusion v pour fixer le poids relatif de ces deux termes (il joue un rôle similaire à celui de la longueur de diffusion a pour l'onde s) :

$$b \ll r \ll 1/k : \quad \chi(r) \propto \frac{1}{r^2} - \frac{r}{3v}. \quad (58)$$

- L'amplitude de diffusion en onde p se met sous la forme $f(k, \theta) = 3 \cos(\theta) f_1(k)$ avec :

$$\text{onde } p : \quad \frac{1}{f_1(k)} = -\frac{1}{k^2 v} + \frac{k_e}{2} - ik + \dots \quad (59)$$

Le terme dominant fait lui aussi intervenir le volume de diffusion v . Le terme suivant $k_e/2$ est un terme de portée effective et le dernier terme écrit ici, l'imaginaire pur $-ik$, est une conséquence de l'unitarité du processus de diffusion (théorème optique).

Notons que la situation est notablement différente du cas de l'onde s :

$$\text{onde } s : \quad \frac{1}{f_0(k)} = -\frac{1}{a} - ik + \frac{1}{2} r_e k^2 + \dots \quad (60)$$

où le terme de portée effective était a priori petit devant $-ik$, lui-même petit devant la contribution de la longueur de diffusion. Pour un système en interaction en onde p , il est préférable de garder les deux paramètres indépendants v et k_e pour obtenir une caractérisation fidèle. Notons également que pour une résonance de Fano–Feshbach induite par un champ magnétique extérieur \mathbf{B} , ce champ brise l'invariance par rotation du problème ; il

faut alors introduire v_m et $k_{e,m}$ avec $m = -1, 0, +1$ correspondant aux trois orientations possibles du moment cinétique par rapport à \mathbf{B} .

La variation en $1/r^2$ de la fonction d'onde relative (58) suggère

- que la fonction de corrélation à deux corps sera dominée à courte distance (tout en respectant $b \ll r$) par un terme en $1/r^4$;
- que l'amplitude de probabilité pour trouver l'impulsion \mathbf{k} sera proportionnelle à la transformée de Fourier de $1/r^2$, c'est-à-dire $1/k$, soit une distribution de probabilité en impulsion en $1/k^2$.

Les analyses détaillées menées par YOSHIDA & UEDA (2015), YU, THYWISSEN et al. (2015) et YU, THYWISSEN et al. (2016) confirment cette intuition. En introduisant la variable conjuguée au volume de diffusion

$$C_{v,m} = -\frac{8\pi m}{\hbar^2} \left(\frac{\partial E}{\partial(1/v_m)} \right)_{S,N,V,k_e} \quad (61)$$

on trouve alors pour la distribution de paires à courte distance³ :

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi L^3} \frac{1}{r^4} \sum_m |Y_{1,m}(\hat{\mathbf{r}})|^2 C_{v,m}, \quad (63)$$

où la fonction $Y_{1,m}(\hat{\mathbf{r}})$ est l'harmonique sphérique dépendant des variables angulaires (θ, φ) repérant la direction du vecteur unitaire aligné avec $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. De même, on trouve pour la distribution en impulsion

$$n(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_m |Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}})|^2 C_{v,m}. \quad (64)$$

YU, THYWISSEN et al. (2015) discutent de plus l'introduction du contact C_{k_e} lié au terme de portée effective k_e , qui vient par exemple ajouter une composante en r^{-2} à la fonction de corrélation à deux corps et une composante en k^{-4} à la distribution en impulsion [consulter également YU, THYWISSEN et al. (2016) pour des termes correctifs].

On notera que la distribution en impulsion (64) n'est pas normalisable, la divergence en k^{-2} à l'infini étant trop forte. La prise en compte d'une

