

# Chapitre 3

## L'énergie de Lee-Huang-Yang et la déplétion quantique

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Remarques préliminaires</b> . . . . .	<b>3</b>
1-1	Préliminaire 1 : le développement de Born . . . .	3
1-2	Préliminaire 2 : les différents secteurs pour $k$ . . .	4
1-3	Illustration : le spectre d'excitation . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Énergie LHY et déplétion quantique</b> . . . . .	<b>6</b>
2-1	L'énergie de l'état fondamental . . . . .	6
2-2	Calcul de l'énergie $E_{LHY}$ . . . . .	7
2-3	La déplétion quantique . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Hamiltonien de Bogoliubov pour <math>\hat{V}_{pp}</math></b> . . . . .	<b>9</b>
3-1	Potentiel de contact et pseudo-potentiel $\hat{V}_{pp}$ . . .	9
3-2	Les subtilités du pseudo-potentiel . . . . .	10
3-3	Méthode de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel	11
3-4	L'énergie de l'état fondamental . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Mesures de la déplétion quantique</b> . . . . .	<b>13</b>
4-1	Le cas de l'hélium liquide . . . . .	14
4-2	Mesure sur un gaz atomique . . . . .	15
4-3	Paires d'atomes dans le vide de Bogoliubov . . .	16

Le chapitre précédent a été consacré à la mise en place du formalisme de Bogoliubov pour un gaz de Bose. Le potentiel d'interaction entre les  $N$  atomes est choisi de la forme

$$\hat{V} = \sum_{i < j} V(|\hat{r}_i - \hat{r}_j|) \quad (1)$$

et le potentiel binaire  $V(r)$ , que l'on suppose à symétrie sphérique pour simplifier les notations, a pour transformée de Fourier

$$\tilde{V}_k = \int V(r) e^{-ik \cdot r} d^3r. \quad (2)$$

$V(r)$  est supposé régulier et suffisamment faible pour que le développement de Born associé converge. Partant de l'hamiltonien à  $N$  corps écrit en seconde quantification,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{q}} \tilde{V}_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}''-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}'} \quad (3)$$

avec  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ , nous avons fait une approximation quadratique consistant (i) à traiter le condensat en  $\mathbf{k} = 0$  comme un champ classique et (ii) ne garder que les termes de degré au plus 2 dans un développement en puissances des opérateurs création et destruction  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  et  $a_{\mathbf{k}}$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ . Après cette approximation, l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} n N \tilde{V}_0 + \hat{H}'' \quad (4)$$

avec

$$\hat{H}'' = \sum_{\substack{\text{paires} \\ \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}}} (\epsilon_k + n\tilde{V}_k) (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}) + n\tilde{V}_k (a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}), \quad (5)$$

où  $n = N/L^3$  désigne la densité spatiale du gaz.

L'hamiltonien  $\hat{H}''$  est constitué d'une somme d'hamiltoniens indépendants, portant chacun sur une paire  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ . Nous avons montré que chacun de ces hamiltoniens pouvait être diagonalisé par une transformation canonique

$$b_{\mathbf{k}} = u_k a_{\mathbf{k}} + v_k a_{-\mathbf{k}}^\dagger \quad b_{-\mathbf{k}} = u_k a_{-\mathbf{k}} + v_k a_{\mathbf{k}}^\dagger \quad (6)$$

avec

$$u_k = \cosh \lambda_k \quad v_k = \sinh \lambda_k \quad \tanh(2\lambda_k) = \frac{n\tilde{V}_k}{\epsilon_k + \tilde{V}_k}. \quad (7)$$

L'hamiltonien  $\hat{H}''$  s'écrit alors en fonction des opérateurs  $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$  :

$$\hat{H}'' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[ \hbar\omega_k b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar(\omega_k - \omega_{0,k}) \right] \quad (8)$$

avec

$$\hbar\omega_k = \left[ (\epsilon_k + n\tilde{V}_k)^2 - (n\tilde{V}_k)^2 \right]^{1/2} = (\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k)^{1/2} \quad (9)$$

$$\hbar\omega_{0,k} = \epsilon_k + n\tilde{V}_k. \quad (10)$$

Nous nous sommes donc ramenés à une collection de modes indépendants de fréquence  $\omega_k$ . On note immédiatement un effet des termes de création et destruction de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  dans l'hamiltonien  $\hat{H}''$  écrit en (5) : il abaisse l'énergie du fondamental pour chaque paire de la quantité  $\hbar\omega_k - \hbar\omega_{0,k} < 0$ . L'autre résultat important du cours précédent, qui va nous servir pour évaluer la *déplétion quantique*, porte sur la structure de cet état fondamental, et en particulier le nombre moyen de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  présentes dans cet état fondamental :

$$\bar{n}_k = v_k^2 = \frac{\omega_{0,k} - \omega_k}{2\omega_k}. \quad (11)$$

On constate immédiatement que ce nombre moyen de paires peut devenir grand quand  $\omega_k \rightarrow 0$ , c'est-à-dire d'après (9) quand l'énergie cinétique  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$  est petite devant  $n\tilde{V}_k$ .

Dans ce chapitre, nous allons exploiter cet ensemble de résultats pour étudier l'état fondamental du gaz de Bose. Dans un premier temps, nous allons continuer à travailler avec un potentiel  $V(\mathbf{r})$  pour lequel le développement de Born est valable. Nous allons discuter successivement le spectre d'excitation du système, l'énergie  $E_0$  du fondamental et la déplétion quantique, c'est-à-dire la fraction d'atomes  $n'/n$  en dehors du condensat  $\mathbf{k} = 0$ . En ce qui concerne la déplétion quantique, nous allons établir le résultat suivant :

$$\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \quad (12)$$

Rappelons que cette fraction doit être petite devant 1 pour que le développement permettant de passer de l'hamiltonien complet (3) à l'hamiltonien approché (4) soit justifiée. En ce qui concerne l'énergie de l'état fondamental, nous allons montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2} g n^2 \left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + \dots \right] \quad \text{avec} \quad g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (13)$$

Le premier terme est simplement l'énergie de champ moyen déjà rencontrée au chapitre précédent. Le second terme, qui est petit devant le premier du fait de la condition  $n'/n \ll 1$ , est la correction calculée pour la première fois par Lee, Huang et Yang (LEE, HUANG et al. 1957) qui s'écrit également, en notant  $L^3$  le volume occupé par le gaz :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2} g n^2 \times \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (gn)^{5/2} \quad (14)$$

Il est important de noter que l'énergie  $E_0$  ne fait intervenir le potentiel  $V(\mathbf{r})$  que par l'intermédiaire de la longueur de diffusion<sup>1</sup>  $a$  (ou du coefficient de

1. Le terme suivant dans le développement du crochet est (WU 1959) :

$$\left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + 8 \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) na^3 \ln(na^3) + \dots \right] \quad (15)$$

et ne dépend donc lui aussi que de la longueur de diffusion  $a$ . Le terme qui arrive ensuite dans le développement et qui est représenté par  $\dots$  est proportionnel à  $n$ ; il fait intervenir la portée effective  $r_e$  ainsi qu'un paramètre à trois corps calculé par TAN (2008).

couplage  $g$  qui lui est proportionnel).

Une fois ces résultats établis, nous aborderons un autre type d'interaction, le pseudo-potentiel  $\hat{V}_{pp}$ , qui est de portée nulle. Les résultats obtenus dans le cadre de l'approximation de Born et indiqués ci-dessus resteront formellement valables, mais nous soulignerons quelques difficultés propres à  $\hat{V}_{pp}$ . Signalons également la publication récente de CARLEN, HOLZMANN et al. (2021) qui développe une approche alternative rigoureuse au gaz de Bose pour le cas d'un potentiel purement répulsif, à la fois pour le cas des basses et des hautes densités, et qui présente des comparaisons détaillées avec des calculs Monte Carlo. Pour finir, nous décrirons un certain nombre d'expériences récentes qui ont permis de mesurer précisément les différentes quantités physiques que nous venons de mentionner.

## 1 Remarques préliminaires

### 1-1 Préliminaire 1 : le développement de Born

Comme au chapitre précédent, nous considérons dans cette partie un potentiel d'interaction à deux corps régulier de portée  $b$ . Nous supposons que l'interaction de deux atomes sous l'effet de ce potentiel peut être traitée par le développement de Born, la longueur de diffusion s'écrivant comme un développement en puissances de  $V$  :

$$a = a^{(1)} + a^{(2)} + \dots, \quad g = g^{(1)} + g^{(2)} + \dots \quad (16)$$

avec  $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$ .

Rappelons brièvement la nature de cette approximation et son critère de validité à basse énergie. Lors d'une collision binaire, l'amplitude de diffusion de la particule relative de  $\mathbf{k}_i$  vers  $\mathbf{k}_f$  est donnée par l'élément de matrice de  $\hat{T}(E)$  entre ces deux états, avec  $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m_r$  et  $E = \hbar^2 k_i^2/2m_r$  ( $\hat{p}$  et  $m_r = m/2$  représentent l'impulsion et la masse de la particule relative) :

$$\hat{T}(E) = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} + \dots \quad (17)$$

L'approximation de Born consiste à ne garder que le premier terme de ce

développement :

$$\langle \mathbf{k}_f | \hat{T}(E) | \mathbf{k}_i \rangle \approx \langle \mathbf{k}_f | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle = \frac{\tilde{V}_{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}}{L^3}. \quad (18)$$

Nous nous intéressons au régime des collisions de basse énergie (collisions en onde s). En prenant la limite  $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat déjà utilisé au chapitre précédent :

$$g^{(1)} \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a^{(1)}}{m} = \tilde{V}_0. \quad (19)$$

Une condition nécessaire pour que cette approximation soit valable est que le terme suivant dans le développement de Born soit petit devant le terme conservé. L'élément de matrice du terme suivant se calcule aisément en introduisant une relation de fermeture dans l'espace des moments :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_f | \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle &= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \frac{\langle \mathbf{k}_f | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + i0_+} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 L^3} \int \frac{\tilde{V}_{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}} \tilde{V}_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_i}}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + i0_+} d^3k. \end{aligned} \quad (20)$$

Prenons la limite  $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| \rightarrow 0$  dans cette équation, en utilisant  $m_r = m/2$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_f | \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle &\approx -\frac{m}{(2\pi)^3 \hbar^2 L^3} \int \frac{\tilde{V}_k^2}{k^2} d^3k \\ &= -\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2 L^3} \int_0^\infty \tilde{V}_k^2 dk, \end{aligned} \quad (21)$$

cette intégrale convergeant dès que  $|\tilde{V}_k|$  décroît plus vite que  $1/\sqrt{k}$  à l'infini. Comme  $|\tilde{V}_k|$  prend des valeurs significatives pour des valeurs de  $k$  allant jusqu'à  $\sim 1/b$ , la valeur correspondante de l'intégrale est, à un coefficient numérique près dépendant de la forme précise du potentiel :

$$\langle \mathbf{k}_f | \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle \sim -\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2 L^3} \frac{\tilde{V}_0^2}{b}. \quad (22)$$

La contribution de ce terme (toujours négatif) à la longueur de diffusion  $a$  est petite devant la contribution dominante si

$$\frac{m}{2\pi^2\hbar^2} \frac{\tilde{V}_0^2}{b} \ll \tilde{V}_0 \quad \text{ou encore} \quad a^{(1)} \ll b. \quad (23)$$

C'est le critère recherché pour que l'approximation de Born à basse énergie (19) soit valable.

