

Chapitre 2

L'approche de Bogoliubov quantique

Sommaire

1	L'approximation quadratique pour \hat{H}	3
1-1	Préliminaire : terme de Hartree, terme de Fock	3
1-2	Hamiltonien à N corps en seconde quantification	4
1-3	Les hypothèses de l'approche de Bogoliubov	5
1-4	Points de vue grand-canonique vs. canonique	6
2	L'hamiltonien de Bogoliubov à deux modes	6
2-1	Approche perturbative	7
2-2	Transformation canonique	8
2-3	État fondamental de l'hamiltonien	10
3	Exemple : le gaz de spin 1 en "dimension zéro"	12
3-1	Interactions en onde s	12
3-2	L'approximation du mode unique	13
3-3	Effet Zeeman et hamiltonien de Bogoliubov	14
3-4	Réponse du gaz à un saut de champ magnétique	15

Nous abordons dans ce chapitre la description d'une méthode puissante pour traiter le cas d'un gaz de Bose en interaction, l'approche de Bogoliubov¹ (BOGOLIUBOV 1947). Cette approche permet de décrire l'état fondamental du gaz ainsi que son spectre d'excitation à basse énergie, moyennant un certain nombre d'approximations que nous allons détailler dans les cours qui suivent. Cette méthode part d'un potentiel binaire d'interaction entre les particules

$$\hat{V} = \sum_{i < j} V(\hat{r}_i - \hat{r}_j), \quad (1)$$

et est fondée sur l'hypothèse que l'action de ce potentiel "ne modifie pas beaucoup" – en un sens que nous allons préciser – l'état fondamental du fluide par rapport au cas du gaz parfait.

La méthode de Bogoliubov, même si elle est un outil communément utilisé, comporte certaines subtilités que nous soulignerons dans les chapitres qui suivent. Une partie de ces subtilités provient du fait qu'il est difficile d'utiliser la méthode de Bogoliubov avec le potentiel interatomique réel. Pour toutes les espèces atomiques utilisées au laboratoire, ce potentiel contient en effet de nombreux états liés à deux particules. Le véritable état fondamental du système est donc très différent du condensat de Bose-Einstein formé à partir du gaz monoatomique trouvé dans le cas sans inter-

1. Nous avons déjà abordé cette méthode dans le cadre d'une description en termes de champs classiques dans le cours 2015-16, mais l'aspect quantique du traitement vient changer très notablement la démarche, même si certains résultats sont similaires.

action, et également très éloigné du fluide préparé, dans un état métastable, dans les expériences d'atomes froids.

On utilise fréquemment la méthode de Bogoliubov avec un potentiel de contact $V(\mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r})$, donc de portée b nulle. Le couplage g est alors défini à partir de la longueur de diffusion a du problème physique par :

$$g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (2)$$

Toutefois, on sait (cf. cours 2020-21) qu'un tel potentiel conduit à des divergences dès l'ordre 2 de la série de Born. *A fortiori*, il ne permet pas de décrire de "manière sécurisée" l'interaction entre N particules. Certaines expressions, comme la vitesse du son ou la déplétion quantique, peuvent être calculées sans difficulté alors que d'autres, comme l'énergie de l'état fondamental, divergent. Pour une version mathématiquement bien établie d'un potentiel de portée nulle, on peut utiliser² le pseudo-potential \hat{V}_{pp} , défini par son action sur une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ par :

$$\hat{V}_{pp} [\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r \psi(\mathbf{r})]. \quad (3)$$

C'est l'approche suivie dans l'article initial de LEE, HUANG et al. (1957), mais les calculs sont alors relativement subtils. En effet, comme nous l'avons expliqué dans le cours 2020-21, l'utilisation du pseudo-potential revient à changer le domaine de l'hamiltonien. Quand on utilise \hat{V}_{pp} , une fonction d'onde à deux corps $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ quelconque ne doit pas être régulière quand $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0$, mais doit varier comme

$$r \rightarrow 0 : \quad \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \Phi(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2. \quad (4)$$

Nous décrivons l'esprit de cette démarche dans le chapitre 3.

L'approche que nous allons explorer ici consiste à utiliser un potentiel $V(\mathbf{r})$ régulier, de portée b , dont la transformée de Fourier $\tilde{V}_{\mathbf{k}}$ est également régulière pour tout \mathbf{k} :

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}} = \int V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (5)$$

². Voir OLSHANII & PRICOUPEKNO (2001) pour une classe générale de potentiels de ce type.

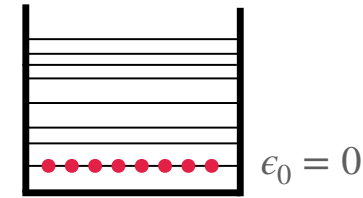


FIGURE 1. État fondamental du gaz de Bose sans interaction : toutes les particules s'accumulent dans l'état d'impulsion et d'énergie nulles (pour des conditions aux limites périodiques) et $N_0 = N$.

Nous supposons que l'action de ce potentiel à deux corps peut être décrit dans le cadre de l'approximation de Born. Pour le régime de basse énergie qui nous intéresse ici, cela entraîne en particulier le lien suivant entre la transformée de Fourier à impulsion nulle, \tilde{V}_0 , et le couplage g défini en (2) :

$$\text{approx. de Born :} \quad \tilde{V}_0 = \int V(\mathbf{r}) d^3r \approx g. \quad (6)$$

Rappelons qu'une condition de validité de l'approximation de Born est que la longueur de diffusion déduite de (6) soit petite devant la portée b du potentiel $V(\mathbf{r})$.

Dans un gaz de Bose sans interaction, l'état fondamental est obtenu en plaçant les N particules dans l'état fondamental $\mathbf{k} = 0$ (figure 1). En d'autres termes, la population N_0 de cet état $\mathbf{k} = 0$ est égale à N . Dans ce qui suit, nous allons commencer (§1) par utiliser le fait que le potentiel peut être traité comme une faible perturbation pour effectuer un développement systématique de l'hamiltonien à N corps, en supposant que la population moyenne $\langle N_0 \rangle$ de l'état $\mathbf{k} = 0$ reste très majoritaire :

$$\frac{N - \langle N_0 \rangle}{N} \ll 1. \quad (7)$$

Cela va nous permettre d'obtenir une expression approchée de l'hamiltonien ne contenant que des termes quadratiques en $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ et $a_{\mathbf{k}}$, opérateurs création et destruction d'une particule dans l'état d'impulsion $\hbar\mathbf{k} \neq 0$. Plus précisément, la structure de l'hamiltonien fera apparaître une somme de termes indépendants, portant chacun sur une paire $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. En §2, nous

allons nous concentrer sur une paire donnée pour détailler la méthode de Bogoliubov, qui utilise une transformation canonique pour diagonaliser cet hamiltonien de paires. Enfin en §3, nous illustrerons cette méthode de diagonalisation sur le cas d'un gaz spineur à l'approximation du mode spatial unique.

Le retour vers un nombre infini de paires $\{+k, -k\}$, avec les problèmes de convergence qui peuvent alors se poser, sera abordé au chapitre 3, tout comme la discussion de la validité du développement en puissances de $(N - \langle N_0 \rangle)/N$ dont nous verrons qu'elle revient à imposer $\sqrt{na^3} \ll 1$.

1 L'approximation quadratique pour \hat{H}

Nous considérons ici une assemblée de particules avec des interactions binaires. L'hamiltonien écrit dans le formalisme de la seconde quantification sur la base des ondes planes fait alors intervenir des produits de quatre opérateurs de création ou d'annihilation a_k ou a_k^\dagger (cf. appendice). Sous cette forme, il n'est pas possible de trouver analytiquement les états propres et les énergies propres du système. La méthode de Bogoliubov consiste à supposer qu'un mode particulier, en l'occurrence l'onde plane d'impulsion nulle $k = 0$, est macroscopiquement peuplé. Dans ces conditions, on peut négliger le caractère opératoire de a_0 et a_0^\dagger , puis se limiter aux termes ne faisant intervenir que des produits binaires des autres opérateurs a_k et a_k^\dagger avec $k \neq 0$. L'étude mathématique de l'hamiltonien quadratique résultant ne pose alors pas de difficultés, comme nous le verrons dans les sections suivantes.

Nous ferons dans ce qui suit l'hypothèse que $V(\mathbf{r})$ est invariant par rotation, $V(\mathbf{r}) = V(r)$, avec $r = |\mathbf{r}|$. Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais simplifiera notablement les notations. Il s'ensuit que la transformée de Fourier \tilde{V}_k est également invariante par rotation : $\tilde{V}_k = \tilde{V}_k$.

1-1 Préliminaire : terme de Hartree, terme de Fock

Commençons par considérer le cas de deux particules identiques, préparées dans des états d'impulsion bien définie $\hbar\mathbf{k}_a, \hbar\mathbf{k}_b$, avec $\mathbf{k}_a \neq \mathbf{k}_b$. Sup-

posons ces particules polarisées en spin de sorte que le degré de liberté correspondant ne joue pas de rôle ici. Nous nous intéressons à la moyenne d'un potentiel $V(|\mathbf{r}_{12}|)$, ne dépendant que de la distance r_{12} entre les deux particules.

