Chaire Atomes et rayonnement

Cours 2021-22

Jean Dalibard

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Prochains séminaires

Vendredi 25 mars : Jean-Philippe Brantut, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse
Exploring and controlling Fermi gases with light in a high-finesse cavity

Vendredi 1 avril : Anna Minguzzi, LPMMC, CNRS and Université Grenoble-Alpes
Tan contact in one-dimensional quantum gases

Vendredi 8 avril : Atac Imamoglu, Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, Suisse
Strongly correlated electrons in atomically thin semiconductors

Vendredi 15 avril : Leticia Tarruell, ICFO - The Institute of Photonic Sciences, Barcelone, Espagne
Realizing a one-dimensional topological gauge theory in an optically dressed Bose-Einstein condensate

Vendredi 15 avril, 14h00-18h00 : atelier **"New trends in quantum fluid physics: mixtures and spinor gases"**

Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques

Cours 3

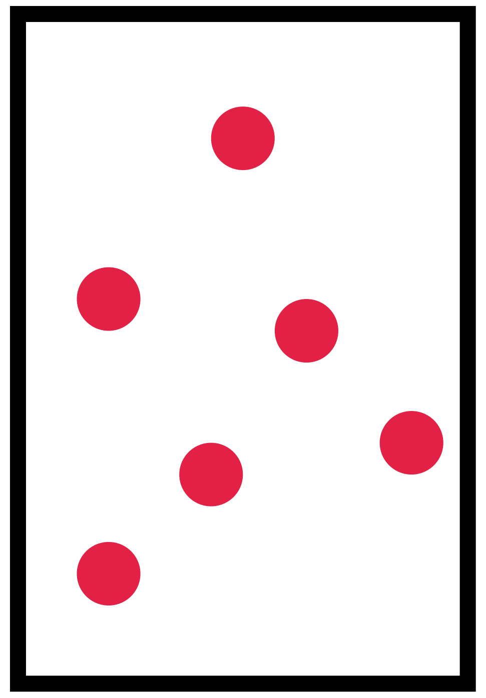
L'énergie de Lee-Huang-Yang

et la déplétion quantique

Jean Dalibard
Chaire *Atomes et rayonnement*
Année 2021-22

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Bilan du cours 2



Assemblée d'atomes (bosons) en interaction binaire

$$\hat{\mathscr{V}} = \sum_{i<j} V(\hat{r}_{ij}) \qquad \hat{r}_{ij} = |\hat{\boldsymbol{r}}_i - \hat{\boldsymbol{r}}_j|$$

Transformée de Fourier de $V(r)$: $\tilde{V}_k$

Hamiltonien en seconde quantification :

$\longrightarrow$ Développement restreint aux termes quadratiques en $a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ pour $\boldsymbol{k} \neq 0$

Hypothèse : $N - N_0 \ll N$, *i.e. faible déplétion du condensat*

Transformation canonique de Bogoliubov

Hamiltonien après approximation quadratique : $\hat{H}' \;=\; \dfrac{N^2}{2L^3}\tilde{V}_0 \;+\; \hat{H}''$

$$\hat{H}'' \;=\; \sum_{\{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}\}} \left[\underset{\text{cinétique}}{\epsilon_k} + \underset{\text{Fock}}{n\tilde{V}_k}\right]\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}}\right) + n\tilde{V}_k\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}}\right) \qquad \epsilon_k = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

Somme d'hamiltoniens de paires, indépendants les uns des autres

Diagonalisation de $\hat{H}''$: $b_{\boldsymbol{k}} = u_k a_{\boldsymbol{k}} + v_k a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} \qquad b_{-\boldsymbol{k}} = u_k a_{-\boldsymbol{k}} + v_k a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$

Pour le choix $\quad u_k = \cosh\lambda_k \quad v_k = \sinh\lambda_k \quad$ avec $\quad \tanh(2\lambda_k) = \dfrac{n\tilde{V}_k}{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}$, on arrive à :

$$\hat{H}'' = \sum_{k\neq 0}\left[\hbar\omega_k\, b^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}} \;+\; \frac{1}{2}\hbar\,\underbrace{\left(\omega_k - \omega_{0,k}\right)}_{<\,0}\right] \qquad \hbar\omega_k = \left[\left(\epsilon_k + n\tilde{V}_k\right)^2 - \left(n\tilde{V}_k\right)^2\right]^{1/2} \;=\; \left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2}$$

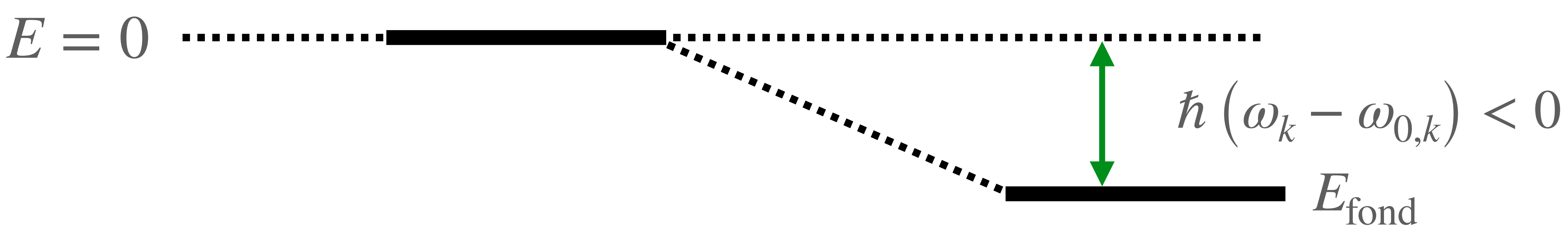
$$\hbar\omega_{0,k} = \epsilon_k + n\tilde{V}_k$$