L'analyse ci-dessus permet de donner la première correction à l'approximation de Born, qui nous sera utile dans la suite :

$$g^{(2)} \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a^{(2)}}{m} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\tilde{V}_k|^2}{2\epsilon_k} d^3k \quad (24)$$

avec comme précédemment  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ , cette correction  $\sim a^{(1)} \times (a^{(1)} / b)$  étant toujours négative.

## 1-2 Préliminaire 2 : les différents secteurs pour $k$

Les différentes quantités physiques mentionnées en introduction, comme l'énergie de l'état fondamental ou la déplétion quantique, font intervenir des intégrales sur le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Il est donc important d'identifier dès maintenant les comportements des deux termes principaux qui interviendront dans toutes ces intégrales,  $n\tilde{V}_k$  et  $\epsilon_k$ , pour les comparer entre eux.

Nous avons fait l'hypothèse que le potentiel  $V(r)$  est régulier de portée  $b$ . Nous supposons dans ce qui suit que sa transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$  est à peu près constante et égale à  $\tilde{V}_0$  tant que  $k \ll 1/b$ , puis décroît et tend vers 0 quand  $k$  devient nettement plus grand que  $b$ . Un exemple de variation pour  $V(r)$  et  $\tilde{V}_k$  est donné en figure 1 dans le cas d'un potentiel gaussien.

Dans l'expression (9) de la fréquence du mode associé à la paire  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ , nous voyons apparaître la somme

$$\epsilon_k + 2n\tilde{V}_k \quad (25)$$

avec  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ ; il est alors utile de déterminer lequel de ces deux termes est prépondérant :

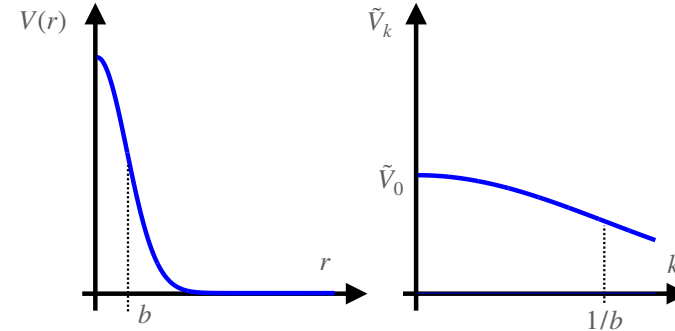


FIGURE 1. Un potentiel  $V(r)$  de portée  $b$  et sa transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$  de portée  $1/b$ .

— Quand  $k \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , alors que  $\tilde{V}_k$  tend vers la valeur non nulle  $\tilde{V}_0$ . Le terme dominant est  $n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$ .

— Quand  $k \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_k$  diverge alors que  $\tilde{V}_k \rightarrow 0$ . C'est alors  $\epsilon_k$  qui domine.

Il nous faut maintenant évaluer le point à partir duquel  $\epsilon_k$  devient dominant par rapport à  $n\tilde{V}_k$ . Pour cela, commençons par définir la valeur  $k_0$  pour laquelle  $\epsilon_k$  est égale à  $n\tilde{V}_0$  :

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = n\tilde{V}_0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = \frac{\sqrt{2mn\tilde{V}_0}}{\hbar}. \quad (26)$$

La question est de savoir si  $\tilde{V}_k$  est encore voisin de  $\tilde{V}_0$  pour  $k = k_0$ , ou s'il a déjà fortement décro. On sera dans le premier cas si  $k_0 \ll 1/b$  et dans le cas opposé si  $k_0 \gg 1/b$ . Ces deux cas limites sont représentés en figure 2.

En reprenant le lien (19) entre longueur de diffusion et  $\tilde{V}_0$ , la définition de  $k_0$  s'écrit

$$k_0 = \sqrt{8\pi n a} \equiv \frac{1}{\xi} \quad (27)$$

où  $\xi$  est appelée *longueur de cicatrisation (healing length)*. La condition  $k_0 \ll 1/b$  peut alors s'écrire :

$$k_0 \ll 1/b \quad \Leftrightarrow \quad 8\pi n a b^2 \ll 1. \quad (28)$$

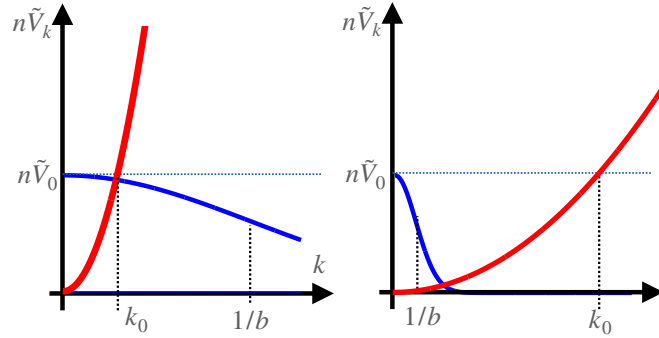


FIGURE 2. Les deux situations possibles pour trouver l'égalité entre l'énergie cinétique à une particule  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$  (en rouge) et l'énergie d'interaction  $n\tilde{V}_k$  (en bleu).

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que la condition (28) est réalisée et qu'on est donc dans le cas du diagramme de gauche de la figure 2. Cette hypothèse peut être vue comme une condition de faible densité. Plus précisément, on peut écrire  $nab^2$  sous la forme

$$nab^2 = nb^3 \times \frac{a}{b}. \quad (29)$$

Nous avons expliqué dans le premier chapitre que nous considérerons ici des gaz dilués au sens de  $nb^3 \ll 1$  et la validité du développement de Born requiert par ailleurs que  $a/b$  soit petit devant 1.

Dans le régime représenté sur le diagramme de gauche de la figure (2), nous pouvons identifier trois domaines de valeurs de  $k$  distincts (voir figure 3) :

- Domaine 1,  $k \ll k_0 = 1/\xi$  : le terme  $n\tilde{V}_k$  domine l'énergie cinétique  $\epsilon_k$  et on peut par ailleurs prendre  $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$ .
- Domaine 2,  $k_0 \ll k \ll 1/b$  : l'énergie cinétique  $\epsilon_k$  est dominante et  $\tilde{V}_k$  reste proche de sa valeur à l'origine  $\tilde{V}_0$ .
- Domaine 3,  $1/b \ll k$  : l'énergie cinétique  $\epsilon_k$  est dominante et  $\tilde{V}_k$  tend vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$  (ce domaine sera absent pour le pseudo-potentiel).

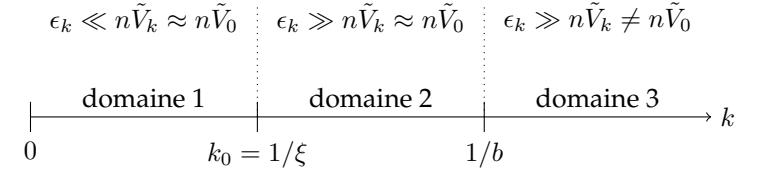


FIGURE 3. Les trois domaines pertinents pour le nombre d'onde  $k$  quand la condition de faible densité (28) est remplie.

**Remarque.** Même si les gaz quantiques correspondent au cas de figure que nous venons de discuter, il est intéressant d'envisager le cas opposé représenté sur le diagramme de droite de la figure 2, obtenu pour une situation de haute densité,  $8\pi nab^2 \gg 1$ . Pour bien préciser les paramètres dans ce cas, il est préférable de se donner une forme spécifique de potentiel, par exemple le potentiel de Yukawa [voir par exemple CEPERLEY, CHESTER et al. (1978) et CAMPANA, D'AURIA et al. (1979)]

$$\tilde{V}_k = \frac{\tilde{V}_0}{1 + k^2 b^2}, \quad V(\mathbf{r}) = V_0 \frac{e^{-r/b}}{r/b}, \quad \tilde{V}_0 = 4\pi b^3 V_0. \quad (30)$$

On pourrait s'inquiéter de la validité de l'approche de Bogoliubov dans ce régime de haute densité, mais il n'y a en fait pas de problème. En effet, on peut montrer que la déplétion quantique s'écrit dans ce cas :

$$\text{Haute densité : } \frac{n'}{n} \sim \frac{1}{(nab^2)^{1/4}} \times \frac{a}{b}. \quad (31)$$

et elle est donc d'autant plus faible que la densité est grande ! Plus précisément, le premier terme du produit intervenant dans le membre de droite est inférieur à 1 par définition de la situation de haute densité, et le second terme est petit devant 1 du fait du critère de validité de l'approximation de Born. Notons que l'on peut prendre la limite d'une portée  $b$  infinie, c'est-à-dire un potentiel de Coulomb. Ce problème a été étudié initialement par FOLDY (1961) et GIRARDEAU (1962). La phase condensée de Bose-Einstein est alors en compétition avec la formation d'un cristal de Wigner, mais on peut montrer dans la limite haute densité considérée ici que la phase condensée de Bose-Einstein conduit à une énergie plus basse (CEPERLEY, CHESTER et al. 1978; HALINEN, APAJA et al. 2000).