L'état à deux particules s'écrit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b\rangle \pm |1 : \mathbf{k}_b, 2 : \mathbf{k}_a\rangle) \quad (8)$$

où les signes + et - sont associés respectivement aux bosons et aux fermions. La valeur moyenne de \hat{V} dans cet état est une somme de quatre termes

$$\langle V \rangle = \langle \Psi | \hat{V} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle \pm \langle 1 : \mathbf{k}_b, 2 : \mathbf{k}_a | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle + \dots \right) \quad (9)$$

En utilisant la définition de l'onde plane d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ dans un volume de quantification L^3 avec des conditions aux limites périodiques :

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3, \quad (10)$$

les deux termes écrits explicitement dans cette équation se calculent pour donner

$$\langle 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle = \frac{1}{L^3} \tilde{V}_0 \quad (11)$$

et

$$\langle 1 : \mathbf{k}_b, 2 : \mathbf{k}_a | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle = \frac{1}{L^3} \tilde{V}_{\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b}. \quad (12)$$

Les deux autres termes intervenant dans (9) et représentés par "... " sont égaux aux deux termes donnés ci-dessus, de sorte que la moyenne recherchée s'écrit :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{L^3} \left(\tilde{V}_0 \pm \tilde{V}_k \right) \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b \quad (13)$$

Il y a donc deux contributions à $\langle V \rangle$, la première est appelée *terme de Hartree*, la seconde *terme de Fock* (figure 2).

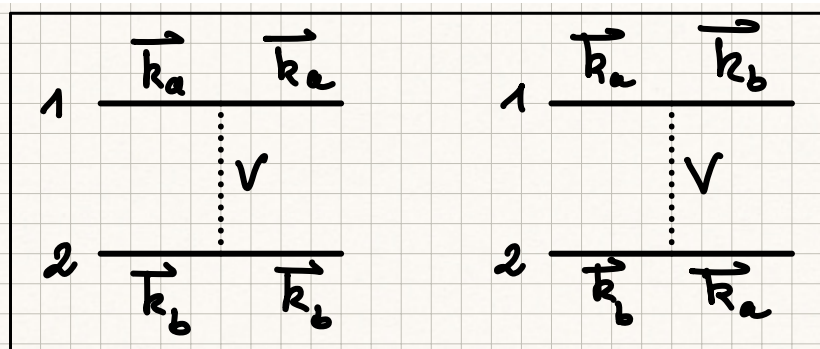


FIGURE 2. Terme de Hartree et terme de Fock intervenant dans le calcul de la valeur moyenne $\langle \Psi | \hat{V} | \Psi \rangle$ d'un état à deux particules, avec les deux ondes planes \mathbf{k}_a et \mathbf{k}_b occupées [cf. (13)].

La structure de ce résultat est caractéristique d'un problème de particules indiscernables en mécanique quantique. Si les particules étaient discernables, l'état de départ s'écrirait

$$\text{Particules discernables : } |\Psi\rangle = |1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b\rangle \quad (14)$$

et seule la première contribution à (13), le terme de Hartree encore appelé *terme direct*, serait présent dans la moyenne de $\langle V \rangle$. Le terme de Fock, également appelé *terme d'échange*, trouve son origine dans l'impossibilité fondamentale de savoir si la paire de particules (1, 2) est dans l'état $(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$ ou $(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$.

Notons que dans le cas d'une paire de bosons préparés dans le même état d'impulsion $\hbar \mathbf{k}_a$, l'état initial est $|\Psi\rangle = |1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_a\rangle$ et le terme d'échange disparaît également du résultat (13).

1-2 Hamiltonien à N corps en seconde quantification

Nous considérons maintenant une assemblée de N bosons (sans spin ou polarisés) avec des interactions à deux corps décrites par le potentiel $V(r)$. L'hamiltonien s'écrit en première quantification pour des particules

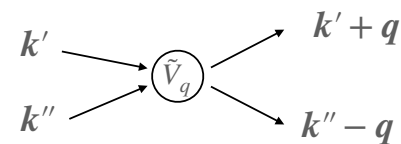


FIGURE 3. Représentation du terme d'interaction de (16), pour lequel la conservation de l'impulsion totale apparaît explicitement.

de masse m

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\hat{r}_i - \hat{r}_j|) \quad (15)$$

et on peut montrer avec les définitions rappelées dans l'appendice de ce chapitre que sa version en seconde quantification est³

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{q}} \tilde{V}_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}''-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}'}. \quad (16)$$

où l'on a introduit l'énergie cinétique à une particule associée à l'onde plane \mathbf{k}

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}. \quad (17)$$

Une représentation diagrammatique du terme d'interaction est donnée en figure 3.

En particulier, on peut vérifier que l'on retrouve bien les termes de Hartree et de Fock quand on calcule la valeur moyenne du terme d'interaction dans l'état $|\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b\rangle$. Il y a en effet 4 triplets $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$ qui contribuent dans la somme intervenant dans (16) :

- Le choix $\mathbf{q} = 0$ avec les deux possibilités $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$ et $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$: on retrouve le terme de Hartree de (13).
- Le choix $\mathbf{q} = \mathbf{k}'' - \mathbf{k}'$ avec les deux possibilités $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$ et $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$: on retrouve le terme de Fock de (13).

3. Pour alléger les notations, nous ne mettrons pas de $\hat{\cdot}$ au dessus des symboles $a_{\mathbf{k}}$ et $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ bien qu'il s'agisse d'opérateurs.

1-3 Les hypothèses de l'approche de Bogoliubov

L'expression (16) de l'hamiltonien est valable quel que soit le régime du gaz, faiblement ou fortement dégénéré. Nous allons maintenant supposer qu'un état particulier du gaz, le condensat d'impulsion nulle $\mathbf{k} = 0$, est fortement peuplé :

$$\langle N_0 \rangle \gg 1. \quad (18)$$

Un argument introduit⁴ par BOGOLIUBOV (1947) et repris dans pratiquement toutes les approches à ce problème consiste à poser que dans ces conditions, la différence entre le préfacteur $\sqrt{N_0}$ intervenant pour a_0 et le préfacteur $\sqrt{N_0 + 1}$ intervenant dans a_0^\dagger ne doit pas jouer de rôle significatif. On peut alors négliger le fait que le commutateur entre a_0 et a_0^\dagger est non nul, et remplacer ces opérateurs par $\sqrt{N_0}$.

Cette approche consiste donc (à une subtilité près pour le point de vue canonique, voir paragraphe suivant §1-4) à traiter le condensat de particules dans l'état $\mathbf{k} = 0$ comme un champ classique. Ce champ sera capable de générer ou d'absorber en nombre arbitraire des particules provenant des autres états d'impulsion $\mathbf{k} \neq 0$.

Faisons de plus l'hypothèse que le nombre de particules en dehors du mode $\mathbf{k} = 0$ est petit devant N :

$$N - \langle N_0 \rangle \ll N. \quad (19)$$

On peut alors tronquer l'hamiltonien (16) pour ne garder dans le terme d'interaction que les termes au moins linéaires en N_0 , c'est-à-dire les termes $a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}$ faisant intervenir au moins deux opérateurs a_0 ou a_0^\dagger . On arrive alors à un hamiltonien approché \hat{H}' quadratique vis-à-vis des $a_{\mathbf{k}'}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$ avec $\mathbf{k} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \frac{N_0^2}{2L^3} \tilde{V}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\epsilon_{\mathbf{k}} + n_0 \tilde{V}_0 + n_0 \tilde{V}_{\mathbf{k}} \right] a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} n_0 \tilde{V}_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

où l'on a introduit la densité spatiale dans le mode condensé $n_0 = N_0/L^3$.

4. Bogoliubov cite le livre de Dirac, *The Principles of Quantum mechanics*, comme une source d'inspiration pour cet argument.

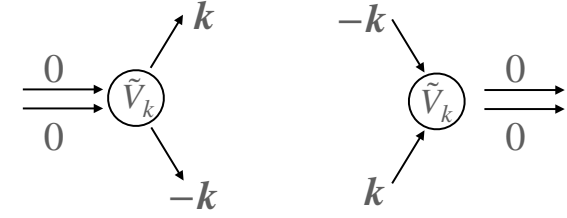


FIGURE 4. Création et annihilation d'une paire $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ apparaissant dans la seconde ligne de (20).

La première ligne de cette expression fait apparaître tout d'abord l'énergie des particules occupant le mode $\mathbf{k} = 0$ en interaction les unes avec les autres (pas de terme de Fock puisqu'elles sont toutes dans le même état), puis une première contribution des particules non condensées, avec leur énergie cinétique $\epsilon_{\mathbf{k}}$ et les termes de Hartree et de Fock en \tilde{V}_0 et $\tilde{V}_{\mathbf{k}}$. Sur la seconde ligne, on voit apparaître le fait que l'interaction va induire en plus des corrélations entre les modes \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$, par l'intermédiaire de termes qui créent ou annihilent des paires de particules dans ces modes. Les diagrammes correspondant sont représentés en figure 4.

À ce stade, rien ne garantit que les deux hypothèses faites ci-dessus, $N_0 \gg 1$ et $N - N_0 \ll N$ soient légitimes. Ce sera donc une fois l'analyse menée à bien que nous pourrions vérifier *a posteriori* quelles contraintes ces hypothèses viennent imposer sur le potentiel $V(r)$ ou sa transformée de Fourier $\tilde{V}_{\mathbf{q}}$, en association avec la densité spatiale totale $n = N/L^3$.