3. Dans le cas où les trois contacts C_m sont égaux, la relation suivante sur les harmoniques sphériques est utile :

$$\sum_m |Y_{1,m}(\mathbf{u})|^2 = \frac{3}{4\pi}. \quad (62)$$

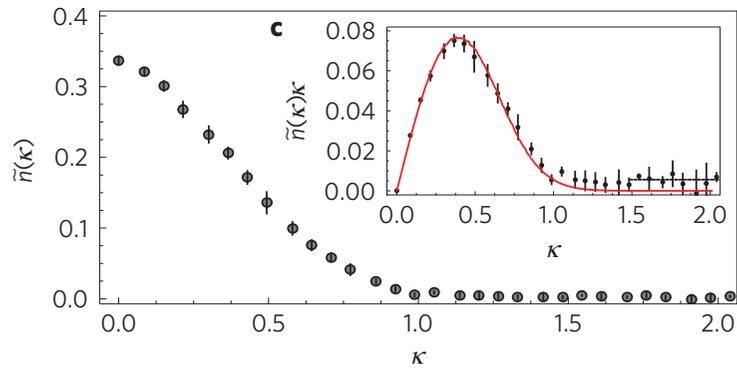


FIGURE 11. Distribution en impulsion d'un gaz de fermions polarisés (^{40}K) au voisinage d'une résonance de Feshbach en onde p pour $v_{m=\pm 1}$ ($B = 198.3\text{ G}$). Cette distribution est mesurée par temps de vol, avec intégration le long de l'axe z d'imagerie (choisi parallèle au champ magnétique). La loi attendue en $1/k^2$ se traduit donc ici par une variation en $1/\kappa$, avec $\kappa \propto (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, du fait de l'intégration le long de l'axe du faisceau imageur. Figure extraite de LUCIUK, TROTZKY et al. (2016).

coupure en k est donc indispensable pour lui donner un sens. Comme l'expliquent YOSHIDA & UEDA (2015), cette divergence est liée au fait que contrairement au cas de l'onde s , il n'existe pas de limite physique de potentiel à portée nulle conduisant à une interaction résonante en onde p (voir aussi PRICOUPENKO (2006)).

La mise en évidence d'une composante en k^{-2} dans la distribution en impulsion a été faite dans le groupe de Toronto dirigé par J. Thywissen (LUCIUK, TROTZKY et al. 2016) et le résultat est montré sur la figure 11. L'ensemble des données de LUCIUK, TROTZKY et al. (2016), obtenues à la fois par spectroscopie radio-fréquence et par mesure de $n(k)$, est reporté sur la figure 12 pour les deux contacts C_v et C_{k_e} . Comme attendu, on constate que ces contacts prennent des valeurs significatives dans le cas où un état quasi-lié est proche de l'énergie caractéristique des atomes, c'est-à-dire l'énergie de Fermi.

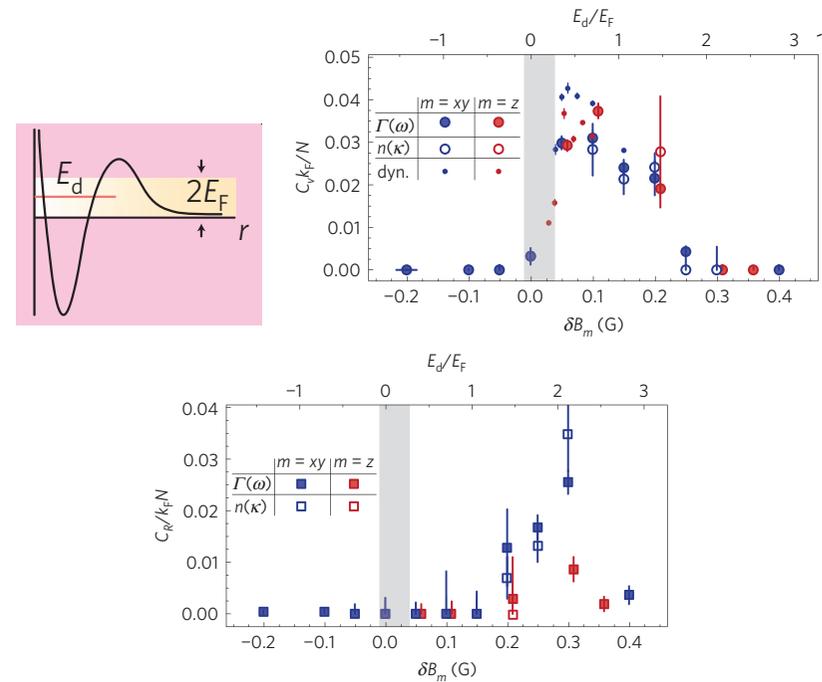


FIGURE 12. Contacts C_v et C_{k_e} , associés aux paramètres v et k_e (C_{k_e} est noté ici C_R) mesurés par spectroscopie radio-fréquence et à partir de la distribution en impulsion. Figure extraite de LUCIUK, TROTZKY et al. (2016).

4 Contact à deux corps pour le gaz de Bose

4-1 Les différents régimes pour le gaz de Bose

Nous nous intéressons ici au cas d'un gaz de bosons sans spin ou polarisés, avec des interactions en onde s caractérisées par la longueur de diffusion a . Comme toujours pour ce cours, le gaz sera supposé dilué de sorte que $nb^3 \ll 1$, où b est la portée du potentiel. L'extension des résultats de Tan au cas des bosons a été menée dès la fin des années 2000 par COMBESCOT, ALZETTO et al. (2009) (qui ont négligé les effets à trois corps), puis par BRAATEN, KANG et al. (2011), WERNER & CASTIN (2012)

et SMITH, BRAATEN et al. (2014) (qui les ont pris en compte). Les premières expériences sur les gaz de Bose ont été menées dans le groupe de Boulder par WILD, MAKOTYN et al. (2012) et seront décrites en §4-3.