### 1-3 Illustration : le spectre d'excitation

Une fois l'hamiltonien de Bogoliubov mis sous la forme

$$\hat{H}' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} + \text{constante}, \quad \hbar\omega_{\mathbf{k}} = \left( \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2n\tilde{V}_k \epsilon_{\mathbf{k}} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

la quantité physique la plus simple à étudier est son spectre d'excitation, c'est-à-dire l'énergie et l'impulsion qu'il faut apporter au système pour le faire passer de son état fondamental à un état excité.

Les excitations élémentaires du système sont obtenues en faisant agir un des opérateurs  $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  sur l'état fondamental du système. Une telle opération confère au fluide l'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$  et l'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$ , puisque  $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  est combinaison linéaire de  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  (qui amène  $\hbar\mathbf{k}$ ) et de  $a_{-\mathbf{k}}$  (qui enlève  $-\hbar\mathbf{k}$ ). Nous allons maintenant discuter les différents régimes possibles pour cette excitation élémentaire, en nous appuyant sur les différents domaines de valeurs de  $k$  que nous venons d'identifier.

— **Domaine 1.** Dans ce domaine, on a  $n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0 \gg \epsilon_k$  et on trouve

$$\omega_k \approx ck \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{n\tilde{V}_0/m}. \quad (33)$$

On retrouve le spectre de phonons bien connu, qui apparaît également dans une théorie de Bogoliubov menée avec des champs classiques [cf. cours 2015-16]. Rappelons que ce spectre linéaire est un élément clé de la superfluidité du gaz; il permet en effet à une impureté localisée de se propager dans le gaz sans dissiper d'énergie, pourvu que sa vitesse soit suffisamment basse.

— **Domaine 2.** Dans ce domaine, on a  $\epsilon_k \gg n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$  et on trouve

$$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + n\tilde{V}_0. \quad (34)$$

Ce résultat s'interprète simplement à partir des contributions de Hartree et de Fock calculées au cours précédent. Il correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour faire passer une particule du condensat, donc depuis l'état d'impulsion nulle et avec une énergie d'interaction avec ses voisins égale à  $n\tilde{V}_0$  [uniquement le terme de Hartree, puisque le

terme de Fock (échange) est nul dans ce cas], à un état excité d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et une énergie d'interaction  $2n\tilde{V}_0$  [Hartree+Fock]. Cette énergie à fournir est donc  $\epsilon_k + 2n\tilde{V}_0 - n\tilde{V}_0$ , comme indiqué en (34).

— **Domaine 3.** Dans ce domaine, on a  $\epsilon_k \gg n\tilde{V}_k \neq n\tilde{V}_0$  et on trouve

$$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + n\tilde{V}_k \quad (35)$$

Le résultat s'interprète là aussi à partir des contributions de Hartree et de Fock. L'énergie initiale de la particule quand elle fait partie du condensat est  $n\tilde{V}_0$  et l'énergie finale est  $\epsilon_k + n(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_k)$ . Les termes de Hartree initiaux et finaux se compensent, pour ne laisser que l'énergie cinétique et le terme de Fock.

Nous verrons dans la suite de ce chapitre et dans le prochain qu'il est possible d'ajouter des termes négligés dans l'approximation de Bogoliubov et de resommer ainsi la série de Born décrivant des collisions à deux corps. Cette procédure, discutée initialement par BELIAEV (1958), revient à prendre en compte par exemple des processus virtuels comme

$$(\mathbf{k}) + (0) \longleftrightarrow (\mathbf{k} - \mathbf{q}) + (\mathbf{q}) \quad (36)$$

qui correspond à l'application de l'opérateur  $a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} a_0$  et de son conjugué. L'effet de cette resommation est de remplacer  $\tilde{V}_0$  par un terme proportionnel à l'amplitude de diffusion à basse énergie  $f(k=0) = -a$ , plus précisément par le couplage  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ . Les résultats (33) et (34) deviennent alors respectivement

$$\text{Domaine 1 :} \quad \omega_k \approx ck \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{ng/m} \quad (37)$$

$$\text{Domaine 2 :} \quad \hbar\omega_k \approx \epsilon_k + ng. \quad (38)$$

## 2 Énergie LHY et déplétion quantique

### 2-1 L'énergie de l'état fondamental

Dans ce paragraphe, nous allons évaluer l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien approché  $\hat{H}'$  donné en (4). Notre but sera de faire apparaître le développement de Born (16) dans l'expression de cette énergie.

En particulier, nous souhaitons aller à l'ordre 2 inclus en  $V$  pour le terme dominant, représentant l'énergie de champ moyen.

L'état fondamental est obtenu en plaçant chaque mode décrit par les opérateurs  $b_k^\dagger, b_k$  dans son état fondamental, de sorte que l'énergie recherchée s'écrit :

$$E_{\text{fond}} = \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \hbar\omega_k - \hbar\omega_{0,k}. \quad (39)$$

En utilisant les valeurs (9-10) de  $\omega_k$  et  $\omega_{0,k}$ , puis en remplaçant la somme discrète par une intégrale, on obtient :

$$\frac{E_{\text{fond}}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0 + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left[ \left( \epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k \right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k \right] d^3k. \quad (40)$$

Il est important de s'assurer de la convergence à l'infini de cette intégrale qui intervient dans cette expression. Aux grands  $k$ , comme expliqué en §1-2,  $n\tilde{V}_k$  tend vers 0 alors que  $\epsilon_k$  croît. On peut donc effectuer un développement limité<sup>2</sup> de la racine carrée contribuant à l'intégrale

$$\begin{aligned} \left( \epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k \right)^{1/2} &= \epsilon_k \left( 1 + \frac{2n\tilde{V}_k}{\epsilon_k} \right)^{1/2} \\ &\approx \epsilon_k + n\tilde{V}_k - \frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k} + \frac{n^3\tilde{V}_k^3}{2\epsilon_k^2} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Ici, le terme dominant de l'intégrande est

$$-\frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k}, \quad (43)$$

c'est-à-dire le même terme que celui apparaissant dans  $a^{(2)}$ , le deuxième ordre du développement de Born (24) de la longueur de diffusion. Le critère de convergence est donc toujours une décroissance de  $|\tilde{V}_k|^2$  à l'infini plus rapide que  $1/k$ , que nous supposons acquise ici.

2. Nous utilisons le développement limité :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4). \quad (41)$$

À ce stade, le terme dominant de  $E_{\text{fond}}$  donné en (40) est la première contribution du membre de droite,  $\frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0$ , avec  $\tilde{V}_0 = g^{(1)}$ . Comme annoncé en introduction de ce paragraphe, nous souhaitons exprimer ce terme en fonction de  $g$  avec une précision meilleure que  $g^{(1)}$ , et aller jusqu'à l'ordre 2 en  $V$ . Pour cela, nous pouvons réécrire ce terme dominant sous la forme :

$$\frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}n^2 \left( g^{(1)} + g^{(2)} \right) - \frac{1}{2}n^2g^{(2)} \quad (44)$$

puis de réinjecter le deuxième terme  $-\frac{1}{2}nNg^{(2)}$  dans l'intégrale sur  $k$  en utilisant l'expression (24) de  $g^{(2)}$ . On arrive alors à :

$$E_{\text{fond}} = E_{\text{chp.moy.}} + E_{\text{LHY}} \quad (45)$$

avec

$$\frac{E_{\text{chp.moy.}}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2 \left( g^{(1)} + g^{(2)} \right) \approx \frac{1}{2}gn^2 \quad (46)$$

et

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left[ \left( \epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k \right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k + \frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k} \right] d^3k \quad (47)$$

## 2-2 Calcul de l'énergie $E_{\text{LHY}}$

Un point important de l'expression (47) de l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  porte sur le comportement aux grands  $k$  de l'intégrande. Alors que le terme dominant de l'intégrande apparaissant en (40) faisait intervenir  $\tilde{V}_k^2/\epsilon_k$  [voir (43)], ce terme dominant est exactement compensé par la contribution de  $g^{(2)}$ . L'intégrande de  $E_{\text{LHY}}$  tend maintenant vers 0 beaucoup plus vite aux grands  $k$ , avec le terme dominant

$$\text{Terme dominant pour } \epsilon_k \gg \tilde{V}_k : \quad \frac{n^3\tilde{V}_k^3}{2\epsilon_k^2}. \quad (48)$$

Même si  $\tilde{V}_k$  ne décroît que très lentement à l'infini, la convergence de l'intégrale est maintenant assurée par la présence de  $\epsilon_k^2 \propto k^4$  au dénominateur.

Il est donc intéressant d'approfondir les valeurs de  $k$  qui contribuent de manière significative à cette intégrale. Reprenons pour cela la figure 3 sur laquelle on a distingué trois secteurs :

- La zone 1 des faibles  $k$  où  $\epsilon_k \ll n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$ .
- La zone 2 des  $k$  intermédiaires où  $\epsilon_k \gg n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$ .
- La zone 3 des grands  $k$  où  $\epsilon_k$  est toujours dominant et où  $\tilde{V}_k$  diffère significativement de  $\tilde{V}_0$ .

Compte tenu de la décroissance rapide de l'intégrande intervenant dans  $E_{\text{LHY}}$  [cf. (48)], la zone 3 a une contribution négligeable. En nous limitant à la contribution des zones 1 et 2, nous pouvons donc remplacer  $\tilde{V}_k$  dans  $\tilde{V}_0$  dans cette intégrale :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left[ \left( \epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_0\epsilon_k \right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_0 + \frac{n^2\tilde{V}_0^2}{2\epsilon_k} \right] d^3k. \quad (49)$$

Pour terminer ce calcul, notons que l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  est une petite correction par rapport au terme de champ moyen. Nous pouvons y remplacer systématiquement  $a^{(1)}$  par  $a$ , ou de manière équivalente  $g^{(1)} = \tilde{V}_0$  par  $g$ . De cette manière, nous obtenons une expression en fonction de  $a$  ou  $g$  qui correspond à un développement systématique en puissances de  $V$ , à l'ordre 2 inclus. Insistons sur le fait que cela n'est possible que grâce à la décroissance rapide de l'intégrande de (47). Cela n'aurait pas été le cas si on avait cherché à calculer explicitement l'intégrale (40) : la forme complète de la dépendance en  $k$  de  $\tilde{V}_k$  aurait alors contribué. Fort heureusement, cette contribution se réintègre en totalité dans le terme d'ordre 2 du développement de Born,  $a^{(2)}$ .