Non-conservation du nombre de particules. Une contre-partie immédiate de l'approximation $a_0^\dagger \approx a_0 \approx N_0$ est que le nombre total de particules n'est plus une quantité conservée pour l'hamiltonien \hat{H}' alors qu'il l'était pour l'hamiltonien \hat{H} écrit en (16). Même si ce point ne pose pas de problème sur le plan mathématique, il peut soulever des difficultés lors de l'interprétation physique de certains résultats. LEGGETT (2001) [voir aussi LEGGETT (2006)] propose pour cela une approche alternative, basée sur la méthode variationnelle avec une fonction d'essai à N particules (N est

supposé ici pair)

$$|\Psi\rangle \propto \left(a_0^\dagger a_0^\dagger - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} c(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger \right)^{N/2} |0\rangle, \quad (21)$$

les coefficients $c(\mathbf{k})$ étant des paramètres à optimiser pour minimiser l'énergie moyenne du gaz dans l'état $|\Psi\rangle$. Grâce à cet ansatz, on force l'émergence des corrélations entre les modes \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$. Les calculs correspondants sont menés de manière détaillée dans le complément E_{XVII} de l'ouvrage récent de COHEN-TANNOUJJI, DIU et al. (2021). Le résultat de cette approche est identique à celui de la méthode "standard" que nous allons développer ici. Signalons par ailleurs les approches de GARDINER (1997) et CASTIN & DUM (1998), qui utilisent également des hamiltoniens conservant le nombre de particules, ces approches étant bien adaptées au cas de gaz de densité non uniforme.

1-4 Points de vue grand-canonique vs. canonique

Dans ce qui suit, nous allons essentiellement nous intéresser à l'état fondamental de l'hamiltonien du gaz de Bose, et il va donc s'agir de minimiser l'énergie associée à l'hamiltonien \hat{H}' écrit en (20). Comme toujours en physique statistique, plusieurs ensembles peuvent être utilisés pour cela. Deux ensembles sont particulièrement pertinents :

- L'ensemble grand-canonique qui correspond au cas où le gaz (condensat+partie non condensée) est couplé à un réservoir de particules qui vient imposer son potentiel chimique μ . Il s'agit alors de minimiser la quantité $\langle H' - \mu \hat{N} \rangle$ à μ fixé. La valeur de μ est ensuite ajustée pour décrire correctement la situation physique à laquelle on s'intéresse. Ce point de vue est utilisé par exemple par NOZIÈRES & PINES (1990).
- Le point de vue canonique dans lequel on considère que le gaz (condensat+partie non condensée) est isolé du point de vue nombre de particules, même si un échange d'énergie avec un réservoir reste possible pour imposer une certaine température. Le nombre total de particules N est donc fixé et on doit imposer la contrainte

$$N = \hat{N}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (22)$$

Cela amène à reprendre (légèrement) l'assimilation de N_0 à un champ classique. C'est le point de vue utilisé par PETHICK & SMITH (2008) et par PITAEVSKII & STRINGARI (2016).

Nous prenons ici le point de vue canonique. La contrainte sur le nombre d'atomes écrite en (22) impose d'être vigilant vis-à-vis du terme dominant de \hat{H}' , $N_0^2 \tilde{V}_0 / 2L^3$. Il serait inexact de traiter N_0 simplement comme un nombre fixé pour ce terme car l'erreur faite serait comparable aux autres termes de \hat{H}' . Pour faire un développement consistant en $(N - N_0)/N$, il faut récrire ce terme sous la forme :

$$\frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2L^3} = \frac{\tilde{V}_0}{2L^3} \left(N - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right)^2 \approx \frac{N^2 \tilde{V}_0}{2L^3} - n_0 \tilde{V}_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (23)$$

Une fois cette approximation faite, l'expression de l'hamiltonien \hat{H}' se simplifie : les termes en $\tilde{V}_0 a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$ s'éliminent de sorte que \hat{H}' s'écrit :

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} n N \tilde{V}_0 + \hat{H}'' \quad (24)$$

avec

$$\hat{H}'' = \sum_{\substack{\text{paires} \\ \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}}} [\epsilon_{\mathbf{k}} + n \tilde{V}_{\mathbf{k}}] \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} \right) + n \tilde{V}_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \quad (25)$$

Dans cette somme, chaque paire $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ (avec $\mathbf{k} \neq 0$) n'est comptée qu'une seule fois. De manière équivalente, on peut sommer sur tous les $\mathbf{k} \neq 0$ et multiplier le résultat obtenu par 1/2. Notons que nous avons remplacé dans \hat{H}'' la densité condensée n_0 par la densité totale n , ce qui est légitime à cet ordre du calcul.

2 L'hamiltonien de Bogoliubov à deux modes

L'hamiltonien trouvé au paragraphe précédent en (25) est quadratique vis-à-vis des opérateurs création et annihilation $a_{\mathbf{k}}$ et $a_{\mathbf{k}}^\dagger$. On sait qu'il est toujours possible de diagonaliser exactement ce type d'hamiltonien, que ce

soit pour des bosons ou des fermions, au moyen de transformations canoniques. Dans le cours de l'année 2017-18 (chapitre 2), nous avons étudié le problème pour des fermions dans le cadre du modèle de Kitaev. Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur le cas de particules bosoniques.

Pour bien dégager les étapes essentielles de la méthode à suivre, nous allons raisonner ici sur un modèle à deux modes, caractérisés par les opérateurs (a_1^\dagger, a_1) et (a_2^\dagger, a_2) , et considérer l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (26)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \quad \hat{V} = \hbar\kappa (a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2), \quad (27)$$

où les paramètres réels ω_0 et κ ont chacun la dimension d'une fréquence. La quantité ω_0 est supposée positive de sorte que le spectre de \hat{H}_0 est simplement $(n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega_0$, avec les états propres $|n_1, n_2\rangle$. Nous avons choisi ici l'origine des énergies de sorte que l'état fondamental de \hat{H}_0 a pour énergie

$$E_{\text{fond}}^{(0)} = \hbar\omega_0, \quad (28)$$

c'est-à-dire la somme des énergies de point zéro $\hbar\omega_0/2$ pour chacun des modes a_1 et a_2 ; cet état fondamental est obtenu pour $n_1 = n_2 = 0$.

Notons que cet hamiltonien se rencontre dans de nombreux problèmes d'optique quantique et il est à la base de la génération d'états comprimés à deux modes (*two-mode squeezed vacuum state*), en peuplant les modes 1 et 2 avec des nombres de photons rigoureusement égaux à partir d'un laser pompe décrit comme un champ classique (WALLS & MILBURN 2007). On le retrouve aussi dans la description de circuits supraconducteurs (NATION, JOHANSSON et al. 2012) et dans la description de la dynamique de gaz spinoirs, où les modes (1,2) correspondent à différents états de spin, comme nous le verrons en §3.

Dans cette section, nous allons principalement chercher à prendre en compte de manière exacte le couplage \hat{V} entre les deux modes mais nous commençons pour fixer les idées en traitant le problème par la théorie des perturbations.

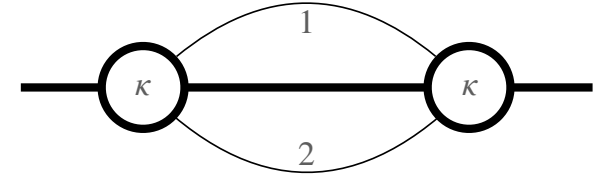


FIGURE 5. Unique diagramme contribuant à l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien (26) à l'ordre 2 en κ/ω_0 . Le trait horizontal épais représente le "réservoir" à partir duquel on peut créer des paires (1, 2). Chaque disque représente la création ou la destruction d'une paire sous l'influence du potentiel $\hat{V} \propto \kappa$.

2-1 Approche perturbative

Nous nous intéressons ici à l'état fondamental du système à deux modes. Partant de l'état fondamental non perturbé $|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle$, nous constatons immédiatement que la moyenne de \hat{V} dans cet état est nulle, de sorte que l'énergie du fondamental est inchangée à l'ordre 1 :

$$\Delta E^{(1)} = \langle \Psi_0 | \hat{V} | \Psi_0 \rangle = 0. \quad (29)$$

Passons à l'ordre 2 en \hat{V} . La formule générale de la théorie des perturbations s'écrit

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{j \neq 0} \frac{|\langle \Psi_j | \hat{V} | \Psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_j} \quad (30)$$

où la somme porte *a priori* sur tous les états excités. Dans le cas présent, seul un état excité contribue, $n_1 = n_2 = 1$, cet état ayant pour énergie $3\hbar\omega_0$. On en déduit :

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{\hbar\kappa^2}{2\omega_0}. \quad (31)$$

Nous avons représenté sur la figure 5 le diagramme correspondant. Partant de l'état fondamental non perturbé, représenté par une ligne épaisse, on crée la paire d'excitations $n_1 = n_2 = 1$ qui est ensuite détruite.

On pourrait continuer à appliquer la théorie des perturbations à des ordres plus élevés. À l'ordre $2n$ en κ/ω_0 , on sera en particulier amené à considérer le couplage entre l'état fondamental et l'état $|n, n\rangle$ résultant de

l'application de l'opérateur \hat{V}^n qui crée n paires de bosons. Toutefois, il est plus simple d'utiliser le formalisme des transformations canoniques, qui revient à resommer la série infinie fournie par la théorie des perturbations poussée à des ordres arbitrairement élevés.

2-2 Transformation canonique

Le principe de cette méthode consiste à introduire deux nouveaux couples d'opérateurs bosoniques (b_1^\dagger, b_1) et (b_2^\dagger, b_2) , combinaison linéaires des opérateurs initiaux (a_i, a_i^\dagger) avec $i = 1, 2$, de sorte que l'hamiltonien \hat{H} soit "diagonal" vis-à-vis des b_i , c'est-à-dire qu'il s'écrive comme une somme des $b_i^\dagger b_i$ et d'un terme constant.