Nous allons commencer par récapituler les différents régimes possibles :

- Le cas d'un gaz en interaction faible, $na^3 \ll 1$ avec $a > 0$. À basse température, ce cas peut être décrit par l'approximation de Bogoliubov ; à plus haute température, la méthode Hartree-Fock ou le développement du viriel sont utilisables.

Sur le plan théorique, si le potentiel d'interaction entre atomes est complètement répulsif, avec une portée $b \sim a$ (c'est le cas pour un potentiel de sphères dures par exemple), aucune instabilité n'est à craindre. Sur le plan pratique, il y a toujours des états liés dans le potentiel interatomique pour les espèces utilisées au laboratoire, ce qui peut induire des pertes⁴ d'atomes qui s'échappent du piège sous forme de molécules diatomiques. Ces molécules sont formées lors d'une collision à trois corps, dans laquelle deux partenaires forment l'état lié et le troisième emporte l'énergie libérée lors de la création du dimère. Rappelons que ces pertes sont absentes pour le gaz de Fermi de spin 1/2 car le principe de Pauli interdit d'avoir trois fermions proches l'un de l'autre si seulement deux états de spin \uparrow et \downarrow sont disponibles.

Heureusement, comme expliqué au chapitre 3 (§1.1), la condition $na^3 \ll 1$ garantit qu'il existe une plage de temps durant laquelle le gaz a atteint son état d'équilibre sans que les pertes mentionnées ci-dessus ne jouent un rôle appréciable.

- Le cas d'une interaction faible ($n|a|^3 \ll 1$) avec $a < 0$. À basse température et à trois dimensions, l'utilisation de la théorie de champ moyen conduit à une instabilité dynamique du gaz et à son effondrement.
- Le régime d'interaction forte, $n|a|^3 \gtrsim 1$, a pouvant être positif ou négatif. Dans ce cas, qui nécessite $|a| \gg b$, une série d'états faiblement

4. En fait, ces pertes sont elles-mêmes un processus intéressant, présentant un caractère d'universalité, comme montré théoriquement par BRAATEN & HAMMER (2013a) et LAURENT, LEYRONAS et al. (2014), et étudié expérimentalement par REM, GRIER et al. (2013), FLETCHER, GAUNT et al. (2013) et EISMANN, KHAYKOVICH et al. (2016). Par ailleurs, ces pertes peuvent conduire à une mise en défaut des relations de Tan, comme montré dans le cas uni-dimensionnel par BOUCHOULE & DUBAIL (2021).

liés à trois corps peut apparaître, ces états étant en nombre infini pour $a = \pm\infty$: c'est le problème bien connu d'EFIMOV (1971) [voir NAIDON & ENDO (2017) pour une revue]. Ces états peuvent avoir une grande extension et il est facile de les former lors des collisions dans le gaz. La contribution de ces états doit donc être prise en compte dans la détermination de l'équilibre thermodynamique du système.

Pour caractériser la thermodynamique du système, il faut alors introduire, en plus du contact à deux corps, un autre paramètre appelé *contact à trois corps* (BRAATEN, KANG et al. 2011; WERNER & CASTIN 2012; SMITH, BRAATEN et al. 2014). La première mesure expérimentale de ce contact à trois corps a été faite par FLETCHER, LOPES et al. (2017). Nous ne discuterons pas ces expériences ici car leur explication nécessite la mise en place d'un formalisme spécifique, que nous reportons à un prochain cours.

Par ailleurs, dans ce régime, la formation de dimères mentionnée plus haut devient problématique. Dans le régime proche de $T = 0$, le gaz n'a pas le temps d'atteindre son état d'équilibre avant d'avoir perdu une fraction significative de ses constituants. L'étude de l'équilibre thermodynamique d'un gaz de Bose en interaction forte ne peut donc se faire que dans le régime non dégénéré (LI & HO 2012; FLETCHER, GAUNT et al. 2013; REM, GRIER et al. 2013; CHEVY & SALOMON 2016).