Energie du fondamental et déplétion quantique

Création/destruction de paires : passage de $\left[\epsilon_k + n\tilde{V}_k\right]\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}}\right)$ (cinétique + Fock, état fondamental $|\Psi_0\rangle = |0,0\rangle$) à :

$$\hat{H}''_{\boldsymbol{k}} \; = \; \left[\epsilon_k + n\tilde{V}_k\right]\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}}\right) + n\tilde{V}_k\left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}}\right)$$

Abaissement de l'énergie du fondamental (cf. perturbations du deuxième ordre ou théorème variationnel) :



$$E_{\text{fond}} \; \leq \underbrace{\langle \Psi | \hat{H}''_{\boldsymbol{k}} | \Psi \rangle}_{=\,0 \text{ pour } |\Psi_0\rangle} \qquad \forall |\Psi\rangle$$

Création de paires $\{+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$:

$$\bar{n}_k = v_k^2 = \frac{\omega_{0,k} - \omega_k}{2\omega_k}$$

$\hbar\omega_k = \left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2} \;\to\; 0$ quand $k \to 0$ $\qquad \epsilon_k = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\bar{n}_k \;\to +\infty$: est-ce compatible avec $N - N_0 \ll N$?

But de ce cours

Prendre en compte pour tous les $\boldsymbol{k}$ les résultats obtenus pour chaque paire de mode $\{+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$

- *Déplétion quantique (Bogoliubov, 1947)*

$$\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}$$

fournit l'infiniment petit du développement en $\frac{N - N_0}{N}$

- *Energie du fondamental (Lee-Huang-Yang, 1957)*

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2} g n^2 \left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + \dots \right]$$

T.D. Lee & C.N. Yang

Plan du cours

1. Préliminaires

   Approximation de Born

   Différents secteurs pour le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$

   Illustration : le spectre d'excitation de Bogoliubov

2. Energie LHY et déplétion quantique pour un potentiel régulier

3. Approche de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel $\hat{V}_{\rm pp}$

4. Mesures de la déplétion quantique

1. Préliminaires

Approximation de Born

Différents secteurs pour le vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$

Illustration : le spectre d'excitation de Bogoliubov

Les différents régimes du spectre d'excitation

$$\hbar\omega_k = \left[\epsilon_k\left(\epsilon_k + 2n\tilde{V}_k\right)\right]^{1/2}$$
$$\epsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$$

Transfert de l'impulsion $\hbar \boldsymbol{k}$ et de l'énergie $\hbar\omega_k$ au fluide

0 — $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$ — $k_0 = 1/\xi$ — $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$ — $1/b$ — $\tilde{V}_k \neq \tilde{V}_0$ — k

$$\hbar\omega_k \approx \left[2\epsilon_k n\tilde{V}_0\right]^{1/2}$$

$$\omega_k \approx ck$$

Régime de phonons,
à la base de la superfluidité

$$c = \sqrt{n\tilde{V}_0/m}$$

$$\hbar\omega_k = \epsilon_k\left[1 + \frac{2n\tilde{V}_k}{\epsilon_k}\right]^{1/2} \approx \epsilon_k + n\tilde{V}_k$$

Régime de particules uniques

$\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0 \quad \Rightarrow \quad \hbar\omega_k \approx \epsilon_k + n\tilde{V}_0$

$\tilde{V}_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \hbar\omega_k \approx \epsilon_k$

Bilan d'énergie : $\hbar\omega_k \approx \underbrace{\epsilon_k + n\left(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_k\right)} - \underbrace{n\tilde{V}_0}$

état final : énergie cinétique + Hartree +Fock

état initial : Hartree

Plan du cours

1. Préliminaires

2. Energie LHY et déplétion quantique

3. Approche de Bogoliubov pour $\hat{V}_{\mathrm{pp}}$

4. Mesures de la déplétion quantique

Energie de l'état fondamental

$$E_{\text{fond}} = \frac{1}{2} n N \tilde{V}_0 \; + \; \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k} \neq 0} \hbar\omega_k - \hbar\omega_{0,k}$$

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{E_{\text{fond}}}{L^3} = \underbrace{\frac{1}{2} n^2 \tilde{V}_0}_{\text{champ moyen}} \; + \; \frac{1}{2\,(2\pi)^3} \int \underbrace{\left[\left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k \epsilon_k \right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k \right]}_{\text{correction liée aux créations et destructions de paires } \{+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}} \, \mathrm{d}^3 k \,.$$

Convergence de l'intégrale ?