Compte tenu de la forme particulière du couplage \hat{V} , on peut chercher les b_i sous la forme

$$\boxed{b_1 = ua_1 + va_2^\dagger \quad b_2 = ua_2 + va_1^\dagger} \quad (32)$$

où u et v sont des nombres réels. Le caractère bosonique⁵ de ces nouveaux opérateurs impose que :

$$[b_i, b_i^\dagger] = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 - v^2 = 1 \quad (33)$$

ce qui signifie que l'on peut chercher les nombres u et v sous la forme

$$u = \cosh \lambda \quad v = \sinh \lambda \quad (34)$$

où λ est lui-même un nombre réel. Par ailleurs, la forme choisie en (32) assure bien l'indépendance des deux nouveaux modes :

$$[b_1, b_2] = 0 \quad [b_1, b_2^\dagger] = 0. \quad (35)$$

La relation (32) définissant les b_i s'inverse pour donner

$$a_1 = ub_1 - vb_2^\dagger \quad a_2 = ub_2 - vb_1^\dagger \quad (36)$$

5. L'adjectif "canonique" signifie précisément que les nouveaux opérateurs b_i satisfont les relations de commutation associés à des bosons.

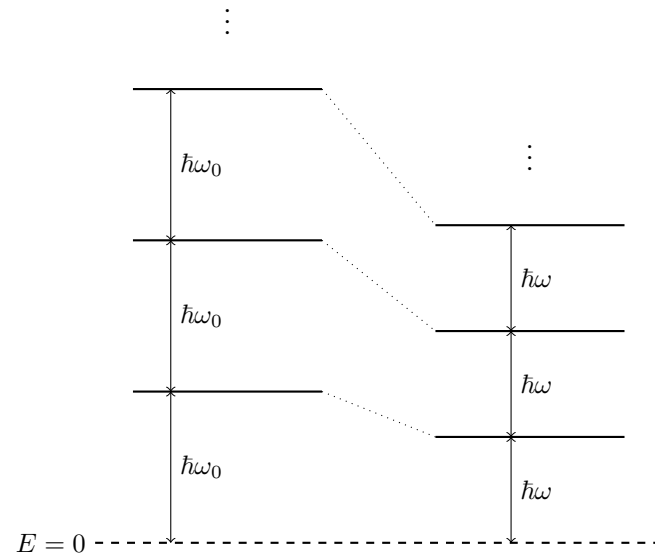


FIGURE 6. Spectre de l'hamiltonien de départ \hat{H}_0 et de l'hamiltonien de paires $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ donnés en (26-27) et (40).

de sorte que l'hamiltonien \hat{H} s'écrit en fonction des b_i :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar\omega_0 \left[(u^2 + v^2) (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) - 2uv (b_1^\dagger b_2^\dagger + b_1 b_2) + 2v^2 + 1 \right] \\ & + \hbar\kappa \left[-2uv (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) + (u^2 + v^2) (b_1^\dagger b_2^\dagger + b_1 b_2) - 2uv \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Le choix des nombres u et v se fait de sorte à annuler la contribution de $b_1^\dagger b_2^\dagger$ et de $b_1 b_2$ à cette expression. En utilisant la forme (34) pour ces nombres, on est amené à poser

$$\boxed{\tanh(2\lambda) = \frac{\kappa}{\omega_0}} \quad (38)$$

ce qui n'est possible que si

$$\boxed{|\kappa| < \omega_0} \quad (39)$$

Nous reviendrons sur cette condition dans un instant.

Une fois ce choix effectué, on obtient bien la forme recherchée :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1 \right) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (40)$$

Nous obtenons deux modes bosoniques indépendants, chacun de pulsation ω plus petite que la pulsation de départ. Nous avons donc bien réussi à diagonaliser complètement le problème et trouvé le spectre de l'hamiltonien \hat{H} , qui s'écrit $(n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega$ [cf. figure 6]. Nous détaillerons la structure de l'état fondamental d'énergie $\hbar\omega$ dans le paragraphe suivant. Les états excités sont obtenus en faisant agir les opérateurs b_1^\dagger et b_2^\dagger sur cet état fondamental.

Il sera utile de disposer des expressions suivantes pour ω

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2 \tanh^2(2\lambda)} = \frac{\omega_0}{\cosh(2\lambda)} \quad (41)$$

et pour les coefficients u et v :

$$\begin{aligned} u^2 &= \cosh^2 \lambda = \frac{1}{2} [\cosh(2\lambda) + 1] = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} + 1 \right) \\ v^2 &= \sinh^2 \lambda = \frac{1}{2} [\cosh(2\lambda) - 1] = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Condition sur $|\kappa|$. La condition sur $|\kappa| < \omega_0$ donnée en (39) traduit l'instabilité susceptible d'apparaître quand on augmente trop le couplage entre les deux modes de départ a_1 et a_2 : quand $|\kappa| \rightarrow \omega_0$ par valeurs négatives, la fréquence des modes propres b_i du système tend vers 0 et la valeur de ω donnée en (40) deviendrait imaginaire pure si $|\kappa|$ dépassait cette valeur. Le système est en fait instable : partant de l'état $|0, 0\rangle$ à un instant initial, le nombre de paires dans les modes a_i augmente exponentiellement avec le temps et le système n'a pas d'état stationnaire.

Couplage "usuel" de deux oscillateurs. Nous avons trouvé ici le spectre en $(n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega$ de deux oscillateurs couplés via le terme $\hat{V} = \hbar\kappa(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2)$. Ce spectre est similaire au spectre de l'hamiltonien \hat{H}_0 , à l'homothétie près $\omega_0 \rightarrow \omega$; il présente notamment les mêmes dégénérescences. Le

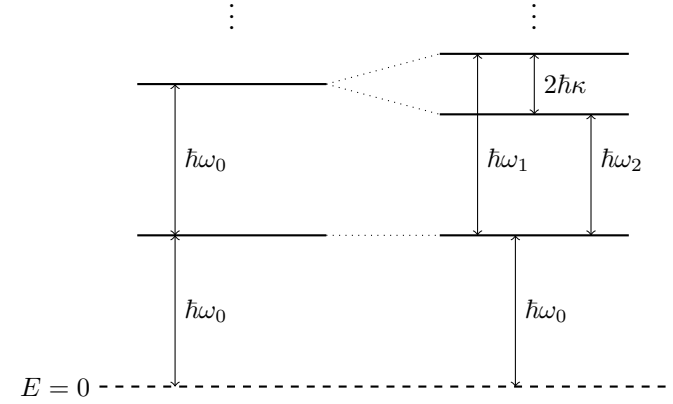


FIGURE 7. Spectre de l'hamiltonien de départ \hat{H}_0 et de l'hamiltonien avec le couplage "usuel" $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}'$ donné en (43). L'état fondamental n'est pas modifié dans ce cas.

résultat est très différent de celui obtenu pour le couplage plus habituel

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \right) \quad \hat{V}' = \hbar\kappa(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \quad (43)$$

Dans ce cas, les opérateurs permettant la diagonalisation sont

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2), \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2) \quad (44)$$

et les fréquences des deux modes issus du couplage ne sont plus dégénérées :

$$\omega_1 = \omega_0 + \kappa, \quad \omega_2 = \omega_0 - \kappa. \quad (45)$$

L'état fondamental du système n'est alors pas modifié et son énergie reste égale à $\hbar\omega_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega_2$ [cf. figure 7].

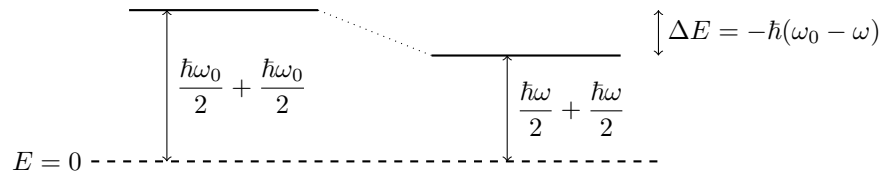


FIGURE 8. Abaissement de l'énergie de l'état fondamental du système à deux modes du fait du couplage $\hat{V} = \hbar\kappa (a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2)$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$.

2-3 État fondamental de l'hamiltonien

L'état fondamental $|\Psi\rangle$ de l'hamiltonien \hat{H} est obtenu en plaçant les deux modes propres b_1 et b_2 dans leur état fondamental. Son énergie

$$E_{\text{fond}} = \hbar\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (46)$$

correspond à la somme des énergies de point zéro $\hbar\omega/2$ des modes b_1 et b_2 [cf. figure 8]. Elle est inférieure à l'énergie $\hbar\omega_0$ du fondamental de \hat{H}_0 [cf. (28)] :

$$E_{\text{fond}} - E_{\text{fond}}^{(0)} = \hbar(\omega - \omega_0) \leq 0, \quad (47)$$

comme on pouvait s'y attendre compte tenu de la valeur moyenne de \hat{H} dans l'état non perturbé $|\Psi_0\rangle$ (l'état propre de \hat{H}_0) :

$$\langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{H}_0 | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | \hat{V} | \Psi_0 \rangle = \hbar\omega_0. \quad (48)$$

En effet, le raisonnement à la base de la méthode variationnelle permet d'affirmer que l'énergie du fondamental de \hat{H} est nécessairement inférieure à cette valeur moyenne :

$$E_{\text{fond}} = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \leq \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle. \quad (49)$$

Lien avec la théorie des perturbations. En effectuant un développement limité de l'expression générale (46) à l'ordre 2 inclus en κ , on retrouve le résultat (31) obtenu par la théorie des perturbations. Comme nous l'avons indiqué, cette expression générale peut être vue comme une resommation

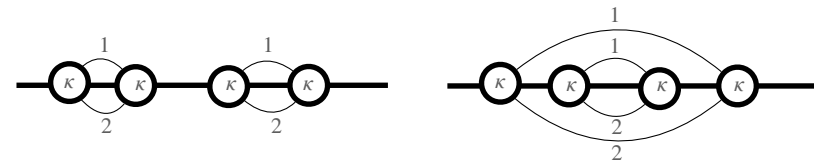


FIGURE 9. Les deux diagrammes contribuant à l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien (26) à l'ordre 4 en κ/ω_0 .

de la série de perturbation à tous les ordres en κ . Par exemple, on trouve à l'ordre 4 en κ/ω_0 :

$$E_{\text{fond}} \approx \omega_0 - \frac{\kappa^2}{2\omega_0} - \frac{\kappa^4}{8\omega_0^3} \quad (50)$$

correspondant pour l'ordre 2 au diagramme de la figure 5 et pour l'ordre 4 aux deux diagrammes de la figure 9.