4-2 Prédictions pour le contact à deux corps

Nous avons reporté dans la table 6.1 les valeurs attendues pour le contact à deux corps d'un gaz de Bose dans les régimes mentionnés ci-dessus. Dans le cas de la température nulle et hors résonance, on a affaire à un condensat de Bose-Einstein "ordinaire". La valeur du contact se déduit directement de la prédiction de champ moyen pour l'énergie du condensat :

$$E_{\text{chp. moy.}} = \frac{1}{2}gnN \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad \Rightarrow \quad C = (4\pi a)^2 nN. \quad (65)$$

Restons dans le cas non résonant et passons au cas non dégénéré. En utilisant le développement du viriel, nous avons vu au chapitre 1, §2.3, que l'énergie d'interaction est simplement doublée par rapport à la valeur (65). Le contact est donc lui aussi doublé, cette augmentation étant simplement

	$T = 0$	Non dégénéré $n\lambda^3 \ll 1$
Hors résonance	$(4\pi na)^2$	$2 \times (4\pi na)^2$
À résonance	$\sim n^{4/3}$	$32\pi(n\lambda)^2$

TABLE 6.1. Valeurs prédites pour le contact à deux corps par unité de volume C/L^3 d'un gaz de Bose.

une signature de l'effet de groupement découvert par HANBURY-BROWN & TWISS 1956.

Passons maintenant au cas résonant. La valeur à température nulle est simplement indiquée ici sous forme de la loi d'échelle $\sim n^{4/3}$ (DIEDERIX, HEIJST et al. 2011; SYKES, CORSON et al. 2014; SMITH, BRAATEN et al. 2014), mais est difficile à tester expérimentalement. En effet, comme expliqué en § 4-1, il n'est pas possible de produire le gaz dans un état d'équilibre dans ce régime, compte tenu du taux élevé de pertes à trois corps. En revanche, la prédiction de la dernière case du tableau, correspondant à un gaz non dégénéré en interaction résonnante, est testable expérimentalement (FLETCHER, LOPES et al. 2017). Nous allons maintenant expliquer brièvement comment arriver à cette valeur.

Nous utilisons le développement du viriel, déjà abordé au chapitre 1 de ce cours, qui donne le développement du grand potentiel Ω en puissances de la fugacité $z = \exp(\mu/k_B T)$:

$$\Omega = -PV = -\frac{k_B TV}{\lambda^3} \sum_{j=1}^{\infty} b_j(T) z^j \quad (66)$$

que nous allons tronquer à l'ordre 2 inclus. Nous allons utiliser la définition thermodynamique du contact (rappelons que $b_1(T) = 1$ pour toute température) :

$$C = \frac{8\pi a^2 m}{\hbar^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a} \right)_{T, V, \mu} = -16\pi^2 n N \lambda a^2 \left(\frac{\partial b_2}{\partial a} \right)_T \quad (67)$$

où nous avons utilisé $z = n\lambda^3$ à cet ordre du calcul.

Reprenons maintenant la partie de $b_2(T)$ liée aux interactions et calculée

au chapitre 1 :

$$b_2^{(\text{int})} = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\delta_0}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / m k_B T} dk + \Theta(a) 2^{3/2} e^{-E_{\text{lie}} / k_B T}. \quad (68)$$

On rappelle que la première contribution provient du continuum formé par les états de diffusion; elle fait intervenir le déphasage $\delta_0(k)$ d'une collision en onde s , donné par :

$$\frac{d\delta_0}{dk} = \frac{-a}{1 + k^2 a^2}. \quad (69)$$

La seconde contribution, due à l'éventuel état lié intervenant dans la résonance, d'énergie $E_{\text{lie}} = -\hbar^2 / m a^2$, n'est présente que dans le domaine $a > 0$, d'où la fonction de Heaviside $\Theta(a)$.

Le calcul consiste à prendre la dérivée de b_2 par rapport à a , puis considérer la limite $a = \pm\infty$. Il ne pose pas de difficultés de principe, même s'il est un peu long [voir par exemple BRAATEN & HAMMER (2013b)]. On arrive à la même valeur dans les deux limites $a \rightarrow -\infty$ (pas d'état lié) et $a \rightarrow +\infty$ (l'état lié contribue). Cette valeur est indiquée dans le tableau 6.1. Notons que bien que le contact $C(a)$ lui-même soit continu et fini en $1/a = 0$, ses dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas du fait de la singularité introduite par la fonction $\Theta(a)$. La courbe $C(a)$ présente donc un point anguleux à résonance.

4-3 Contact à deux corps et spectroscopie radiofréquence

La première détermination expérimentale du contact C pour des bosons a été menée par WILD, MAKOTYN et al. (2012) sur un gaz de ^{85}Rb condensé. Grâce à une résonance de Feshbach ($B = 155 \text{ G}$), la longueur de diffusion a été variée entre $300 a_0$ et $1300 a_0$, soit de 3 à 13 fois la portée $b \sim R_{\text{vdW}}$ du potentiel de van der Waals. Cette détermination s'est appuyée sur la spectroscopie radio-fréquence, similaire à celle décrite pour les fermions en § 2, avec la recherche d'une composante en $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$ dans l'aile du spectre [cf. § 2-3]. Un résultat typique est montré en figure 13 (gauche).