Après le changement de variable  $x = k(\hbar^2/2mn\tilde{V}_0)^{1/2}$  [ou encore  $x = k\xi$  avec  $\xi = 1/\sqrt{8\pi na}$ ] dans l'intégrale (49), on obtient

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{\hbar^2}{m} (na)^{5/2} \mathcal{I} \quad (50)$$

où on a posé

$$\mathcal{I} = 16\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ x^2 + 1 - (x^2 + 2x)^{1/2} - \frac{1}{2x} \right] dx. \quad (51)$$

Après un calcul explicite de cette intégrale, on arrive à :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2} gn^2 \times \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}, \quad (52)$$

ce qui est le résultat annoncé en (13). Comme indiqué en introduction, l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  est petite devant l'énergie de champ moyen dès que la condition de validité "basse densité" de l'approche de Bogoliubov,  $\sqrt{na^3} \ll 1$ , est satisfaite.

Nous avons donc vu apparaître ici le développement de Born pour la longueur de diffusion, avec les contributions d'ordre 1 et 2 à prendre en compte pour le terme dominant de champ moyen, la seule contribution d'ordre 1 étant suffisante pour le terme LHY. On peut chercher à aller plus loin<sup>3</sup> et inclure tous les termes de ce développement pour exprimer le résultat final uniquement en fonction de  $a = \sum_{j=1}^{\infty} a^{(j)}$ . Nous ne ferons pas ici cette resommation pour un potentiel  $V(r)$  arbitraire car elle est très technique (voir par exemple BELIAEV (1958), HUGENHOLTZ & PINES (1959), GAVORET & NOZIERES (1964) et NOZIERES & PINES (1990)). Qui plus est, le caractère convergent des séries que l'on resomme n'est pas facile à établir, surtout en présence d'états liés dans le potentiel  $V(r)$  qu'il s'agit d'ignorer pour ne traiter que le cas d'un gaz d'atomes libres. Ainsi LIEB, SEIRINGER et al. (2005) écrivent à propos de ces méthodes<sup>4</sup> : *They all rely on some special assumptions about the ground state that have never been proved, or on the selection of special terms from a perturbation series which likely diverges.*

### 2-3 La déplétion quantique

La dernière étape de notre traitement réside dans la validation de l'approximation à la base de la méthode de Bogoliubov. Est-il correct de supposer que le nombre de particules  $N'$  en dehors de l'état  $\mathbf{k} = 0$  est petit devant le nombre total  $N$  ?

Pour évaluer  $N'$ , nous pouvons utiliser directement le résultat du modèle à deux modes développé au cours précédent. Le nombre moyen de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  dans l'état fondamental du système est donnée par  $v_k^2$ , où le coefficient  $v_k$  est rappelé en (11). En sommant la contribution de toutes

3. Cette possibilité était mentionnée par Bogoliubov dans son article initial (BOGOLIUBOV 1947), et il remerciait Landau pour cette "remarque importante".

4. On pourra également consulter la discussion en pages 463-464 de GAVORET (1963).



les paires, on trouve donc le nombre d'atomes  $N'$  recherché :

$$N' = \sum_{k \neq 0} v_k^2 = \frac{1}{2} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \left[ \frac{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}{(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k)^{1/2}} - 1 \right] d^3k. \quad (53)$$

Comme lors du calcul de l'énergie du fondamental, il importe bien sûr de vérifier la convergence de cette intégrale :

- Au voisinage de l'origine, grâce au jacobien en  $d^3k = 4\pi k^2 dk$ , il n'y a pas de problème de divergence bien que le contenu de la parenthèse diverge comme  $1/k$ .
- Aux grandes valeurs de  $k$ , le terme dominant de l'intégrande est<sup>5</sup> :

$$\frac{n_0^2 \tilde{V}_k^2}{2 \epsilon_k^2}. \quad (54)$$

Ce comportement asymptotique est le même que celui trouvé ci-dessus pour l'énergie  $E_{LHY}$  dans le cadre du développement de Born [voir (48)] et la conclusion est identique : même si  $\tilde{V}_k$  ne décroît que très lentement à l'infini, l'intégrale sera convergente grâce au facteur  $\epsilon_k^2 \propto k^4$  qui apparaît au dénominateur.

La procédure est donc similaire à celle utilisée pour calculer  $E_{LHY}$ . Parmi les trois zones de valeurs de  $k$  identifiées en figure 3, seules les zones 1 et 2 contribuent de manière significatives à l'intégrale (53). Dans ces zones, on peut faire l'approximation  $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0 \approx g$  et on arrive à l'expression pour la densité non condensée  $n' = N/L^3$  :

$$n' = (na)^{3/2} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} - x \right) x dx, \quad (55)$$

où l'on a posé  $x = k\xi$ . L'intégrale figurant dans cette expression se calcule analytiquement et le résultat (55) s'écrit

$$\frac{n'}{n} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}. \quad (56)$$

5. On utilise le développement limité  $(1 + 2u)^{-1/2} = 1 - u + \frac{3}{2}u^2 + \dots$  et  $(1 + u)(1 + 2u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \dots$  avec  $u = n\tilde{V}_k/\epsilon_k$ .

Nous voyons apparaître ici l'infiniment petit  $\sqrt{na^3}$  annoncé en introduction. Le résultat (56) ne fait intervenir que la longueur de diffusion et sa portée dépasse le cas du potentiel régulier décrit par l'approximation de Born; elle s'étend au cas d'un potentiel quelconque, en particulier le pseudo-potentiel, comme nous le vérifierons au prochain paragraphe.

Pour faire le lien avec la condition de faible densité établie en § 1-2 [cf. (28)], il est intéressant de réécrire ce résultat sous la forme :

$$\frac{n'}{n} \sim \sqrt{na^3} \frac{a}{b} \quad (57)$$

qui est le produit de deux termes petits devant 1 : la petitesse du premier terme  $\sqrt{na^3}$  provient de la condition (28) et celle du second terme  $a/b$  découle du critère de validité de l'approximation de Born.

### 3 Hamiltonien de Bogoliubov pour $\hat{V}_{pp}$

Après avoir étudié en détail l'effet du couplage créé par un potentiel régulier  $V(r)$ , dans la limite  $|a| \ll b$  permettant d'utiliser le développement de Born, nous passons au cas du pseudo-potentiel, de portée  $b = 0$ , mais de longueur de diffusion  $a$  arbitraire. Les résultats (12) et (13) pour la déplétion quantique et l'énergie de l'état fondamental seront inchangés, mais la démarche à suivre présente quelques subtilités spécifiques que nous allons discuter.

#### 3-1 Potentiel de contact et pseudo-potentiel $\hat{V}_{pp}$

Nous avons étudié en détail dans le cours de l'an dernier comment obtenir à trois dimensions un tel potentiel de portée nulle en physique quantique. Le choix le plus simple semble être le potentiel de contact

$$V(\mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k : \quad \tilde{V}_k = g. \quad (58)$$

Mais ce potentiel conduit à une divergence de l'amplitude de diffusion et n'est donc pas utilisable tel quel. Ce comportement singulier s'observe par

exemple sur le développement de Born : le premier ordre est régulier et donne

$$a_1 = \frac{mg}{4\pi\hbar^2}, \quad (59)$$

mais le deuxième ordre  $a_2$  donné en (24) fait apparaître l'intégrale  $\int (1/k^2) d^3k$  qui est divergente.

Le pseudo-potential  $\hat{V}_{pp}$  permet de résoudre ce problème de divergence tout en gardant une portée nulle. On définit son action<sup>6</sup> sur une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  par :

$$\hat{V}_{pp} [\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r \psi(\mathbf{r})]_{r=0} \quad (60)$$

Cette expression permet de donner un sens au potentiel quand il agit sur des fonctions régulières en  $\mathbf{r} = 0$  et aussi sur des fonctions divergeant comme  $1/r$ . Plus précisément, on trouve que  $\hat{V}_{pp}$  "efface" tout terme divergeant comme  $1/r$  :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} + \psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \hat{V}_{pp} [\psi(\mathbf{r})] = g \psi_{\text{reg}}(0) \delta(\mathbf{r}) \quad (61)$$

où  $\psi_{\text{reg}}(\mathbf{r})$  est régulière en  $\mathbf{r} = 0$ . L'action de  $\hat{V}_{pp}$  sur des fonctions régulières (comme les ondes planes  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ) est donc identique à celle du potentiel de contact (58), mais  $\hat{V}_{pp}$  a également une action bien définie sur les ondes sphériques qui jouent un rôle essentiel en théorie de la diffusion :

$$\hat{V}_{pp} \left[ \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \right] = \hat{V}_{pp} \left[ \frac{1}{r} + \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - 1}{r} \right] = i\mathbf{k}g \delta(\mathbf{r}). \quad (62)$$

On peut donc résoudre complètement le problème d'une collision à deux corps interagissant via ce pseudo-potential et on trouve en particulier que la longueur de diffusion  $a$  est toujours liée à la constante de couplage  $g$  par la relation  $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ .

### 3-2 Les subtilités du pseudo-potential

Quand on manipule le pseudo-potential, il est important de garder à l'esprit plusieurs subtilités dans son action. Un exemple est fourni par l'ac-

6. Voir OLSHANII & PRICOUPEKNO (2001) pour une généralisation de cette définition.

tion de  $\hat{V}_{pp}$  sur une somme infinie de termes. Considérons l'identité :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3k \quad (63)$$

et appliquons  $\hat{V}_{pp}$  sur les deux membres :

— Sur le membre de gauche, l'action de  $\hat{V}_{pp}$  est par définition :

$$\hat{V}_{pp} \left[ \frac{1}{r} \right] = 0 \quad (64)$$

— Sur le membre de droite, si on s'autorise à intervertir l'action de  $\hat{V}_{pp}$  et l'intégrale sur  $\mathbf{k}$  (ce qui est en fait incorrect), on trouve

$$\begin{aligned} \hat{V}_{pp} \left[ \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3k \right] &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\hat{V}_{pp} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]}{k^2} d^3k \\ &= \frac{g \delta(\mathbf{r})}{2\pi^2} \int \frac{1}{k^2} d^3k = \frac{g \delta(\mathbf{r})}{2\pi^2} \int 4\pi dk \end{aligned} \quad (65)$$

qui est une intégrale divergente en  $k = +\infty$  !

Il convient donc d'être vigilant dès que l'on veut calculer l'action de  $\hat{V}_{pp}$  sur une fonction que l'on développe en Fourier, comme en (63). Ce point apparaît quand on considère l'action de  $\hat{V}_{pp}$  en seconde quantification

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{V}_{pp} [\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] d^3r d^3r' \quad (66)$$

où  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  est l'opérateur champ qui détruit une particule au point  $\mathbf{r}$ . Le développement de cet opérateur sur la base des ondes planes s'écrit :

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}} \quad (67)$$

Si on insère ce développement dans (66) et que l'on permute l'action de  $\hat{V}_{pp}$  et la sommation sur  $\mathbf{k}$ , on arrive à

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{g}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}. \quad (68)$$

C'est exactement la forme qu'on aurait déduite de l'expression générale

$$\frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \tilde{V}_q a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}. \quad (69)$$

en prenant  $\tilde{V}_q = g$  pour tout moment  $\mathbf{q}$ , ce qui correspond en fait au potentiel de contact naïf  $g \delta(\mathbf{r})$  donné en (58). En passant de (66) à (68), on a omis la subtile différence entre  $\hat{V}_{pp}$  et un pur potentiel de contact, ce qui ouvre la voie à des divergences.

Pour éliminer ces divergences, deux stratégies sont possibles. On peut s'interdire l'intervention de l'action de  $\hat{V}_{pp}$  avec toute somme infinie sur  $\mathbf{k}$ , et à travailler uniquement avec des opérateurs du type (66) (LEE, HUANG et al. 1957). L'autre approche, qui est validée par un traitement utilisant le groupe de renormalisation (BRAATEN, KUSUNOKI et al. 2008), consiste à mener les calculs avec l'expression "ondes planes" de  $\hat{V}_{pp}$  [c'est-à-dire l'expression (68)] tout en guettant l'apparition de termes divergents de la forme

$$\frac{g}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{k^2} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int 4\pi dk. \quad (70)$$

Ces termes "signeront" le résultat de l'application de  $\hat{V}_{pp}$  sur une fonction proportionnelle à  $1/r$ , qui donne en fait un résultat nul, et ils devront donc simplement être soustraits du résultat final :

$$\boxed{\frac{g}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0} \quad (71)$$

De façon plus générale, rappelons que le pseudo-potential vient changer le domaine de travail : pour le problème à deux corps interagissant par un potentiel régulier, l'espace des fonctions d'onde  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est composé des fonctions continues des deux variables  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ . Quand on utilise le pseudo-potential pour décrire l'interaction, le domaine de l'hamiltonien est modifié. Il s'agit de l'ensemble des fonctions satisfaisant *la condition aux limites de Bethe–Peierls*, c'est-à-dire se comportant comme

$$r \rightarrow 0 : \quad \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \Phi(\mathbf{R}) \quad (72)$$

avec

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (73)$$

Cette condition aux limites de Bethe–Peierls joue un rôle important dans le choix de fonctions d'essai si on souhaite aborder le problème par la méthode variationnelle.

### 3-3 Méthode de Bogoliubov pour le pseudo-potential

Une fois établie l'expression de l'opérateur  $\hat{\mathcal{V}}$  décrivant l'interaction entre particules, la démarche de Bogoliubov se déroule de manière identique à ce que nous avons décrit pour un potentiel  $V(\mathbf{r})$  régulier. On suppose que la majorité des particules sont dans l'état condensé  $\mathbf{k} = 0$  et on traite les opérateurs  $a_0$  et  $a_0^\dagger$  comme des nombres classiques, en négligeant leur commutateur. On arrive alors à l'hamiltonien approché :

$$\boxed{\hat{H}' = \frac{1}{2}gnN + \hat{H}''} \quad (74)$$

et

$$\boxed{\hat{H}'' = \sum_{\substack{\text{paires} \\ \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}}} [\epsilon_k + gn] \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} \right) + gn \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right)} \quad (75)$$

Le terme dominant de  $\hat{H}$  est l'énergie constante  $\frac{1}{2}gnN$  : c'est l'énergie de champ moyen calculée en supposant toutes les particules occupant le même état  $\mathbf{k} = 0$ .

La diagonalisation de  $\hat{H}''$  se fait avec la même transformation canonique,  $b_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ , les coefficients  $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$  étant donnés par

$$u_{\mathbf{k}} = \cosh \lambda_{\mathbf{k}} \quad v_{\mathbf{k}} = \sinh \lambda_{\mathbf{k}}, \quad (76)$$

la variable auxiliaire  $\lambda_{\mathbf{k}}$  étant définie par

$$\sinh(2\lambda_{\mathbf{k}}) = \frac{gn}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \quad \cosh(2\lambda_{\mathbf{k}}) = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + gn}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \quad (77)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\tanh(2\lambda_k) = \frac{gn}{gn + \epsilon_k} = \frac{1}{1 + k^2\xi^2}} \quad (78)$$

où la longueur de cicatrisation  $\xi$  est donnée par

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8\pi a n}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn}}. \quad (79)$$

L'hamiltonien  $\hat{H}$  s'écrit en fonction des  $b_k, b_k^\dagger$  :

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{k \neq 0} \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + E_0 \quad \text{avec} \quad \hbar\omega_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k}} \quad (80)$$

la fréquence  $\omega_k$  et l'énergie  $gn$  pouvant également se mettre sous la forme :

$$\hbar\omega_k = \epsilon_k e^{2\lambda_k} \quad gn = \frac{1}{2}\epsilon_k (e^{4\lambda_k} - 1). \quad (81)$$

L'énergie de l'état fondamental se déduit en principe du résultat général précédent :

$$\Delta E = \sum_{k \neq 0} \left( \frac{1}{2}\hbar\omega_k - \frac{1}{2}\hbar\omega_{0,k} \right) \quad (82)$$

ce qui conduit à :

$$E_{\text{fond}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}gnN + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} (\hbar\omega_k - \epsilon_k - gn). \quad (83)$$

Nous avons mis un point d'interrogation sur ce dernier résultat, car nous verrons qu'il présente en fait une divergence du type (71), qu'il s'agira d'effacer avant de donner le résultat correct à cet ordre du calcul.

Du fait de la portée nulle de ce potentiel, il n'y a plus que deux domaines à considérer pour  $k$  au lieu de trois (cf. figure 4) :

— La région des faibles  $k$ , pour lesquels  $\epsilon_k \ll gn$  c'est-à-dire  $k\xi \ll 1$ . Il s'agit du régime phononique

$$\boxed{\omega_k \approx ck \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{m\xi}, \quad u_k \approx v_k \approx \frac{1}{2^{3/4}\sqrt{k\xi}}} \quad (84)$$

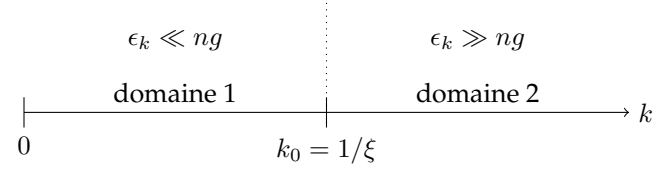


FIGURE 4. Les deux domaines de valeurs de  $k$  pour le pseudo-potentiel.

— Le régime de particules presque libres,  $\epsilon_k \gg gn$ , c'est-à-dire  $k\xi \gg 1$ , pour lequel

$$\boxed{\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + gn \quad u_k \approx 1 + \frac{1}{8k^4\xi^4}, \quad v_k \approx \frac{1}{2k^2\xi^2}} \quad (85)$$

Le calcul de la déplétion quantique est inchangé par rapport au chapitre précédent dans la limite basse densité. En effet, les états  $k$  contribuant à la déplétion sont essentiellement tels que  $k \lesssim 1/\xi$  et leur contribution n'est pas affectée par la substitution  $\tilde{V}_k \rightarrow \tilde{V}_0$ . On trouve donc :

$$\boxed{\frac{n'}{n} = \frac{1}{N} \sum_{k \neq 0} v_k^2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}} \quad (86)$$

Notons que la condition de validité de l'approche de Bogoliubov,  $\sqrt{na^3} \ll 1$  assure d'emblée l'existence de trois échelles de longueur dans le problème :

$$a \ll d \equiv n^{-1/3} \ll \xi. \quad (87)$$

La distance moyenne entre particules  $d$  doit être grande devant la longueur de diffusion  $a$ , mais petite devant la longueur de cicatrisation  $\xi$  puisque

$$\frac{d}{\xi} = n^{-1/3} \sqrt{8\pi a n} = \sqrt{8\pi} (na^3)^{1/6} \ll 1. \quad (88)$$

### 3-4 L'énergie de l'état fondamental

Revenons maintenant à l'expression (83) de l'énergie du fondamental qui se met sous la forme

$$E_{\text{fond}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}gnN + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[ (\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k)^{1/2} - \epsilon_k - gn \right] \quad (89)$$

Aux grandes valeurs de  $k$ , les termes dominants de l'argument de la somme sont :

$$-\frac{g^2n^2}{2\epsilon_k} + \frac{g^3n^3}{2\epsilon_k^2} \quad (90)$$

Le premier terme  $\propto \sum_{k \neq 0} 1/k^2$  conduit à la divergence caractéristique que nous avons signalée en §3-2, elle-même liée au fait qu'en passant sur la base des ondes planes, nous avons identifié  $\hat{V}_{\text{pp}}$  à un pur potentiel de contact [cf. (68)]. Rappelons que ce terme traduit une inversion abusive de l'action de  $\hat{V}_{\text{pp}}$  et du développement en série de Fourier d'une fonction du type  $1/r$ . Comme expliqué précédemment, ce type de terme doit être simplement retiré du résultat final puisque  $\hat{V}_{\text{pp}}(1/r)$  est en fait nul :

$$g \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \longrightarrow 0. \quad (91)$$

Une fois cette soustraction effectuée, nous trouvons donc l'expression pour le déplacement d'énergie du fondamental sous l'effet du pseudo-potential :

$$E_{\text{fond}} = \frac{1}{2}gnN + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[ (\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k)^{1/2} - \epsilon_k - gn + \frac{g^2n^2}{2\epsilon_k} \right]. \quad (92)$$

Aux grandes valeurs de  $k$ , le terme dominant dans l'argument de cette somme est maintenant

$$\frac{g^3n^3}{2\epsilon_k^2} \propto \frac{1}{k^4} \quad (93)$$

ce qui conduit à une intégrale tri-dimensionnelle sur  $k$  convergente.