- En $k = 0$, pas de problème : toutes les fonctions sont régulières
- En $k = +\infty$, développement en puissances de $n\tilde{V}_k / \epsilon_k$: le terme dominant est $-\dfrac{n^2 \tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k}$

$$\sim \int^{+\infty} \frac{\tilde{V}_k^2}{k^2} \, 4\pi k^2 \, \mathrm{d}k$$: converge si $\tilde{V}_k$ décroît assez vite $\Rightarrow$ rôle essentiel du domaine 3

Une meilleure description du champ moyen

$$\frac{E_{\rm fond}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0 + \frac{1}{2\,(2\pi)^3}\int\left[\left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k\right]\,\mathrm{d}^3k\,. \qquad \tilde{V}_0 = g^{(1)}$$

$$\frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}n^2 g^{(1)} = \frac{1}{2}n^2\left(g^{(1)} + g^{(2)}\right) - \frac{1}{2}n^2 g^{(2)} \qquad g^{(2)} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{|\tilde{V}_k|^2}{2\epsilon_k}\,\mathrm{d}^3k$$

correct à l'ordre 2
inclus en V

à réinjecter
dans l'intégrale

$$\frac{E_{\rm fond}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2\left(g^{(1)} + g^{(2)}\right) + \frac{1}{2\,(2\pi)^3}\int\left[\left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k + \frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k}\right]\,\mathrm{d}^3k$$

Convergence de l'intégrale à l'infini ?

Elle est fortement améliorée : terme dominant $\dfrac{n^3\tilde{V}_k^3}{2\epsilon_k^2}$, la convergence est assurée même si $\tilde{V}_k$ est constant

La contribution du domaine 3 est alors négligeable, seuls contribuent les domaines 1 et 2

Calcul de E_{LHY}

$$\frac{E_{\mathrm{fond}}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2 g + \underbrace{\frac{1}{2\,(2\pi)^3}\int\left[\left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k + \frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k}\right]\,\mathrm{d}^3k}_{E_{\mathrm{LHY}}}$$

$$g \approx g^{(1)} + g^{(2)}$$

Puisque seules les zones 1 et 2 ont une contribution significative, on peut remplacer $\tilde{V}_k$ par $\tilde{V}_0 \approx g = 4\pi\hbar^2 a/m$

$$\frac{E_{\mathrm{LHY}}}{L^3} = \frac{\hbar^2}{m}(na)^{5/2}\mathcal{I} \qquad \mathcal{I} = 16\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\left[x^2 + 1 - \left(x^2 + 2x\right)^{1/2} - \frac{1}{2x}\right]\,\mathrm{d}x \qquad x = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\tilde{V}_0}$$

Après calcul de l’intégrale, on arrive à

$$\frac{E_{\mathrm{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2 g \times \frac{128}{15\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}$$

on retrouve bien le petit paramètre $\sqrt{na^3}$

Possibilité de resommer tout le développement de Born ?

ON THE THEORY OF SUPERFLUIDITY*

By **N. BOGOLUBOV**

Mathematical Institute, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR and Moscow State University

(Received October 12, 1946)

Hence, as the interaction of molecules for the low density gas reveals itself principally by means of these binary collisions, it seems that expression (30) is to be replaced* by the corresponding expression proportional to the amplitude of the exact probability of the binary collisions, calculated for the limiting case of zero density, *i. e.* we have to put:

* I am indebted to L. D. Landau for this important remark.

Beliaev (1958), Hugenholtz & Pines (1959), Gavoret & Nozières (1964), Nozières & Pines (1990), …

Lieb, Seiringer, Solovej, Yngvason (2005) :
They all rely on some special assumptions about the ground state that have never been proved, or on the selection of special terms from a perturbation series which likely diverges.

La déplétion quantique

Nombre de particules en dehors du condensat $\boldsymbol{k} = 0$: $\quad N' = \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} v_k^2 = \frac{1}{2}\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int \left[\frac{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}{\left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2}} - 1\right] \mathrm{d}^3k$

Convergence de l'intégrale ?

- En $k = 0$, divergence de l'intégrande en $1/k$, compensée par le jacobien à 3D : $4\pi k^2 \mathrm{d}k$
- En $k = +\infty$, terme dominant de l'intégrande : $\dfrac{n_0^2\tilde{V}_k^2}{2\,\epsilon_k^2}$

Décroissance rapide : convergence assurée quelle que soit le comportement de $\tilde{V}_k$

Seuls les domaines 1 et 2 contribuent significativement : on remplace $\tilde{V}_k$ par $\tilde{V}_0 \approx g$

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

$$n' = (na)^{3/2}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+2}} - x\right) x\,\mathrm{d}x \longrightarrow \frac{n'}{n} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{na^3}$$

Plan du cours

1. Préliminaires

2. Energie LHY et déplétion quantique

3. Approche de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel $\hat{V}_{\mathrm{pp}}$

4. Mesures de la déplétion quantique

Potentiel de contact et $\hat{V}_{\mathrm{pp}}$

Potentiel de contact "naïf" : $V(\boldsymbol{r}) = g\,\delta(\boldsymbol{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k : \quad \tilde{V}_k = g$

Difficulté mathématique immédiate : dans la théorie de la diffusion, on voit apparaître les ondes sphériques $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$

L'action de $\delta(\boldsymbol{r})$ n'est pas définie sur ces fonctions…

Le pseudo-potentiel $\hat{V}_{\mathrm{pp}}$: construit pour effacer les divergences en $1/r$

$$V_{\mathrm{pp}}\left[\psi(\boldsymbol{r})\right] = g\,\delta(\boldsymbol{r})\,\frac{\partial}{\partial r}\left[r\,\psi(\boldsymbol{r})\right]_{r=0}$$

On a ainsi : $\psi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\alpha}{r} + \psi_{\mathrm{reg}}(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad V_{\mathrm{pp}}\left[\psi(\boldsymbol{r})\right] = g\,\psi_{\mathrm{reg}}(0)\,\delta(\boldsymbol{r})$