WILD, MAKOTYN et al. (2012) ont ensuite étudié (toujours dans la limite de température nulle) la variation du contact avec la longueur de diffusion

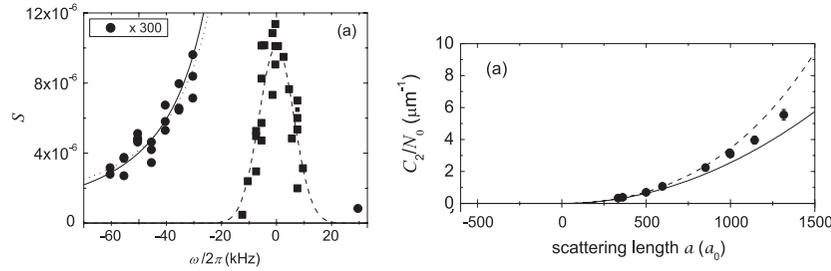


FIGURE 13. Gauche : spectre radio-fréquence mesuré sur un condensat de ^{85}Rb . On déduit la valeur du contact de l'aile de ce spectre, ajustée par une loi en $\omega^{-3/2}$. Droite : variation du contact avec la longueur de diffusion a . Figure extraite de WILD, MAKOTYN *et al.* (2012).

a . En utilisant le lien entre contact et $\partial E/\partial a$, on déduit du résultat de LEE, HUANG *et al.* (1957) la valeur attendue pour C :

$$C = (4\pi a)^2 n N_0 \left(1 + \frac{64}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \right). \quad (70)$$

Le résultat expérimental est tracé en figure 13 (droite). En trait plein, on a tracé la prédiction de champ moyen (uniquement le "1" dans la parenthèse ci-dessus). En ligne tiretée, on montre la prédiction incluant la correction en $\sqrt{na^3}$. Pour ces données, la densité moyenne est $\sim 6 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ et la valeur maximale de $\sqrt{na^3}$ est ~ 0.04 . L'origine précise de l'écart entre les données expérimentales et la prédiction (70) n'est pas connue, mais WILD, MAKOTYN *et al.* (2012) mentionnent la dépendance de la valeur de C mesurée avec \dot{B} . La quantité \dot{B} désigne ici la vitesse avec laquelle le champ magnétique est amené à sa valeur finale pour fixer la valeur de la longueur de diffusion. On peut donc suspecter que de légers effets hors équilibre sont venu perturber ces mesures.

WILD, MAKOTYN *et al.* (2012) ont également recherché une signature du contact à trois corps dans leur données. Ce contact devrait se manifester par une aile en $G(\omega)/\omega^2$, où $G(\omega)$ est une fonction log-périodique dépendant du paramètre à trois corps introduit par l'effet Efimov. Toutefois, aucune contribution mesurable de cette physique à trois corps n'a été observée dans cette expérience.

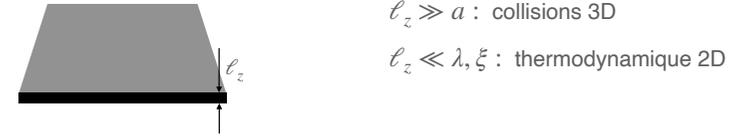


FIGURE 14. Gaz quasi-bidimensionnel utilisé pour la mesure du contact à deux corps par ZOU, BAKKALI-HASSANI *et al.* (2021).

4-4 Mesure par spectroscopie de Ramsey

ZOU, BAKKALI-HASSANI *et al.* (2021) ont effectué une mesure du contact d'un gaz de Bose dans le cas non résonant, en balayant une vaste plage de températures allant du régime quasi non-dégénéré (densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} \sim 2$) jusqu'au cas d'un condensat pratiquement pur ($\mathcal{D} \sim 70$). Cette mesure a été menée dans une configuration quasi-bidimensionnelle (figure 14) : l'épaisseur du gaz selon la dimension "gelée" est petite devant la longueur d'onde thermique et la longueur de cicatrization, mais elle reste grande devant la longueur de diffusion a , de sorte que la modélisation 3D adoptée jusqu'ici continue à être pertinente.

La procédure expérimentale tire parti du fait que les longueurs de diffusion décrivant les interactions entre atomes dans un gaz de ^{87}Rb sont toutes voisines les unes des autres pour les différents états internes composant le niveau électronique fondamental. Partant d'un gaz dans l'état interne $|1\rangle = |F=1, m=0\rangle$ ($a_{11} = 100.9 a_0$), ZOU, BAKKALI-HASSANI *et al.* (2021) ont mesuré l'énergie ΔE à fournir au gaz⁵ pour le faire basculer entièrement vers l'état $|2\rangle = |F=2, m=0\rangle$ ($a_{22} = 94.9 a_0$) [cf. figure 15]. Le contact se déduit alors directement de la définition thermodynamique :

$$C = \frac{8\pi m a^2}{\hbar^2} \left(\frac{\partial E}{\partial a} \right)_{N,V,S} \approx \frac{8\pi m a^2}{\hbar^2} \frac{\Delta E}{\Delta a} \quad (71)$$

avec $\Delta a = a_2 - a_1$. La transition s'effectue (à peu près) à entropie constante du fait de la faible variation de a .