En fait, le deuxième membre de l'expression (92) est identique au terme (49) obtenu pour un potentiel régulier et le résultat du calcul  $E_{\text{LHY}}$ , donné en (52), est inchangé. Une fois ajouté le premier terme  $\frac{1}{2}gnN$  de (92), on aboutit là encore au résultat (13) annoncé en introduction.

La similitude entre les résultats des calculs menés avec un potentiel régulier ou avec le pseudo-potential ne doit malgré tout pas masquer une subtilité importante de  $\hat{V}_{\text{pp}}$  :

— Calcul pour  $V(r)$  régulier : L'énergie  $E''$  écrite en (40) est toujours négative. Pour faire émerger le développement de Born de  $g$ , on a ajouté au terme dominant  $\frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}nNg^{(1)}$  la correction à l'ordre 2  $\frac{1}{2}nNg^{(2)}$ , contribution que l'on a simultanément soustraite à  $E''$ . Cela a conduit à une valeur positive pour  $E_{\text{LHY}}$  (rappelons que la correction  $g^{(2)}$  est toujours négative) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 &\rightarrow \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \underbrace{E''}_{<0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \frac{1}{2}nNg^{(2)}}_{\frac{1}{2}gnN} + \underbrace{E'' - \frac{1}{2}nNg^{(2)}}_{E_{\text{LHY}} > 0} \end{aligned} \quad (94)$$

— Calcul pour  $\hat{V}_{\text{pp}}$  : Partant de  $\hat{H}' = \frac{1}{2}gnN + \hat{H}''$ , on est arrivé à l'énergie :

$$\frac{1}{2}gnN \rightarrow \frac{1}{2}gnN + \underbrace{E_{\text{LHY}}}_{>0}. \quad (95)$$

La prise en compte de  $\hat{H}''$  pour le pseudo-potential augmente donc l'énergie du fondamental au lieu de la diminuer, ce qui semble constituer une violation du théorème variationnel. L'explication de ce paradoxe tient au changement du domaine de l'hamiltonien quand on passe de  $\frac{1}{2}gnN$  à  $\frac{1}{2}gnN + \hat{H}''$ . Comme on ne travaille plus dans le même espace de Hilbert, le théorème en question ne s'applique plus et cette élévation d'énergie peut se produire. Nous renvoyons le lecteur vers le cours 2020-21 (chapitre 3), où ce point est discuté plus en détail avec les références bibliographiques correspondantes.

## 4 Mesures de la déplétion quantique

Nous disposons maintenant du résultat de la méthode de Bogoliubov, à la fois pour un potentiel régulier pour lequel le développement

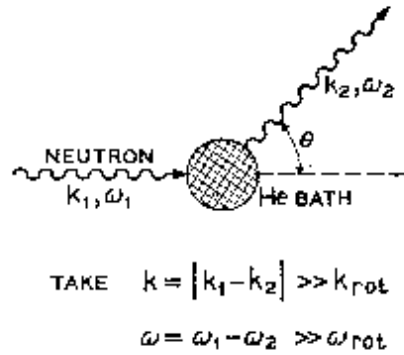


FIGURE 5. Diffusion inélastique de neutrons par de l'hélium liquide. On mesure sur les neutrons diffusés l'impulsion  $\hbar k$  et l'énergie  $\hbar\omega$  transférées au liquide. Figure extraite de HOHENBERG & PLATZMAN (1966).

de Born converge, et pour le pseudo-potential. Dans la limite basse densité  $na^3 \ll 1$ , la déplétion quantique  $n'/n$  et l'énergie de LHY prennent la même valeur dans les deux cas, et elles sont données en (12) et en (13). Dans ce paragraphe, nous allons discuter quelques mesures de la déplétion quantique ainsi que des expériences qui lui sont reliées, comme l'observation de paires d'excitations corrélées. Nous décrirons les mesures de  $E_{LHY}$  dans le chapitre suivant.

#### 4-1 Le cas de l'hélium liquide

Les mesures de la déplétion quantique, c'est-à-dire la fraction d'atomes en dehors de la composante d'impulsion nulle, ont été menées avec une précision remarquable sur l'hélium liquide. Le protocole qui s'est avéré le plus robuste utilise la diffusion inélastique de neutrons ; il donne accès au facteur de structure dynamique  $S(\mathbf{k}, \omega)$ , où  $\hbar k$  et  $\hbar\omega$  sont l'impulsion et l'énergie déposées par un neutron dans le fluide [voir la figure 5, tirée de la proposition initiale de HOHENBERG & PLATZMAN (1966)].

Pour accéder à la déplétion quantique, les neutrons doivent être suffisamment rapides pour que le nombre d'onde  $k$  soit plus grand que  $1/d$ ,

où  $d$  est la distance moyenne entre atomes au sein du liquide. De cette manière, on ne sonde pas les propriétés collectives du fluide, mais les propriétés des atomes individuels, en particulier leur distribution en impulsion  $n(p)$ .

On se place plus précisément dans le régime de l'approximation soudaine (*impulse approximation*), où le temps de diffusion "neutron-atome" est suffisamment bref pour que l'on puisse en première approximation négliger l'interaction de l'atome avec ses voisins pendant ce temps. On a alors simplement

$$\mathbf{p}_{at}^{fin} = \mathbf{p}_{at}^{ini} + \hbar \mathbf{k}, \quad \frac{(\mathbf{p}_{at}^{fin})^2}{2m_{at.}} = \frac{(\mathbf{p}_{at}^{ini})^2}{2m_{at.}} + \hbar\omega, \quad (96)$$

dont on déduit

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_{at}^{ini} \cdot \mathbf{k}}{m_{at}}, \quad (97)$$

c'est-à-dire la somme de l'énergie de recul  $\hbar\omega_{rec} \equiv \hbar^2 k^2 / 2m$  et d'un terme décrivant l'effet Doppler lié au mouvement initial de l'atome. Le signal obtenu en mesurant l'impulsion et l'énergie des neutrons diffusés s'écrit donc

$$I(\mathbf{k}, \omega) \propto \int d^3p n(p) \delta \left[ \hbar(\omega - \omega_{rec}) - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m_{at}} \right] \quad (98)$$

où on a noté  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{at}^{ini}$ .

Après passage en coordonnées sphériques et intégration angulaire, on arrive à

$$I(\mathbf{k}, \omega) \propto J(Y) \propto \int_{|Y|}^{+\infty} p n(p) dp \quad (99)$$

où la variable  $Y$  est définie par

$$Y = \frac{\omega - \omega_{rec}}{k}. \quad (100)$$

Une difficulté expérimentale sérieuse vient du fait que le signal  $J(Y)$  obtenu après intégration sur  $p n(p)$  masque en grande partie l'effet recherché, à savoir la présence d'un pic très étroit en  $p = 0$ . Nous avons reporté sur la figure 6 un exemple tiré de SOKOL (1995) qui montre à gauche deux prédictions théoriques très différentes pour le même système, l'hélium superfluide à basse température. L'une des courbes, obtenue avec une approche

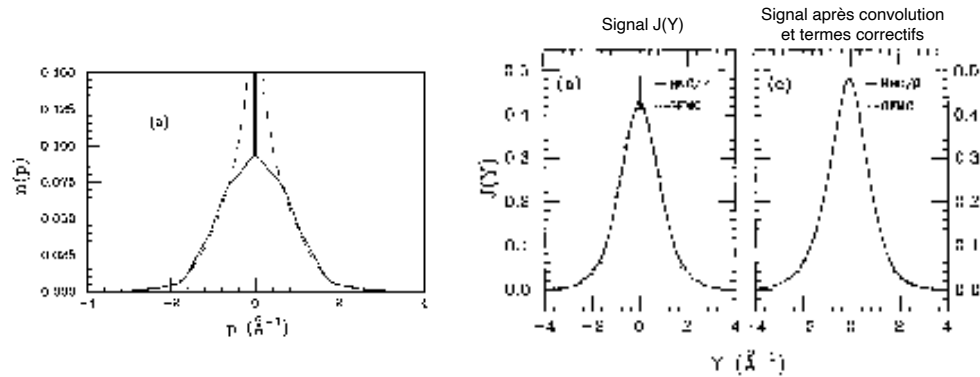


FIGURE 6. Signal attendu (à droite) pour deux distributions  $n(p)$  très différentes (à gauche). Voir le texte pour plus de détails. Figure extraite de SOKOL (1995).

Monte Carlo quantique, montre le pic étroit en  $p = 0$  correspondant à un condensat ; l'autre courbe qui résulte d'une approche variationnelle est régulière en  $p = 0$ . La fonction  $J(Y)$  donnée en (99), montrée sur le panneau du milieu permet encore de différencier les deux prédictions. En revanche, après convolution par la résolution expérimentale et la prise en compte des effets correctifs liés à l'interaction de l'atome diffusant avec ses voisins, les prédictions pour les deux distributions  $n(p)$  deviennent quasi indiscernables (panneau de droite de la figure 6).