Généralisation du pseudo-potentiel : Olshanii & Pricoupenko, 2001

Subtilités de $V_{\rm pp}$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha}{r} + \psi_{\rm reg}(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad V_{\rm pp}\left[\psi(\boldsymbol{r})\right] = g\,\psi_{\rm reg}(0)\,\delta(\boldsymbol{r})$$

On part de l'identité $$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2}\,\mathrm{d}^3k \qquad\qquad \frac{1}{r} \overset{\text{TF}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{k^2}$$

On fait agir $\hat{V}_{\rm pp}$ sur les deux membres de l'égalité

$$\hat{V}_{\rm pp}\left[\frac{1}{r}\right] = 0$$

$$\hat{V}_{\rm pp}\left[\frac{1}{2\pi^2}\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2}\,\mathrm{d}^3k\right] \overset{?}{=} \frac{1}{2\pi^2}\int \frac{\hat{V}_{\rm pp}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]}{k^2}\,\mathrm{d}^3k$$

$$= \frac{g\;\delta(\boldsymbol{r})}{2\pi^2}\int \frac{1}{k^2}\,\mathrm{d}^3k = \frac{g\;\delta(\boldsymbol{r})}{2\pi^2}\int 4\pi\;\mathrm{d}k$$

diverge !

Un résultat de calcul présentant une divergence du type $g\displaystyle\int^{+\infty}\mathrm{d}k$

signale généralement une manipulation hasardeuse de ce type

Comment utiliser $\hat{V}_{\rm pp}$

$\psi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\alpha}{r} + \psi_{\rm reg}(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad V_{\rm pp}\left[\psi(\boldsymbol{r})\right] = g\,\psi_{\rm reg}(0)\,\delta(\boldsymbol{r})$

Exemple : énergie d'interaction d'un gaz de Bose en seconde quantification

$$\hat{\mathscr{V}} \;=\; \frac{1}{2}\int \hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\,\hat{\Psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\;\hat{V}_{\rm pp}\left[\hat{\Psi}(\boldsymbol{r})\,\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}')\right]\;\mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'$$

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,a_{\boldsymbol{k}}$$

Stratégie 1 : on s'autorise à écrire $\hat{V}_{\rm pp}\left(\sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,a_{\boldsymbol{k}}\right) = g\sum_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}\;\delta(\boldsymbol{r})$

Si on voit apparaître $g\displaystyle\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^3k}{k^2}$ dans le résultat d'un calcul, on annule ce terme

Revue par Braaten, Kusunoki, Zhang

Stratégie 2 : on s'interdit cette inversion, au prix de calculs beaucoup plus lourds

Lee, Huang, Yang

Diagonalisation de $\hat{H}$ pour le pseudo-potentiel

On adopte la stratégie 1 :

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} g n N + \hat{H}'' \qquad \hat{H}'' = \sum_{\{+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}} \left[\epsilon_k + gn\right] \left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}} \right) + gn \left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} a_{-\boldsymbol{k}} \right)$$

Tout se passe comme si on avait pris $V(\boldsymbol{r}) = g\, \delta(\boldsymbol{r})$

$\forall k :\ \tilde{V}_k = g$: *il n'y a plus de zone 3 (aux grands k) dans laquelle* $\tilde{V}_k \to 0$

Procédure de diagonalisation identique au cas d'un potentiel $V(r)$ régulier, avec $\tilde{V}_0,\ \tilde{V}_k \longrightarrow g$

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k} \neq 0} \hbar\omega_k\, b^\dagger_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}} + E_0 \qquad \hbar\omega_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k}$$

Déplétion quantique inchangée : $\dfrac{n'}{n} = \dfrac{1}{N} \sum_{\boldsymbol{k} \neq 0} v_k^2 = \dfrac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}$

Energie LHY pour le pseudo-potentiel

$$E_{\text{fond}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}gnN + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\left[\left(\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - gn\right]$$

Terme dominant (<0) de la somme aux grands k : $-\dfrac{g^2n^2}{2\epsilon_k}$

Terme suivant (>0) de la somme aux grands k : $+\dfrac{g^3n^3}{2\epsilon_k^2}$

Le terme dominant conduit à une divergence du type $g\displaystyle\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^3k}{k^2}$: on annule “à la main” cette divergence

$$E_{\text{fond}} = \frac{1}{2}gnN + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\left[\left(\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - gn + \frac{g^2n^2}{2\epsilon_k}\right]}$$

quantité positive, finie, et identique à celle trouvée pour un potentiel régulier

Comparaison entre les deux démarches

Pour $V(r)$ régulier et traité par le développement de Born :

$$\frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \underbrace{E''}_{<0} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \frac{1}{2}g^{(2)}nN}_{\frac{1}{2}gnN} + \underbrace{E'' - \frac{1}{2}g^{(2)}nN}_{E_{\text{LHY}}>0} \qquad \tilde{V}_0 = g^{(1)}$$

Pour le pseudo-potentiel $\hat{V}_{\text{pp}}$

$$\frac{1}{2}nNg + \underbrace{E''}_{=-\infty} \longrightarrow \frac{1}{2}nNg + \underbrace{E'' + \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0}\frac{g^2n^2}{4\epsilon_k}}_{E_{\text{LHY}}>0}$$

L'augmentation d'énergie liée au couplage $ng\left(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{\boldsymbol{k}}a_{-\boldsymbol{k}}\right)$ contredit-il le théorème variationnel ?