Développement de l'état fondamental sur la base de Fock. L'état fondamental $|\Psi\rangle$ de l'hamiltonien \hat{H} peut se décomposer sur la base propre $|n_1, n_2\rangle$ de \hat{H}_0 sous la forme

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, n_2} c(n_1, n_2) |n_1, n_2\rangle. \quad (51)$$

Les valeurs des coefficients $c(n_1, n_2)$ se déduisent des relations :

$$b_1 |\Psi\rangle = 0 \quad b_2 |\Psi\rangle = 0 \quad (52)$$

qui imposent respectivement

$$\frac{c(n_1 + 1, n_2 + 1)}{c(n_1, n_2)} = -\frac{v}{u} \left(\frac{n_2 + 1}{n_1 + 1} \right)^{1/2} \quad (53)$$

et

$$\frac{c(n_1 + 1, n_2 + 1)}{c(n_1, n_2)} = -\frac{v}{u} \left(\frac{n_1 + 1}{n_2 + 1} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

On en déduit que seuls sont peuplés les états avec $n_1 = n_2$, ce qui était attendu compte tenu de la forme du couplage \hat{V} qui excite les deux modes

a_1 et a_2 par paires. Nous réécrivons donc cet état fondamental comme

$$|\Psi\rangle = \sum_n c(n) |n, n\rangle \quad (55)$$

avec la relation de récurrence sur les c_n :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{v}{u} = -\tanh \lambda \quad (56)$$

c'est-à-dire

$$c_n = c_0 (-\tanh \lambda)^n. \quad (57)$$

Après normalisation, l'état fondamental s'écrit donc :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh \lambda} \sum_n (-\tanh \lambda)^n |n, n\rangle \quad (58)$$

Cet état est bien connu en optique quantique sous le nom d'état comprimé du vide à deux modes (*Two-mode squeezed vacuum state*). On l'écrit de manière générique sous la forme

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n |n, n\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{N} = \sum_n \eta^{2n} = \frac{1}{1 - \eta^2}. \quad (59)$$

La loi de probabilité pour observer l'état à n paires $|n, n\rangle$ dans une mesure du nombre d'occupation est :

$$\mathcal{P}(n) = \frac{\eta^{2n}}{\mathcal{N}} = (1 - \eta^2) \eta^{2n}. \quad (60)$$

La notion de compression provient du fait qu'il y a une corrélation parfaite entre les occupations des modes a_1 et a_2 :

$$\Delta(n_1 - n_2) = 0 \quad \text{avec} \quad \hat{n}_i = a_i^\dagger a_i. \quad (61)$$

Cette absence de fluctuation de la variable $n_1 - n_2$ permet de concevoir des mesures avec un bruit bien inférieur à celui attendu pour deux états cohérents indépendants pour les modes 1 et 2, qui conduiraient à $\Delta^2(n_1 - n_2) = \Delta^2(n_1) + \Delta^2(n_2) = \bar{n}_1 + \bar{n}_2$.

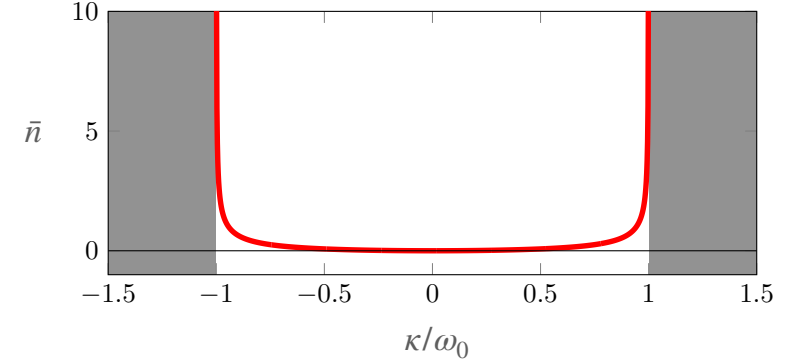


FIGURE 10. Variation du nombre moyen de paires en fonction du rapport κ/ω_0 .

Quand $|\kappa| \ll \omega_0$, c'est-à-dire $|\lambda| \ll 1$, l'état fondamental (58) est proche de l'état fondamental $|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle$ de \hat{H}_0 . En revanche, quand $|\kappa|$ devient comparable à ω_0 , λ devient arbitrairement grand et de nombreux états $|n, n\rangle$ sont significativement peuplés. Plus précisément, on trouve le nombre moyen de paires :

$$\bar{n} = \frac{\sum_n n (\tanh \lambda)^{2n}}{\sum_n (\tanh \lambda)^{2n}} = \sinh^2 \lambda = v^2 \quad (62)$$

Ce nombre moyen est tracé en fonction du rapport $\kappa/\omega_0 = \tanh(2\lambda)$ en figure 10. La variance de cette distribution est donnée par :

$$\Delta n^2 = \bar{n} (1 + \bar{n}) \quad (63)$$

de sorte qu'on trouve l'écart-type $\Delta n \approx \bar{n}$ dès que \bar{n} devient notablement plus grand que 1. On notera que la loi statistique pour $\mathcal{P}(n)$ trouvée en (60) est formellement identique à celle donnant l'occupation d'un état quantique individuel dans la loi de Bose-Einstein à température non nulle.

3 Exemple : le gaz de spin 1 en "dimension zéro"

Avant de revenir au problème à N corps du gaz de Bose à trois dimensions, il est intéressant d'examiner une application directe du modèle à deux modes que nous venons de décrire. Nous allons nous intéresser au cas d'une collection d'atomes de spin 1 fortement confinés dans un piège, de sorte que les trois degrés de liberté spatiaux des atomes sont "gelés" : seule la dynamique de spin reste possible, notamment par l'intermédiaire des collisions d'échange de spin :

$$(m = 0) + (m = 0) \rightleftharpoons (m = +1) + (m = -1), \quad (64)$$

où on a introduit le nombre quantique $m = 0, \pm 1$ caractérisant la projection du spin d'un atome sur un axe donné. Ce processus est formellement équivalent à la conversion paramétrique en optique (WALLS & MILBURN 1988) et on le rencontre également dans des circuits supra-conducteurs (NATION, JOHANSSON et al. 2012). L'état comprimé du vide à deux modes ainsi produit fait partie de ceux fréquemment envisagés pour la métrologie quantique (PEZZÈ, SMERZI et al. 2018).

Dans le cadre des expériences sur les gaz quantiques, ce processus a été proposé par DUAN, SØRENSEN et al. (2000) et PU & MEYSTRE (2000), puis mis en évidence par KLEMPT, TOPIC et al. (2010), GROSS, ZIBOLD et al. (2010) et BOOKJANS, HAMLEY et al. (2011) (voir aussi SADLER, HIGBIE et al. (2006)). Nous allons nous concentrer ici sur l'étude expérimentale et numérique récente réalisée par EVRARD, QU et al. (2021), qui ont exploré différents régimes, depuis l'évolution réversible prédite par l'approche de Bogoliubov jusqu'à un régime chaotique permettant de discuter l'hypothèse selon laquelle un état propre (quasi-)quelconque peut être vu comme une représentation – au sens micro-canonique du terme – du système thermalisé (*Eigenstate thermalization hypothesis*). La modélisation théorique que nous utiliserons est directement inspirée de l'article de MIAS, COOPER et al. (2008).

3-1 Interactions en onde s entre deux atomes de spin 1

Nous considérons ici des atomes bosoniques dont le spin total (électrons+noyau) de l'état fondamental est $s = 1$. C'est notamment le cas de

plusieurs espèces alcalines très utilisées au laboratoire : ${}^7\text{Li}$, ${}^{23}\text{Na}$, ${}^{39}\text{K}$ et ${}^{41}\text{K}$, ${}^{87}\text{Rb}$. La valeur 1 du spin est obtenue dans ce cas par couplage entre le spin 1/2 de l'électron externe et le spin 3/2 du noyau.

Lors d'une collision entre deux atomes identiques de spin $s_1 = s_2 = 1$, trois canaux sont possibles correspondant aux trois valeurs possibles $s = 0, 1, 2$ pour le spin de la paire d'atomes $s = s_1 + s_2$. On peut vérifier⁶ que l'état de spin total $s = 1$ est obtenu par une combinaison antisymétrique des deux spins s_1 et s_2 . Puisqu'on a affaire à des bosons, l'état total orbital+spin doit être symétrique par échange des deux particules, ce qui veut dire que la fonction d'onde d'espace doit être antisymétrique pour un spin total $s = 1$. Comme on s'intéresse ici au régime de très basse température, où seules les collisions en onde s sont significatives, ce canal $s = 1$ ne contribue pas à l'interaction entre particules.