On peut néanmoins analyser finement les courbes  $J(Y)$  mesurées expérimentalement pour en déduire la fraction condensée. Les résultats récents de GLYDE, AZUAH et al. (2000) et GLYDE, DIALLO et al. (2011) (voir figure 7) conduisent dans la limite  $T \rightarrow 0$  à une fraction condensée  $n_0/n = 7.25$  (0.75)% à la pression de vapeur saturante. On est donc très loin de la limite d'applicabilité de la méthode de Bogoliubov, qui requiert une fraction condensée  $n_0/n$  voisine de 100%, puisque  $n'/n$  est l'infiniment petit du problème.

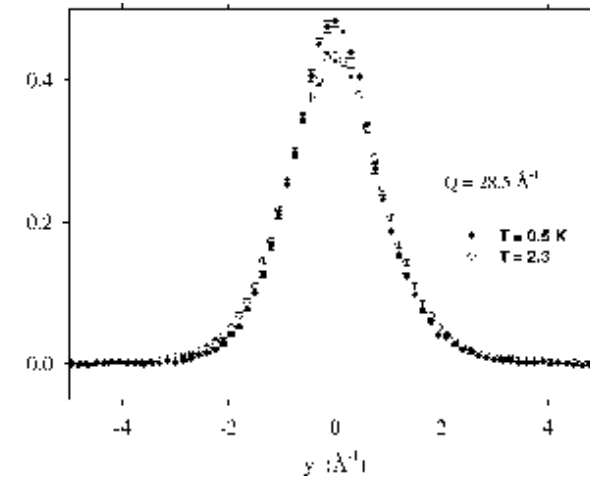
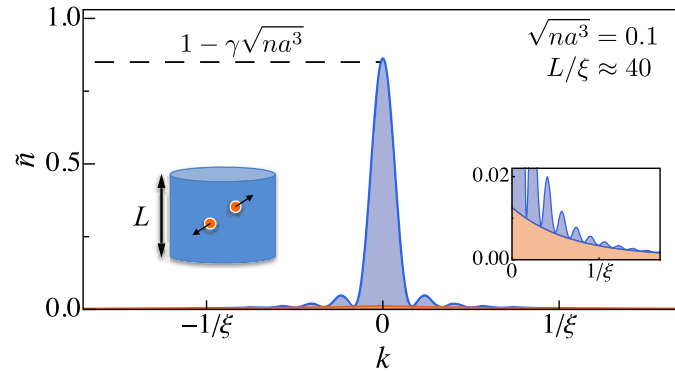


FIGURE 7. Distributions  $J(Y)$  mesurées dans le cas superfluide ( $T = 0.5$  K) et dans le cas normal ( $T = 2.3$  K). La différence au centre s'explique par la présence d'une fraction condensée dans le cas superfluide. Figure extraite de GLYDE, AZUAH et al. (2000).

## 4-2 Mesure sur un gaz atomique

La mesure quantitative de la déplétion quantique avec des atomes froids "souffre" d'un problème inverse de l'hélium liquide. Les densités atomiques  $y$  sont faibles, inférieures à  $10^{15}$  atomes/cm<sup>3</sup>. Avec une longueur de diffusion typique  $a$  de l'ordre de quelques nanomètres, on arrive à  $na^3$  de l'ordre de  $10^{-5}$  : la fraction non condensée est alors inférieure au %. Pour l'augmenter et pouvoir la mesurer avec une bonne précision, il faut avoir recours soit à une augmentation locale de la densité utilisant par exemple un réseau optique comme XU, LIU et al. (2006), soit à une augmentation de  $a$  grâce à une résonance de diffusion. C'est cette deuxième stratégie que nous allons décrire ici.

Nous nous intéressons à la mesure faite par le groupe de Cambridge (LOPES, EIGEN et al. 2017) sur un gaz d'atomes de potassium (isotope <sup>39</sup>K) pour lequel une résonance de Fano-Feshbach (champ magnétique  $\sim 400$  G) permet d'augmenter la longueur de diffusion  $a$  jusqu'à une centaine de



**FIGURE 8.** Distribution en impulsion pour l'état fondamental d'un gaz de Bose confiné dans une boîte de longueur  $L = 50 \mu\text{m}$  et de diamètre  $60 \mu\text{m}$ . Pour un gaz sans interaction, on attend un condensat parfait avec une distribution limitée simplement par la relation de Heisenberg (zone colorée en bleu). Pour un gaz en interaction, des ailes supplémentaires de part et d'autre de l'impulsion  $k = 0$  apparaissent dues à la déplétion quantique (en orange). Figure extraite de LOPES, EIGEN *et al.* (2017).

nanomètres sans que les pertes d'atomes par collision inélastique ne deviennent gênantes. Le gaz est confiné dans un potentiel en forme de boîte cylindrique (*cf.* figure 8). On sonde le gaz par *spectroscopie de Bragg* en l'éclairant par deux faisceaux lumineux de fréquences et vecteurs d'onde  $\omega_1, \mathbf{k}_1$  et  $\omega_2, \mathbf{k}_2$ . Par un processus absorption – émission stimulée, on transfère au gaz l'impulsion  $\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$  et l'énergie  $\hbar\omega = \hbar(\omega_2 - \omega_1)$ .

Le gaz est préparé dans l'état d'équilibre correspondant à une interaction entre atomes caractérisée par la longueur de diffusion  $a$ . Juste avant la mesure par spectroscopie de Bragg, la longueur de diffusion est soudainement amenée à 0, de sorte qu'on obtient un gaz sans interaction, mais avec la distribution en impulsion correspondant à  $a$ . Comme dans le cas de la diffusion de neutrons par l'hélium liquide, les atomes qui sont affectés par la spectroscopie de Bragg sont ceux pour lesquels les conservations de l'impulsion et de l'énergie sont possibles, c'est-à-dire ceux d'impulsion

initiale  $\mathbf{p}_i$  et finale  $\mathbf{p}_f$  telles que

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \hbar\mathbf{q} \quad \frac{p_f^2}{2m} = \frac{p_i^2}{2m} + \hbar\omega, \quad (101)$$

ou encore, en éliminant  $\mathbf{p}_f$  :

$$\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}}{m} + \frac{\hbar q^2}{2m} = \hbar\omega. \quad (102)$$

En pratique, le moment transféré  $\hbar\mathbf{q}$  est aligné avec l'axe du cylindre et on choisit  $\omega = \hbar q^2/2m$ , de sorte que le transfert se fera pour des atomes de vitesse initiale nulle le long de cet axe. Les atomes non transférés peuvent avoir trois origines :

- Ce sont les atomes correspondant à la déplétion quantique recherchée.
- Ce sont des atomes dont l'impulsion non nulle provient de la taille finie de la boîte selon la direction  $z$  : l'inégalité de Heisenberg impose en effet que la distribution d'impulsion selon  $z$  n'est pas simplement un  $\delta(z)$ , mais plutôt une fonction en puissance d'un sinus cardinal.
- Ce sont des atomes correspondant à une excitation thermique. Ces derniers jouent un rôle faible, compte tenu de la température extrêmement basse du gaz (voir l'inset de la figure 9).

Après déconvolution des différents effets, LOPES, EIGEN *et al.* (2017) sont arrivés au résultat montré en figure 9, donnant la fraction diffractée  $\eta$  en fonction de la longueur de diffusion. Ces données sont bien ajustées par la fonction

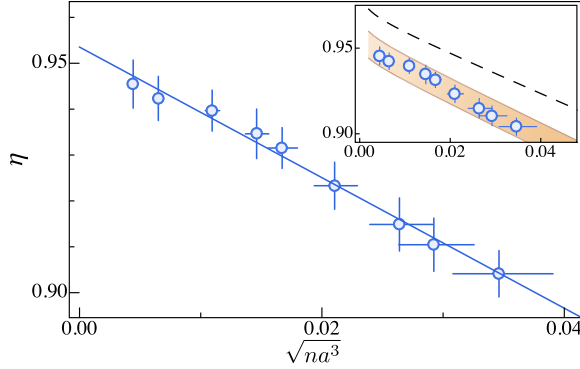
$$\eta = \eta_0 \left(1 - \gamma\sqrt{na^3}\right) \quad (103)$$

avec  $\gamma = 1.5$  (2) en accord avec la prédiction  $8/(3\sqrt{\pi}) = 1.505$ . Une analyse poussée des effets systématiques dans cette expérience permet de conclure à une confirmation quantitative de la prédiction (56), avec une erreur statistique de 15 % et une erreur systématique de 20 %.

### 4-3 Paires d'atomes dans le vide de Bogoliubov

Une prédiction importante de l'approche de Bogoliubov est la corrélation entre particules d'impulsions opposées. Cette corrélation trouve son

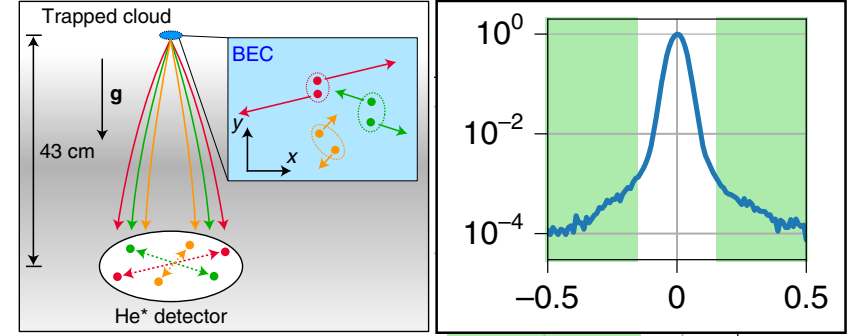




**FIGURE 9.** Fraction maximale diffractée par une impulsion de Bragg de fréquence  $\omega = \hbar q^2/2m$ . L'ajustement linéaire correspond à  $\eta_0 = 0.954(5)$  et  $\gamma = 1.5(2)$ . L'inset montre le résultat de simulations numériques, faites à  $T = 0$  (ligne tiretée) et pour  $T$  entre 3.5 et 5 nK, zone colorée en orange. Figure extraite de LOPES, EIGEN *et al.* (2017).

origine dans la forme même du couplage intervenant dans  $\hat{H}'$ , en  $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ . Comme nous l'avons signalé dans notre analyse du système à deux modes, ces corrélations apparaissent dans une mesure simultanée des nombres d'occupation  $n_1$  et  $n_2$  des deux modes en question : ces deux nombres sont en principe toujours égaux ( $n_1 - n_2 = 0$ ), même si la somme  $n_1 + n_2$  peut avoir une distribution très large.