En fait non ! L'utilisation du pseudo-potentiel change le domaine des fonctions utilisables (condition aux limites de Bethe-Peierls)

Plan du cours

1. Préliminaires

2. Energie LHY et déplétion quantique

3. Approche de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel $\hat{V}_{\mathrm{pp}}$

4. Mesures de la déplétion quantique

L'hélium liquide superfluide

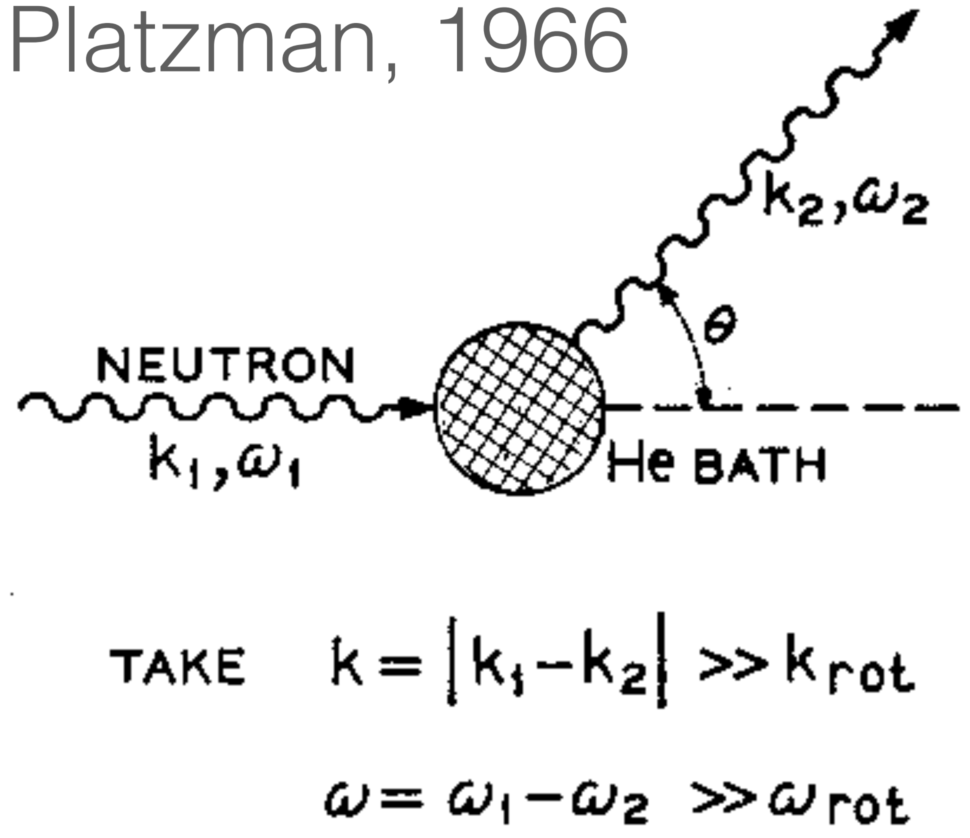
Un gaz d'atomes froids (^{39}K)

Observation de paires corrélées de Bogoliubov

Le cas de l'hélium liquide

Diffusion inélastique de neutrons

Hohenberg & Platzman, 1966



Un neutron diffusé transfert au fluide :

- l'impulsion $\hbar \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_{\text{neutron}}^{\text{fin}} - \boldsymbol{p}_{\text{neutron}}^{\text{init}}$
- l'énergie $\hbar\omega = \epsilon_{\text{neutron}}^{\text{fin}} - \epsilon_{\text{neutron}}^{\text{init}}$

On mesure le transfert d'impulsion et d'énergie $(\boldsymbol{k}, \omega)$

On cherche à sonder la distribution en impulsion du fluide, avec un éventuel pic en $\boldsymbol{p} = 0$

Observable à une particule : il faut des neutrons de haute énergie

$\frac{\hbar}{p_{\text{ini}}^{\text{neutron}}} \lesssim$ distance interatomique $\sim 1\text{Å}$

deep inelastic scattering

L'approximation soudaine (*impulse approximation*)

On suppose que le temps de diffusion du neutron par l'atome est très court

$\longrightarrow$ On néglige l'énergie d'interaction entre l'atome diffusant et ses voisins

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{\text{at}}^{\text{fin}} = \boldsymbol{p}_{\text{at}}^{\text{ini}} + \hbar \boldsymbol{k} \\ \dfrac{(\boldsymbol{p}_{\text{at}}^{\text{fin}})^2}{2m_{\text{at.}}} = \dfrac{(\boldsymbol{p}_{\text{at}}^{\text{ini}})^2}{2m_{\text{at.}}} + \hbar\omega \end{cases}$$

dont on déduit : $$\hbar\omega = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\text{énergie de recul } \hbar\omega_{\text{rec}}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{p}_{\text{at}}^{\text{ini}} \cdot \boldsymbol{k}}{m_{\text{at}}}}_{\text{effet Doppler}}$$

Signal obtenu en mesurant l'impulsion et l'énergie des neutrons diffusés

$$I(\boldsymbol{k}, \omega) \propto \int \mathrm{d}^3 p \; n(p) \; \delta\left[\hbar(\omega - \omega_{\text{rec}}) - \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{k}}{m_{\text{at}}}\right] \qquad \boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}_{\text{at}}^{\text{ini}}$$

Forme du signal attendu

$$I(\boldsymbol{k},\omega) \quad \propto \quad \int n(p)\ \delta\left[\hbar(\omega-\omega_{\mathrm{rec}}) - \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{m_{\mathrm{at}}}\right]\ \mathrm{d}^3p$$