Les deux canaux qui restent, $s = 0$ et $s = 2$, correspondent à des états symétriques de spin et les collisions en onde s y sont autorisées. Ces canaux sont donc caractérisés chacun par une longueur de diffusion, a_0 et a_2 . On peut alors modéliser l'interaction entre atomes par un terme de contact :

$$\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \otimes (g_0 \mathcal{P}_0 + g_2 \mathcal{P}_2) \quad \text{avec} \quad g_i = \frac{4\pi\hbar^2 a_i}{m}, \quad (65)$$

où \mathcal{P}_i est le projecteur sur le sous-espace de spin total $s = i$, avec $i = 0, 2$. Notons que la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{r})$ doit en fait être régularisée sous la forme du pseudo-potentiel comme indiqué en (3). Cette interaction peut s'écrire de manière équivalente

$$\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \otimes (\bar{g}\hat{1} + g_s \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2) (\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_2) \quad (66)$$

où l'on a posé :

$$\bar{g} = \frac{1}{3} (g_0 + 2g_2) \quad g_s = \frac{1}{3} (g_2 - g_0). \quad (67)$$

6. On trouve pour $m = \pm 1$ que :

$$\sqrt{2} |s = 1, m\rangle = |s_1, m; s_2, 0\rangle - |s_1, 0; s_2, m\rangle$$

et pour $m = 0$

$$\sqrt{2} |s = 1, 0\rangle = |s_1, +1; s_2, -1\rangle - |s_1, -1; s_2, +1\rangle.$$

Pour démontrer le passage de (65) à (66), il suffit de remarquer que le produit scalaire

$$\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 = \frac{1}{2} (\hat{s}^2 - \hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2) = \frac{1}{2} \hat{s}^2 - 2 \quad (68)$$

est égal à -2 quand il agit sur un état de spin total nul, et à $+1$ quand il agit sur un état de spin total égal à 2.

Nous allons considérer dans ce qui suit le cas d'atomes de sodium, pour lesquels on trouve pour les longueurs de diffusion \bar{a} et a_s associées respectivement à \bar{g} et g_s :

$$\bar{a} = 52.66 a_0 = 2.8 \text{ nm} \quad a_s = 1.88 a_0 = 98 \text{ pm}. \quad (69)$$

La forme de l'interaction en $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ rappelle celles des interactions dipolaires magnétiques, mais il est important de souligner que son origine est purement électrostatique, puisqu'elle résulte des interactions de van der Waals. Les interactions magnétiques sont également présentes mais elles sont beaucoup plus faibles, au moins pour les atomes alcalins, et on les négligera dans ce qui suit.

3-2 L'approximation du mode unique

Nous considérons maintenant un condensat de N atomes confinés dans un piège de forte raideur (figure 11); nous notons R l'extension spatiale du nuage et n la densité moyenne du gaz. Pour fixer les idées, nous pouvons prendre un piège harmonique isotrope de fréquence ω . Nous supposons dans ce qui suit que l'énergie d'interaction, fonction de $N\bar{g}$ et de Ng_s , est suffisamment faible pour les atomes s'accumulent essentiellement dans l'état fondamental $\psi_0(\mathbf{r})$ du piège, la gaussienne d'extension $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ (figure 12). La dynamique spatiale est donc gelée et seule la dynamique de spin peut conduire à une évolution du système. C'est l'approximation du mode unique (*single mode approximation, SMA*); en d'autres termes, on a réalisé un gaz spineur de "dimension spatiale zéro".

L'hamiltonien régissant la dynamique de spin provenant du terme d'interaction (66) s'obtient en moyennant l'hamiltonien de départ sur la distri-

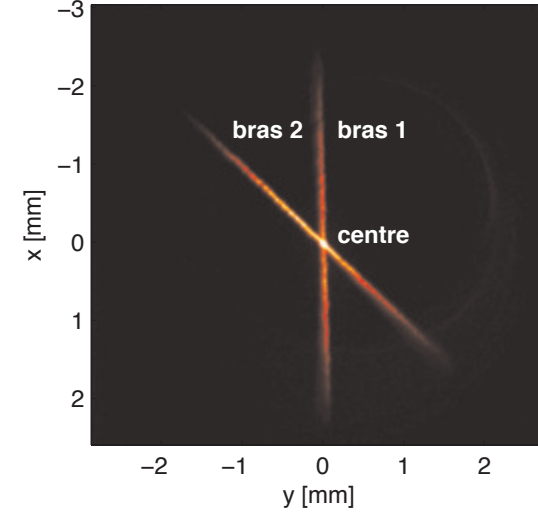


FIGURE 11. Piège dipolaire obtenu à l'intersection de deux faisceaux laser désaccordés sur le rouge de la raie de résonance atomique. Les atomes (sodium) sont visibles car ils sont excités ici par des faisceaux additionnels créant une mélasse optique. Ce type de piège assure un confinement avec des fréquences voisines selon les trois axes propres du piège. Figure extraite de la thèse de David Jacob.

bution en densité $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$:

$$\hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i,j \neq i} \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j = \frac{U_s}{2N} \hat{S}^2 + \dots \quad (70)$$

où $\hat{S} = \sum_{i=1}^N \hat{s}_i$ est l'opérateur spin total, où \dots représente un terme additif constant, et où on a posé :

$$U_s = Ng_s \int |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d^3r. \quad (71)$$

Pour la suite, il sera utile d'exprimer cet hamiltonien d'interaction en fonction des opérateurs création a_m^\dagger et annihilation a_m d'un atome dans l'état orbital ψ_0 et dans l'état de spin $m = -1, 0, +1$, avec un axe de quantification préalablement choisi. Nous introduisons aussi l'opérateur nombre

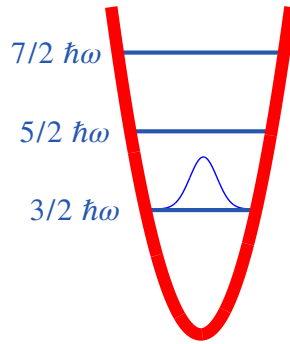


FIGURE 12. Approximation du mode spatial unique : on suppose ici que les interactions et la température sont suffisamment faibles pour que les atomes occupent essentiellement l'état fondamental du piège harmonique qui les confine. Dans ces conditions, seule la dynamique liée au degré de liberté de spin est pertinente.

d'occupation d'un état m donné : $\hat{N}_m = a_m^\dagger a_m$. Le résultat s'écrit après un calcul quelque peu fastidieux (LAW, PU et al. 1998) :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} &= \frac{U_s}{2N} \left[(\hat{N}_{+1} - \hat{N}_{-1})^2 + (2\hat{N}_0 - 1) (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}) \right] \\ &+ \frac{U_s}{N} \left[a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_0 a_0 + \text{H.c.} \right], \end{aligned} \quad (72)$$

toujours à une constante additive près.

L'expression (72) est instructive. La première ligne ne dépend que des nombres d'occupation $\hat{N}_m = a_m^\dagger a_m$ et n'induit donc pas de dynamique de spin. Cette dynamique provient de la deuxième ligne qui décrit la collision d'échange de spins :

$$\boxed{(m=0) + (m=0) \rightleftharpoons (m=+1) + (m=-1)} \quad (73)$$

A partir d'une paire d'atomes initialement dans l'état $m=0$, une collision élastique peut créer une paire d'atomes dans les états $m=+1$ et $m=-1$, et inversement. On reconnaît là un ingrédient essentiel du formalisme de Bogoliubov, que nous allons approfondir au prochain paragraphe.

Remarque. La grande différence entre \bar{g} et g_s pour l'atome de sodium (facteur ~ 30 comme indiqué en (69)) permet de relaxer quelque peu les contraintes sur l'état de départ pour l'approximation du mode unique. Même si le produit $N\bar{g}$ est tel que le condensat initial est décrit plutôt à l'approximation de Thomas-Fermi et a une extension $R \gg a_{\text{ho}}$, l'approximation du mode unique sera valable si

$$\xi_s \gg R \quad \text{avec} \quad \xi_s = \frac{1}{\sqrt{8\pi n a_s}}. \quad (74)$$

ξ_s est appelée *longueur de cicatrisation associée au spin*. De manière générale, pour un condensat scalaire de densité n et de longueur de diffusion a , la longueur de cicatrisation $\xi = 1/\sqrt{8\pi n a}$ représente la plus courte échelle de longueur sur laquelle le fluide peut réagir à une perturbation extérieure (obstacle, impureté, ...). Pour un gaz spineur, la condition (74) entraîne qu'il serait trop coûteux en énergie de former des domaines de spin au sein du domaine de taille R .

3-3 Effet Zeeman et hamiltonien de Bogoliubov

Dans ce qui suit, nous allons supposer que le gaz spineur est plongé dans un champ magnétique \mathbf{B} d'axe z fixe, que nous prenons comme axe de quantification. Nous supposons de plus que les N atomes sont préparés initialement dans l'état $m=0$. Sous l'effet des collisions élastiques (73), les états $m=\pm 1$ vont être peuplés, mais sous la contrainte $N_{+1} = N_{-1}$.