Le transfert de $|1\rangle$ vers $|2\rangle$ est effectué par une méthode de Ram-

5. après soustraction de l'énergie $Nh\nu_0$, où $h\nu_0$ est le changement d'énergie interne pour un atome isolé.

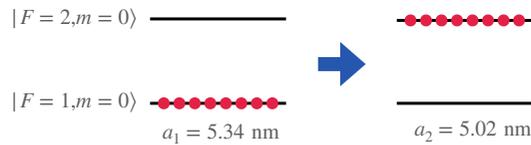


FIGURE 15. Transfert entre deux états internes de ^{87}Rb permettant de déterminer la valeur du contact à deux corps.

sey, comportant deux brèves impulsions micro-onde $\pi/2$ séparées par un temps d'attente de durée $\tau = 10$ ms. On balaye la fréquence ν de la micro-onde induisant le transfert et on cherche pour quelle valeur de ν le transfert est optimal. Un exemple de signal de Ramsey est montré en figure 16, gauche. On peut vérifier qu'au sommet de la frange centrale (dont la position dépend de la densité du gaz), le transfert de $|1\rangle$ vers $|2\rangle$ est effectivement total, ce qui valide l'utilisation de (71).

Le lien avec le contact s'établit⁶ grâce à (71) et le résultat est montré en figure 16, droite. Les résultats de ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021) sont en bon accord avec les théories existantes dans les deux cas limites du gaz non dégénéré (développement du viriel) et du gaz fortement dégénéré (méthode de champ classique ou approximation de Bogoliubov). Dans la zone critique où se produit la transition superfluide (densité dans l'espace des phases ~ 8), il n'existe à notre connaissance pas de théorie ayant reproduit ces résultats expérimentaux.

6. Pour appliquer le résultat (71), il est important que les trois longueurs de diffusion a_{11}, a_{12}, a_{22} soient voisines, c'est-à-dire que l'on soit proche de la symétrie SU(2) pour ce système à deux états. Cette contrainte sur a_{12} provient du fait que pendant la durée d'attente τ entre les deux pulses, les deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont simultanément présents dans le piège [voir ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021) pour une description détaillée de l'évolution du gaz durant cette phase].

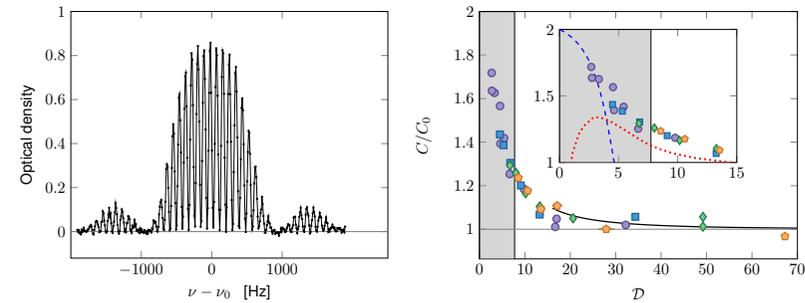


FIGURE 16. Gauche : Signal de spectroscopie de Ramsey, permettant de déterminer l'énergie à fournir à un gaz de ^{87}Rb pour faire basculer son état interne de $|F = 1, m = 0\rangle$ vers $|F = 2, m = 0\rangle$ et changer ainsi sa longueur de diffusion de $\Delta a = a_{22} - a_{11}$. Droite : Valeur du contact déduite de (71), tracée en unité du contact C_0 calculé par l'approximation de Bogoliubov. La courbe tiretée donne le résultat du développement du viriel (REN 2004). La courbe pointillée correspond aux prédictions d'une théorie de champ classique (PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002). Figure extraite de ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021).

Références

- BAYM, Gordon, CJ PETHICK, Zhenhua YU & Martin W ZWIERLEIN (2007), « Coherence and clock shifts in ultracold Fermi gases with resonant interactions », in *Physical review letters* **99**, p. 190407.
- BOUCHOULE, I. & J. DUBAIL (2021), « Breakdown of Tan's Relation in Lossy One-Dimensional Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **126**, p. 160603.
- BOUCHOULE, Isabelle, Léa DUBOIS & Léo-Paul BARBIER (2021), « Losses in interacting quantum gases : Ultraviolet divergence and its regularization », in *Phys. Rev. A* **104**, p. L031304.
- BRAATEN, Eric & H.-W. HAMMER (2013a), « Universal Relation for the Inelastic Two-Body Loss Rate » en, in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **46** arXiv : 1302.5617, p. 215203.
- BRAATEN, Eric & HW HAMMER (2013b), « Universal relation for the inelastic two-body loss rate », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **46**, p. 215203.