Très récemment TENART, HERCÉ *et al.* (2021) ont réussi à mesurer directement la corrélation entre ces paires  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  [voir aussi CAYLA, BUTERA *et al.* (2020)]. L'expérience est menée avec des atomes d'hélium placés dans un état électronique métastable. Les atomes sont détectés après temps de vol grâce à une galette de micro-canaux avec une efficacité de 53 %. Cette galette est placée dans l'enceinte à vide, 45 cm sous le condensat (temps de vol de 300 ms). L'impact d'un atome métastable génère une impulsion électronique qui se propage à la surface de la galette ; la mesure très précise des instants d'arrivée de cette impulsion sur la périphérie de la galette donne accès aux coordonnées  $x, y$  et à l'instant  $t$  de l'impact de l'atome, ce qui permet ensuite de remonter aux trois composantes de la vitesse initiale de l'atome.



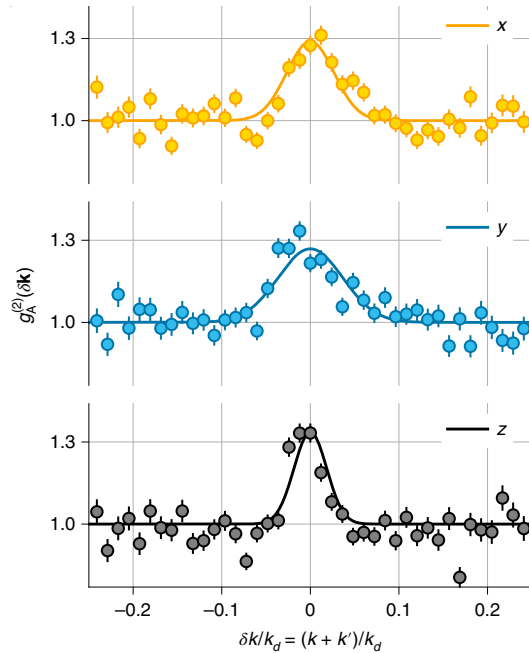
**FIGURE 10.** Gauche : expérience de temps de vol menée sur un condensat de Bose-Einstein d'atomes d'hélium métastable. Pour chaque réalisation de l'expérience, on en déduit les vitesses  $\mathbf{v}_j$  des atomes. Droite : zone  $\Omega$  (colorée en vert) sélectionnée pour l'analyse des données. Figure extraite de TENART, HERCÉ *et al.* (2021).

Pour chaque réalisation de l'expérience, on sélectionne les détections en dehors du pic correspondant au condensat lui-même (zone verte  $\Omega$  de la figure 10, droite). Il y a environ 100 atomes et 0.5 paires corrélées dans cette zone. L'expérience est reproduite 2000 fois pour obtenir une moyenne significative pour la fonction de corrélation

$$g^{(2)}(\delta\mathbf{k}) = \frac{\int_{\Omega} \langle n(\mathbf{k})n(\delta\mathbf{k} - \mathbf{k}) \rangle d^3k}{\int_{\Omega} \langle n(\mathbf{k}) \rangle \langle n(\delta\mathbf{k} - \mathbf{k}) \rangle d^3k}, \quad (104)$$

où  $\langle \dots \rangle$  signifie une moyenne sur les différentes réalisations de l'expérience. Avec cette définition, les paires  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  recherchées doivent apparaître comme un pic en  $\delta\mathbf{k} = 0$ . Notons que pour augmenter la déplétion quantique, TENART, HERCÉ *et al.* (2021) ont placé les atomes dans un réseau optique, qui a pour effet de concentrer les atomes aux minima du potentiel et donc d'accroître la densité effective  $n$  intervenant dans  $\sqrt{na^3}$ .

Un exemple de résultat est montré sur la figure 11. Le pic de corrélation en  $\delta\mathbf{k} = 0$  apparaît clairement. Cette figure a été obtenue à très basse température, pour une fraction condensée de 84%. TENART, HERCÉ *et al.* (2021) ont étudié la dépendance de la hauteur de ce pic avec la température et montré qu'il devient quasiment indétectable quand on s'approche de la température critique de condensation. Ils ont également vé-



**FIGURE 11.** Fonction de corrélation  $g^{(2)}(\delta\mathbf{k})$  mesurée selon les trois directions de l'espace, mettant clairement en évidence les corrélations entre paires d'impulsions opposées. Figure extraite de TENART, HERCÉ et al. (2021).

rifié que sa hauteur variait comme  $1/\rho_\Omega$ , où la densité  $\rho_\Omega$  est définie par  $\rho_\Omega = \int_\Omega \langle n(\mathbf{k}) \rangle d^3k$ ; c'est la dépendance attendue si l'on suppose une corrélation parfaite entre  $n(\mathbf{k})$  et  $n(-\mathbf{k})$ .

## Références

- BELIAEV, ST (1958), « Energy spectrum of a non-ideal Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* **7**, p. 299-307.
- BOGOLIUBOV, N. N. (1947), « On the theory of superfluidity », in *J. Phys. (USSR)* **11**, p. 23.
- BRAATEN, Eric, Masaoki KUSUNOKI & Dongqing ZHANG (2008), « Scattering Models for Ultracold Atoms », in *Annals of Physics* **323**, p. 1770-1815.
- CAMPANA, LS, A Caramico D'AURIA, L CESARE & U ESPOSITO (1979), « On the validity of the Bogoliubov approximation for a high-density Bose model », in *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* **24**, p. 147-150.
- CARLEN, Eric A, Markus HOLZMANN, Ian JAUSLIN & Elliott H LIEB (2021), « Simplified approach to the repulsive Bose gas from low to high densities and its numerical accuracy », in *Physical Review A* **103**, p. 053309.
- CAYLA, Hugo, Salvatore BUTERA, Cécile CARCY, Antoine TENART, Gaétan HERCÉ, Marco MANCINI, Alain ASPECT, Iacopo CARUSOTTO & David CLÉMENT (2020), « Hanbury Brown and Twiss Bunching of Phonons and of the Quantum Depletion in an Interacting Bose Gas », in *Physical Review Letters* **125**, p. 165301.
- CEPERLEY, D., G. V. CHESTER & M. H. KALOS (1978), « Monte Carlo study of the ground state of bosons interacting with Yukawa potentials », in *Phys. Rev. B* **17**, p. 1070-1081.
- FOLDY, Leslie L (1961), « Charged boson gas », in *Physical Review* **124**, p. 649.
- GAVORET, J & Ph NOZIERES (1964), « Structure of the perturbation expansion for the Bose liquid at zero temperature », in *Annals of Physics* **28**, p. 349-399.
- GAVORET, Jean (1963), « Application de la théorie des perturbations à l'étude d'un liquide de Bose au zéro absolu », in *Annales de Physique*, t. 13, EDP Sciences, , p. 441-491.
- GIRARDEAU, M (1962), « Ground state of the charged Bose gas », in *Physical Review* **127**, p. 1809.
- GLYDE, H. R., R. T. AZUAH & W. G. STIRLING (2000), « Condensate, momentum distribution, and final-state effects in liquid  $^4\text{He}$  », in *Phys. Rev. B* **62**, p. 14337-14349.
- GLYDE, H. R., S. O. DIALLO, R. T. AZUAH, O. KIRICHEK & J. W. TAYLOR (2011), « Atomic momentum distribution and Bose-Einstein condensation in liquid  $^4\text{He}$  under pressure », in *Phys. Rev. B* **84**, p. 184506.

- HALINEN, Jani, Vesa APAJA & Mikko SAARELA (2000), « Role of short-and long-range interactions in quantum Bose fluids », in *Physica B : Condensed Matter* **284**, p. 3-4.
- HOHENBERG, P. C. & P. M. PLATZMAN (1966), « High-Energy Neutron Scattering from Liquid He<sup>4</sup> », in *Phys. Rev.* **152**, p. 198-200.
- HUGENHOLTZ, N. M. & D. PINES (1959), « Ground-State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons », in *Phys. Rev.* **116**, p. 489-506.
- LEE, Tsing D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* **106**, p. 1135.
- LIEB, Elliott H, Robert SEIRINGER, Jan Philip SOLOVEJ & Jakob YNGVASON (2005), *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, t. 34, Springer Science & Business Media.
- LOPES, Raphael, Christoph EIGEN, Nir NAVON, David CLÉMENT, Robert P. SMITH & Zoran HADZIBABIC (2017), « Quantum Depletion of a Homogeneous Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **119**, p. 190404.
- NOZIÈRES, P. & D. PINES (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
- OLSHANII, Maxim & Ludovic PRICOUPENKO (2001), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* **88**, p. 010402.
- SOKOL, P.E. (1995), « Bose-Einstein Condensation », in , sous la dir. d'A. GRIFFIN, D. W. SNOKE & S. STRINGARI, Cambridge University Press, chap. 4. Bose-Einstein condensation in liquid helium.
- TAN, Shina (2008), « Three-boson problem at low energy and implications for dilute Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* **78**, p. 013636.
- TENART, Antoine, Gaétan HERCÉ, Jan-Philipp BUREIK, Alexandre DAREAU & David CLÉMENT (2021), « Observation of pairs of atoms at opposite momenta in an equilibrium interacting Bose gas », in *Nature Physics*, p. 1-5.
- WU, Tai Tsun (1959), « Ground State of a Bose System of Hard Spheres », in *Phys. Rev.* **115**, p. 1390-1404.
- XU, K., Y. LIU, D. E. MILLER, J. K. CHIN, W. SETIAWAN & W. KETTERLE (2006), « Observation of Strong Quantum Depletion in a Gaseous Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* **96**, p. 180405.