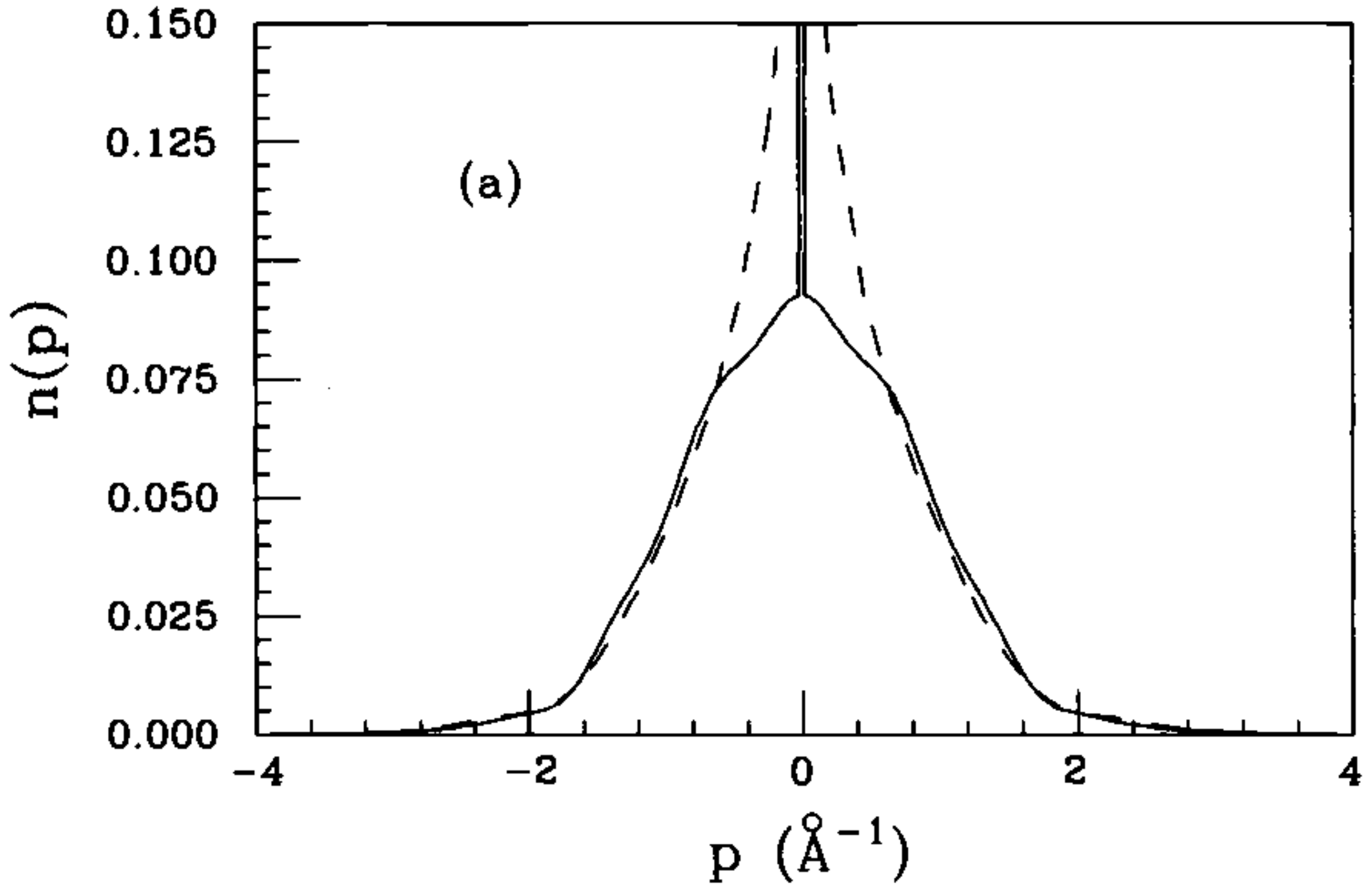
Coordonnées sphériques :

$$I(\boldsymbol{k},\omega) \quad \propto \quad 2\pi\int n(p)\ \delta\left[\hbar(\omega-\omega_{\mathrm{rec}}) - \frac{pk}{m_{\mathrm{at}}}\cos\theta\right]\ p^2\ \sin\theta\ \mathrm{d}p\ \mathrm{d}\theta$$