- BRAATEN, Eric, Daekyoung KANG & Lucas PLATTER (2010), « Short-Time Operator Product Expansion for rf Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **104**, p. 223004.
- (2011), « Universal Relations for Identical Bosons from Three-Body Physics », in *Phys. Rev. Lett.* **106**, p. 153005.
- CARCY, C., S. HOINKA, M. G. LINGHAM, P. DYKE, C. C. N. KUHN, H. HU & C. J. VALE (2019), « Contact and Sum Rules in a Near-Uniform Fermi Gas at Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* **122**, p. 203401.
- CASTIN, Yvan & Félix WERNER (2011), « Single-particle momentum distribution of an Efimov trimer », in *Phys. Rev. A* **83**, p. 063614.
- CHEVY, F & C SALOMON (2016), « Strongly correlated Bose gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **49**, p. 192001.
- CHIN, Cheng & Paul S. JULIENNE (2005), « Radio-frequency transitions on weakly bound ultracold molecules », in *Physical Review A* **71**, p. 012713.
- COHEN-TANNOUJJI, C., B. DIU & F. LALOË (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- COMBESCOT, R., F. ALZETTO & X. LEYRONAS (2009), « Particle distribution tail and related energy formula », in *Phys. Rev. A* **79**, p. 053640.
- DIEDERIX, J. M., T. C. F. van HEIJST & H. T. C. STOOFF (2011), « Ground state of a resonantly interacting Bose gas », in *Phys. Rev. A* **84**, p. 033618.
- EFIMOV, V (1971), « Weakly-bound states of three resonantly-interacting particles », in *Sov. J. Nucl. Phys* **12**, p. 101.
- EISMANN, Ulrich, Lev KHAYKOVICH, Sébastien LAURENT, Igor FERRIER-BARBUT, Benno S. REM et al. (2016), « Universal Loss Dynamics in a Unitary Bose Gas », in *Phys. Rev. X* **6**, p. 021025.
- FLETCHER, Richard J., Alexander L. GAUNT, Nir NAVON, Robert P. SMITH & Zoran HADZIBABIC (2013), « Stability of a Unitary Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **111**, p. 125303.
- FLETCHER, Richard J, Raphael LOPES, Jay MAN, Nir NAVON, Robert P SMITH, Martin W ZWIERLEIN & Zoran HADZIBABIC (2017), « Two-and three-body contacts in the unitary Bose gas », in *Science* **355**, p. 377-380.
- GUPTA, S, Z HADZIBABIC, MW ZWIERLEIN, CA STAN, K DIECKMANN, CH SCHUNCK, EGM VAN KEMPEN, BJ VERHAAR & W KETTERLE (2003), « Radio-frequency spectroscopy of ultracold fermions », in *Science* **300**, p. 1723-1726.
- HANBURY-BROWN, R. & R. Q. TWISS (1956), « Correlation between photons in two coherent beams of light », in *Nature* **177**, p. 27-29.
- HAUSSMANN, Rudolf, Matthias PUNK & Wilhelm ZWERGER (2009), « Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms », in *Physical Review A* **80**, p. 063612.
- KHRAMOV, Alexander Y., Anders H. HANSEN, Alan O. JAMISON, William H. DOWD & Subhadeep GUPTA (2012), « Dynamics of Feshbach molecules in an ultracold three-component mixture », in *Phys. Rev. A* **86**, p. 032705.
- LAURENT, Sébastien, Xavier LEYRONAS & Frédéric CHEVY (2014), « Momentum Distribution of a Dilute Unitary Bose Gas with Three-Body Losses », in *Phys. Rev. Lett.* **113**, p. 220601.
- LAURENT, Sébastien, Matthieu PIERCE, Marion DELEHAYE, Tarik YEFSAH, Frédéric CHEVY & Christophe SALOMON (2017), « Connecting Few-Body Inelastic Decay to Quantum Correlations in a Many-Body System : A Weakly Coupled Impurity in a Resonant Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **118**, p. 103403.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- LI, Weiran & Tin-Lun HO (2012), « Bose Gases near Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* **108**, p. 195301.
- LUCIUK, Christopher, Stefan TROTZKY, Scott SMALE, Zhenhua YU, Shizhong ZHANG & Joseph H THYWISEN (2016), « Evidence for universal relations describing a gas with p-wave interactions », in *Nature Physics* **12**, p. 599-605.
- MUKHERJEE, Biswaroop, Parth B. PATEL, Zhenjie YAN, Richard J. FLETCHER, Julian STRUCK & Martin W. ZWIERLEIN (2019), « Spectral Response and Contact of the Unitary Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **122**, p. 203402.
- NAIDON, Pascal & Shimpei ENDO (2017), « Efimov physics : a review », in *Reports on Progress in Physics* **80**, p. 056001.
- NARASCHEWSKI, M & RJ GLAUBER (1999), « Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases », in *Physical Review A* **59**, p. 4595.
- PIERI, Pierbiagio, Andrea PERALI & Giancarlo Calvanese STRINATI (2009), « Enhanced paraconductivity-like fluctuations in the radiofrequency spectra of ultracold Fermi atoms », in *Nature Physics* **5**, p. 736-740.
- PRICOUPENKO, Ludovic (2006), « Modeling Interactions for Resonant p-Wave Scattering », in *Phys. Rev. Lett.* **96**, p. 050401.