Intéressons-nous plus particulièrement au régime où l'état $m=0$ est peu dépeuplé, c'est-à-dire que $N_{\pm 1} \ll N_0 \approx N$. En traitant \hat{N}_0 comme un nombre égal à N , on peut alors simplifier l'expression de l'hamiltonien d'interaction (72) pour arriver à :

$$\hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} \approx U_s \left(\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1} + a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger + a_{+1} a_{-1} \right) \quad (75)$$

Intéressons-nous maintenant à l'énergie magnétique du gaz (figure 13) :

— À l'ordre 1 en champ magnétique, les deux états $m=\pm 1$ sont déplacés par des quantités opposées, $\pm \mu B$. Une paire d'atomes $\{m=+1, m=-1\}$ a donc, à cet ordre en champ magnétique, la même énergie que la paire de départ $\{m=0, m=0\}$: l'effet Zeeman du premier ordre n'a aucune conséquence sur la dynamique du système et peut être oublié.

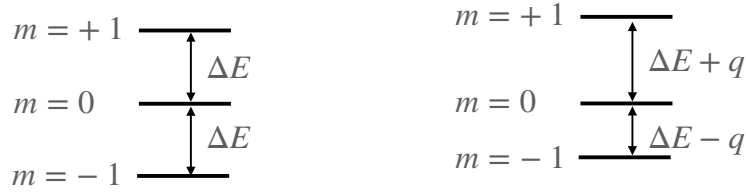


FIGURE 13. Effet Zeeman pour un atome de spin 1. À gauche, uniquement l'effet Zeeman linéaire avec $\Delta E = \mu B$; à droite, l'effet Zeeman quadratique, caractérisé par l'énergie $q \propto B^2$, a été ajouté.

— À l'ordre 2 en champ magnétique, les états $m = \pm 1$ sont déplacés d'une même quantité⁷ $q > 0$ proportionnelle à B^2 par rapport à l'état $m = 0$. Ce déplacement affecte la création de paires selon le processus (73) puisque l'énergie du membre de droite diffère de celle du membre de gauche par la quantité $2q$.

Pour les champs magnétiques considérés ici, on peut se limiter à l'ordre 2 en B et écrire la contribution de l'effet Zeeman sous la forme

$$V_{\text{Zeem.}} = q (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}), \quad (76)$$

ce qui donne l'hamiltonien total :

$$\hat{H} = (q + U_s) (a_{+1}^\dagger a_{+1} + a_{-1}^\dagger a_{-1}) + U_s (a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger + a_{+1} a_{-1}) \quad (77)$$

C'est exactement la forme de départ pour la méthode de Bogoliubov. On déduit donc de l'analyse faite à la section précédente que dans cette approximation du mode $m = 0$ faiblement dépeuplé, le spectre du système à N corps est composé de niveaux équidistants séparés par l'énergie

$$\hbar\omega = \left[(q + U_s)^2 - U_s^2 \right]^{1/2} = \sqrt{q(q + 2U_s)} \quad (78)$$

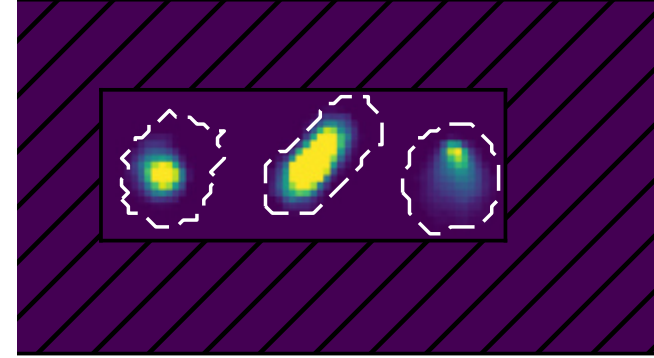


FIGURE 14. Mesure des nombres d'occupation des trois sous-niveaux Zeeman $m = -1, 0, +1$. Une expérience de Stern et Gerlach suivie d'une phase de mélasse optique permet de compter les atomes avec une précision de l'ordre d'un atome, en analysant la lumière de fluorescence collectée dans les trois taches. Figure extraite de la thèse de Bertrand Eorard.

3-4 Réponse du gaz à un saut de champ magnétique

Pour tester les prédictions de l'approche de Bogoliubov, EVRARD, QU et al. (2021) sont partis d'un condensat de sodium de $N \sim 5000$ atomes dans l'état $m = 0$. Le condensat est placé initialement dans un grand champ magnétique ($B \sim 1$ G, conduisant à $q/h \sim 280$ Hz) et il est confiné dans un piège tel que $U_s/h = 17$ Hz. Dans ces conditions, $q \gg U_s$ et le nombre de paires dans les états $m = \pm 1$ est notablement inférieur à 1. L'expérience, qui mesure la population de chaque état de spin avec une précision de l'ordre d'un atome (figure 14), confirme cette prédiction. Le champ magnétique est ensuite soudainement abaissé à une valeur beaucoup plus faible, correspondant à $q = 0.3$ Hz (donc $q \ll U_s$), et on s'intéresse à l'évolution du système.

Sur le plan théorique, comme l'hamiltonien de Bogoliubov est quadratique vis-à-vis des opérateurs a_m et a_m^\dagger , le plus simple est de se placer en point de vue de Heisenberg pour étudier l'évolution des opérateurs. On

⁷ Pour l'atome de sodium, l'effet Zeeman quadratique est de 277 Hz/G².

trouve pour la paire d'opérateurs a_1, a_{-1}^\dagger :

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = [a_1, \hat{H}] = (q + U_s)a_1 + U_s a_{-1}^\dagger \quad (79)$$

$$i\hbar \frac{da_{-1}^\dagger}{dt} = [a_{-1}^\dagger, \hat{H}] = -(q + U_s)a_{-1}^\dagger - U_s a_1 \quad (80)$$

ou encore

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} q + U_s & U_s \\ -U_s & -(q + U_s) \end{pmatrix} \quad (81)$$

et des équations couplées similaires pour la paire a_{-1}, a_1^\dagger . Les valeurs propres de la matrice $[M]$ sont $\pm\hbar\omega$ et la résolution de ce système différentiel donne le résultat :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} C - i(q + U_s)S/\hbar\omega & -iU_s S/\hbar\omega \\ iU_s S/\hbar\omega & C + i(q + U_s)S/\hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} (0) \quad (82)$$

où on a posé $C = \cos(\omega t)$ et $S = \sin(\omega t)$. Partant du vide (c'est-à-dire tous les atomes dans l'état $m = 0$) à l'instant $t = 0$, on en déduit le nombre moyen de paires $(+1, -1)$ à l'instant t :

$$N_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=\pm 1} \langle 0 | a_m^\dagger(t) a_m(t) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=\pm 1} \|a_m(t)|0\rangle\|^2 \quad (83)$$

ou encore

$$\bar{N}_p(t) = \left(\frac{U_s}{\hbar\omega} \right)^2 \sin^2(\omega t) \quad (84)$$

Notons qu'il est également possible d'utiliser le point de vue de Schrödinger et de calculer le vecteur d'état du système $|\Psi(t)\rangle$. On peut montrer [voir par exemple MIAS, COOPER et al. (2008)] que cet état est à chaque instant un état comprimé du vide à deux modes [cf. (58)], caractérisé par la valeur moyenne $\bar{N}_p(t)$ donnée en (84).

L'expérience confirme la prédiction de cette évolution réversible et oscillante d'un système à N corps (figure 15, gauche), et permet de vérifier que les nombres d'atomes dans $m = \pm 1$ restent égaux entre eux au cours du temps, aux incertitudes de mesures près. La dépendance de la fréquence ω avec le champ magnétique (caractérisé par la valeur du paramètre q) est également en accord avec la prédiction (78) de la théorie de Bogoliubov (figure 15, droite).

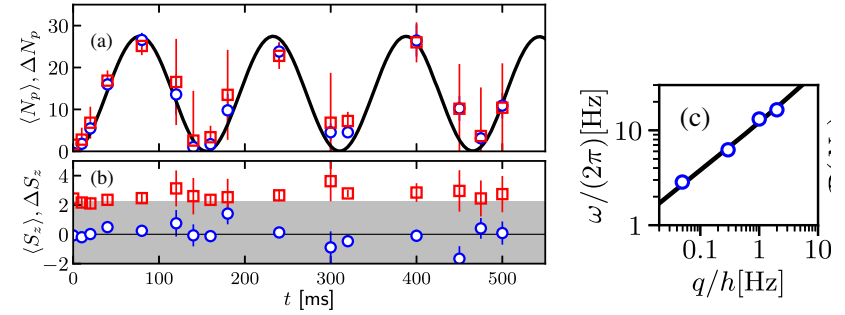


FIGURE 15. Gauche, haut : Valeur moyenne et écart-type du nombre de paires créées dans une assemblée de spin 1, sous l'effet des collisions d'échange de spin (73). La ligne continue est la prédiction (84) obtenue à partir de l'approche de Bogoliubov. Gauche, bas : la magnétisation $S_z = N_{+1} - N_{-1}$ reste nulle lors de l'évolution, aux incertitudes de mesure près. Droite : variation de la fréquence ω des oscillations avec le paramètre q caractérisant le champ magnétique. La ligne continue correspond à la prédiction (78). Figures extraites de EVRARD, QU et al. (2021).

Déplétion de l'état $m = 0$. La méthode de Bogoliubov repose ici sur l'hypothèse que la population de l'état $m = 0$ reste voisine du nombre total d'atomes. Il est intéressant de regarder ce qui se passe quand cette hypothèse n'est plus valable. Dans le cas du problème à N corps, c'est le problème de la déplétion quantique, qui va nous occuper dans le prochain chapitre.