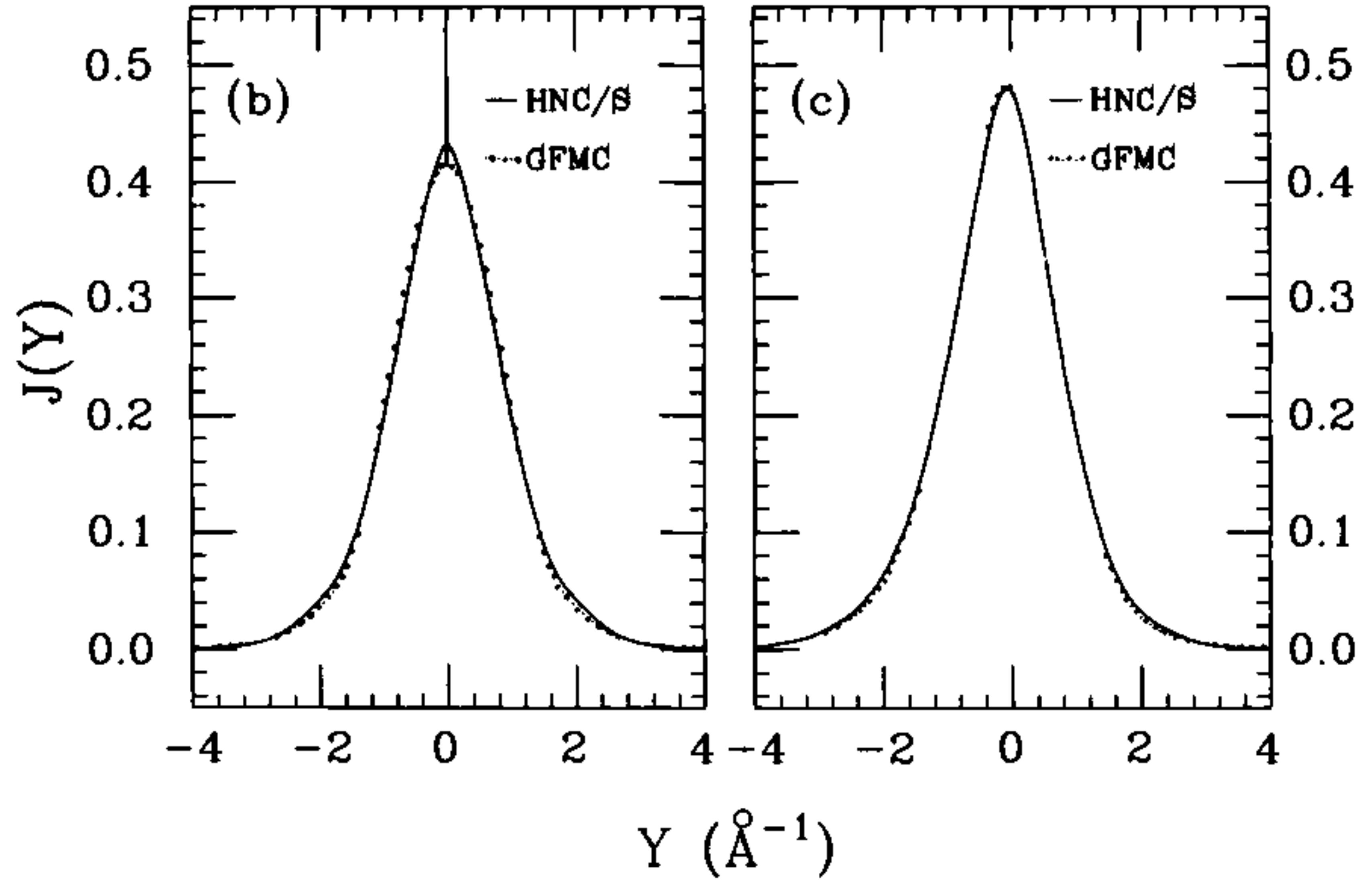
$$= \quad J\Big(\underbrace{\frac{\omega-\omega_{\mathrm{rec}}}{k}}_{\equiv Y}\Big) \quad \propto \quad \int_{|Y|}^{+\infty} p\ n(p)\ \mathrm{d}p$$