- PROKOF'EV, N. V. & B. V. SVISTUNOV (2002), « Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region », in *Phys. Rev. A* **66**, p. 043608.
- PUNK, M & W ZWERGER (2007), « Theory of rf-spectroscopy of strongly interacting fermions », in *Physical review letters* **99**, p. 170404.
- REM, B. S., A. T. GRIER, I. FERRIER-BARBUT, U. EISMANN, T. LANGEN et al. (2013), « Lifetime of the Bose Gas with Resonant Interactions », in *Phys. Rev. Lett.* **110**, p. 163202.
- REN, Hai-cang (2004), « The virial expansion of a dilute Bose gas in two dimensions », in *Journal of statistical physics* **114**, p. 481-501.
- ROSSI, R., T. OHGOE, K. VAN HOUCKE & F. WERNER (2018), « Resummation of Diagrammatic Series with Zero Convergence Radius for Strongly Correlated Fermions », in *Phys. Rev. Lett.* **121**, p. 130405.
- SMITH, D. Hudson, Eric BRAATEN, Daekyoung KANG & Lucas PLATTER (2014), « Two-Body and Three-Body Contacts for Identical Bosons near Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* **112**, p. 110402.
- SPIEGELHALDER, F. M., A. TRENKWALDER, D. NAIK, G. HENDL, F. SCHRECK & R. GRIMM (2009), « Collisional Stability of ^{40}K Immersed in a Strongly Interacting Fermi Gas of ^6Li », in *Phys. Rev. Lett.* **103**, p. 223203.
- STEWART, JT, JP GAEBLER, TE DRAKE & DS JIN (2010), « Verification of universal relations in a strongly interacting Fermi gas », in *Physical Review Letters* **104**, p. 235301.
- SYKES, AG, JP CORSON, JP D'INCAO, AP KOLLER, CH GREENE, Ana Maria REY, KRA HAZZARD & JL BOHN (2014), « Quenching to unitarity : Quantum dynamics in a three-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* **89**, p. 021601.
- TAN, Shina (2008), « Large momentum part of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* **323**, p. 2971-2986.
- WERNER, F., L. TARRUELL & Y. CASTIN (2009), « Number of closed-channel molecules in the BEC-BCS crossover »en, in *The European Physical Journal B* **68**, p. 401-415.
- WERNER, Félix & Yvan CASTIN (2012), « General relations for quantum gases in two and three dimensions. II. Bosons and mixtures », in *Physical Review A* **86**, p. 053633.
- WILD, RJ, P MAKOTYN, JM PINO, EA CORNELL & DS JIN (2012), « Measurements of Tan's contact in an atomic Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* **108**, p. 145305.
- YOSHIDA, Shuhei M. & Masahito UEDA (2015), « Universal High-Momentum Asymptote and Thermodynamic Relations in a Spinless Fermi Gas with a Resonant p -Wave Interaction », in *Phys. Rev. Lett.* **115**, p. 135303.
- YU, Z. & G. BAYM (2006), « Spin-correlation functions in ultracold paired atomic-fermion systems : Sum rules, self-consistent approximations, and mean fields », in *Phys. Rev. A* **73**, p. 063601.
- YU, Zhenhua, Joseph H. THYWISSEN & Shizhong ZHANG (2015), « Universal Relations for a Fermi Gas Close to a p -Wave Interaction Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* **115**, p. 135304.
- (2016), « Erratum : Universal Relations for a Fermi Gas Close to a p -Wave Interaction Resonance [Phys. Rev. Lett. 115, 135304 (2015)] », in *Phys. Rev. Lett.* **117**, p. 019901.
- ZOU, Y-Q, B BAKKALI-HASSANI, C MAURY, É LE CERF, S NASCIMBENE, J DALIBARD & J BEUGNON (2021), « Tan's two-body contact across the superfluid transition of a planar Bose gas », in *Nature communications* **12**, p. 1-6.