Pour le cas du spin 1 à l'approximation du mode unique, l'hypothèse de faible déplétion de l'état $m = 0$ est vérifiée si l'amplitude des oscillations de $N_p(t)$ écrite en (84) est petite devant N , ce qui impose $q \gg U_s/N$. Rappelons qu'il faut par ailleurs $q \lesssim U_s$ pour que le nombre de paires soit supérieur à l'unité et que l'on puisse détecter un signal.

Quand on prend une valeur finale de q très petite devant U_s/N , on quitte le régime de Bogoliubov et la dynamique du système qui suit le changement soudain de champ magnétique n'est plus une dynamique réversible. Un cas simple à modéliser concerne le cas $q = 0$, pour lequel l'hamiltonien est simplement (toujours dans l'approximation du mode spatial unique) $\hat{H} = \frac{U_s}{2N} \hat{S}^2$ [cf. (70)]. Le spectre de cet hamiltonien à N corps n'est

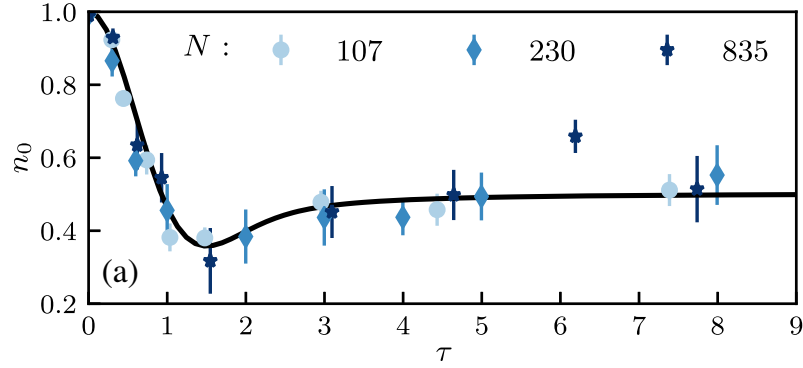


FIGURE 16. Evolution "universelle" obtenue dans le régime $q \ll U_s/N$, pour lequel la population de l'état $m = 0$ devient fortement déplétée. Dans ce régime, la méthode de Bogoliubov ne s'applique plus. La ligne continue correspond à la prédiction théorique (85). Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

alors plus linéaire comme dans le régime de Bogoliubov, mais quadratique avec des niveaux d'énergie en $(U_s/2N)S(S+1)$. L'évolution devient alors irréversible et caractérisée par une fonction universelle du temps t :

$$N_0(t) = N [1 - \tau D(\tau)] \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{U_s t}{\hbar} \quad (85)$$

où $D(\tau)$ est la fonction de Dawson (figure 16).

Un dernier point étudié par EVRARD, QU et al. (2021) porte sur l'ajout d'un terme supplémentaire à l'hamiltonien (77) qui permet d'atteindre un régime chaotique. Il est alors possible de tester numériquement si la dynamique conduit à une thermalisation de l'assemblée de spins, comme cela est prédit par la conjecture connue sous le nom de *Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)*. Nous ne décrivons pas ces résultats ici car ils s'éloignent du thème général de la méthode de Bogoliubov et nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'article de EVRARD, QU et al. (2021) et les références qu'il contient.

Appendice : le formalisme de la seconde quantification

En physique non relativiste, le nombre de particules est conservé et il est en principe possible de mener l'analyse de Bogoliubov dans le formalisme des fonctions d'onde. Néanmoins, les calculs deviennent démesurés, du fait de la simple écriture des $N!$ termes qui résultent de la symétrisation d'une fonction d'onde à N corps.

Il est très préférable d'utiliser le formalisme de la seconde quantification dont nous rappelons ici les grandes lignes pour des bosons. On se donne une base $= \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots\}$ de l'espace des états à une particule, noté $\mathcal{E}^{(1)}$, par exemple la base des ondes planes caractérisées par leur vecteur d'onde \mathbf{k} . Une base de l'espace des états à N particules, noté $\mathcal{E}^{(N)}$, est obtenue en considérant tous les états

$$|n_\alpha, n_\beta, \dots\rangle \quad \sum_\alpha n_\alpha = N \quad (86)$$

L'entier $n_\alpha \geq 0$ désigne le nombre de particules dans l'état α .

On travaille dans l'espace de Fock, somme directe des espaces de Hilbert à nombre de particules donné :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \oplus \mathcal{E}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}^{(N)} \oplus \dots \quad (87)$$

L'espace $\mathcal{E}^{(0)}$ est le vide de particules ; c'est un espace de dimension 1 correspondant à l'état noté $|0\rangle$.

On introduit l'opérateur création d'une particule dans un de ces états

$$\begin{aligned} a_\mu^\dagger : \mathcal{E}^{(N)} &\longrightarrow \mathcal{E}^{(N+1)} \\ a_\mu^\dagger |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\mu, \dots\rangle &= \sqrt{n_\mu + 1} |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\mu + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (88)$$

et l'opérateur destruction associé

$$\begin{aligned} a_\mu : \mathcal{E}^{(N)} &\longrightarrow \mathcal{E}^{(N-1)} \\ a_\mu |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\mu, \dots\rangle &= \sqrt{n_\mu} |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\mu - 1, \dots\rangle \quad \text{si } n_\mu \neq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } n_\mu = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

L'algèbre ainsi obtenue est formellement identique à celle d'un oscillateur harmonique. En particulier, les préfacteurs $\sqrt{n_\mu + 1}$ et $\sqrt{n_\mu}$ permettent une

simplification considérable dans l'écriture des opérateurs. Ils entraînent par ailleurs la valeur des commutateurs :

$$[a_\mu, a_\nu] = 0 \quad [a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger] = 0 \quad [a_\nu, a_\mu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}. \quad (90)$$

Dans ce cours, nous utilisons la base des ondes planes \mathbf{k} pour écrire les opérateurs création et annihilation qui deviennent donc $a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}}$.

Références

- BOGOLIUBOV, N. N. (1947), « On the theory of superfluidity », in *J. Phys. (USSR)* **11**, p. 23.
- BOOKJANS, Eva M., Christopher D. HAMLEY & Michael S. CHAPMAN (2011), « Strong Quantum Spin Correlations Observed in Atomic Spin Mixing », in *Phys. Rev. Lett.* **107**, p. 210406.
- CASTIN, Y. & R. DUM (1998), « Low-temperature Bose-Einstein condensates in time-dependent traps : Beyond the $U(1)$ symmetry-breaking approach », in *Phys. Rev. A* **57**, p. 3008-3021.
- COHEN-TANNOUJJI, Claude, Bernard DIU & Franck LALOË (2021), *Mécanique quantique-Tome 3*, EDP sciences.
- DUAN, L.-M., A. SØRENSEN, J. I. CIRAC & P. ZOLLER (2000), « Squeezing and Entanglement of Atomic Beams », in *Phys. Rev. Lett.* **85**, p. 3991.
- EVARD, Bertrand, An QU, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2021), « From Many-Body Oscillations to Thermalization in an Isolated Spinor Gas », in *Phys. Rev. Lett.* **126**, p. 063401.
- GARDINER, C. W. (1997), « Particle-number-conserving Bogoliubov method which demonstrates the validity of the time-dependent Gross-Pitaevskii equation for a highly condensed Bose gas », in *Phys. Rev. A* **56**, p. 1414-1423.
- GROSS, C., T. ZIBOLD, E. NICKLAS, J. ESTÈVE & M. K. OBERHALER (2010), « Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit », in *Nature* **464**, 1165 EP -.
- KLEMP, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS & J. J. ARLT (2010), « Parametric Amplification of Vacuum Fluctuations in a Spinor Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **104**, p. 195303.
- LAW, C. K., H. PU & N. P. BIGELOW (1998), « Quantum Spin Mixing in Spinor Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **81**, p. 5257.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- LEGGETT, A. J. (2001), « Bose-Einstein condensation in the alkali gases », in *Rev. Mod. Phys.* **73**, p. 333.
- (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.
- MIAS, George I., Nigel R. COOPER & S. M. GIRVIN (2008), « Quantum noise, scaling, and domain formation in a spinor Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* **77**, p. 023616.
- NATION, PD, JR JOHANSSON, MP BLENCOWE & Franco NORI (2012), « Colloquium : Stimulating uncertainty : Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits », in *Reviews of Modern Physics* **84**, p. 1.
- NOZIÈRES, P. & D. PINES (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
- OLSHANII, Maxim & Ludovic PRICOUPENKO (2001), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 010402.
- PETHICK, Christopher & Henrik SMITH (2008), *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2nd ed, Cambridge; New York : Cambridge University Press.
- PEZZÈ, Luca, Augusto SMERZI, Markus K. OBERHALER, Roman SCHMIED & Philipp TREUTLEIN (2018), « Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles », in *Rev. Mod. Phys.* **90**, p. 035005.
- PITAEVSKII, L. & S. STRINGARI (2016), *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, 2nd edition, Oxford : Oxford University Press.
- PU, H. & P. MEYSTRE (2000), « Creating Macroscopic Atomic Einstein-Podolsky-Rosen States from Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* **85**, p. 3987-3990.
- SADLER, LE, JM HIGBIE, SR LESLIE, M VENGALATTORE & DM STAMPER-KURN (2006), « Spontaneous symmetry breaking in a quenched ferromagnetic spinor Bose-Einstein condensate », in *Nature* **443**, p. 312-315.
- WALLS, D. F. & G. J. MILBURN (1988), *Quantum optics*, Berlin : Springer-Verlag.
- WALLS, Daniel F & Gerard J MILBURN (2007), *Quantum optics*, Springer Science & Business Media.