Malheureusement peu sensible aux détails de $n(p)$ autour de $p=0$

Sokol, 1993

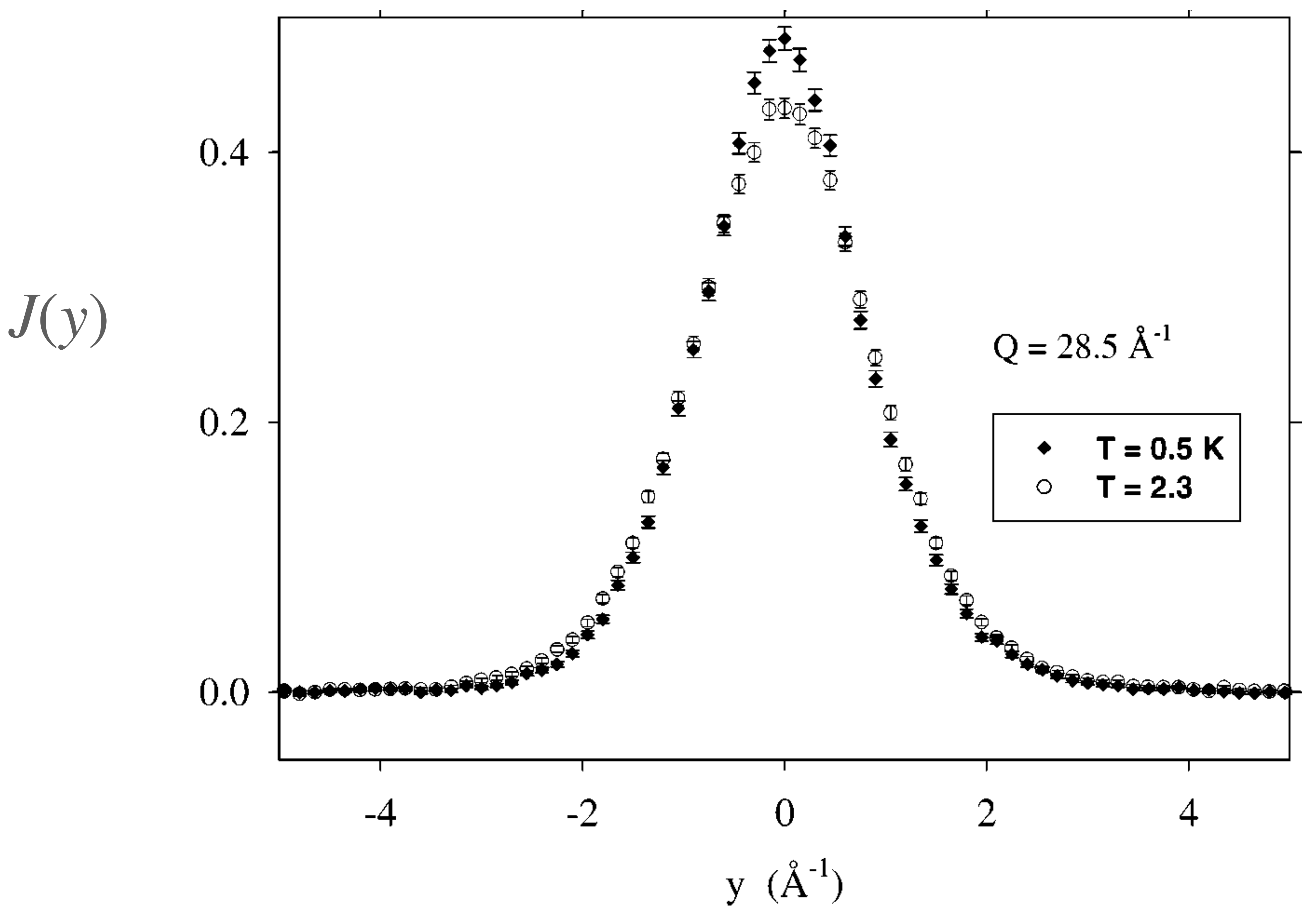


après convolution
et termes correctifs



Résultats récents sur l'hélium liquide

Glyde et al., 2000, 2011



Condensate, momentum distribution, and final-state effects in liquid ^{4}He

H. R. Glyde
Department of Physics and Astronomy, University of Delaware, Newark, Delaware 19716

R. T. Azuah and W. G. Stirling
Department of Physics, Oliver Lodge Laboratory, University of Liverpool, Liverpool L69 3BX, United Kingdom

(Received 15 February 2000)

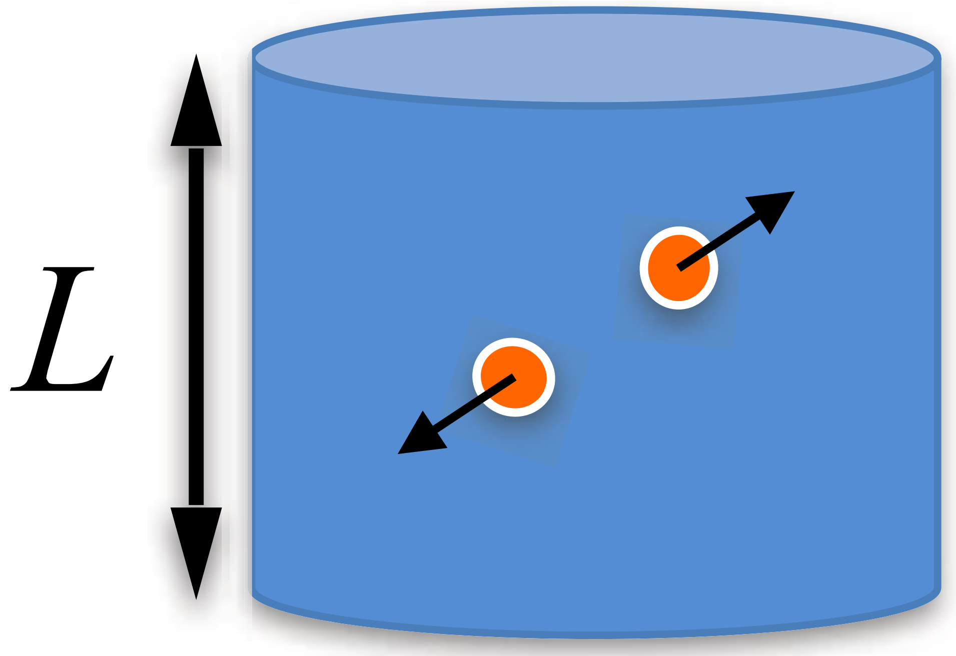
We present benchmark, high precision measurements of the dynamic structure factor $J(Q,y)$ of liquid ^{4}He at several temperatures over a wide wave vector transfer range $15 \leqslant Q \leqslant 29$ Å^{-1}. $J(Q,y)$ is very different in the superfluid phase below T_λ and in the normal phase above T_λ where $T_\lambda = 2.17$ K. Below T_λ, $J(Q,y)$ contains a pronounced additional contribution near $y=0$ that is asymmetric about $y=0$, reflecting a condensate contribution modified by asymmetric final-state (FS) effects. The asymmetry in $J(Q,y)$ is direct qualitative evidence of a condensate. We analyze the data at all T using the same model of $J(Q,y)$ consisting of a condensate fraction n_0, a momentum distribution $n^*(\mathbf{k})$ for states $k>0$ above the condensate, and a FS broadening function $R(Q,y)$. We find a condensate fraction given by $n_0(T) = n_0(0)[1-(T/T_\lambda)^\gamma]$ with $n_0(0) = (7.25 \pm 0.75)\%$ and $\gamma = 5.5 \pm 1.0$ for $T < T_\lambda$, which is 30% below existing observed values, and $n_0 = (0 \pm 0.3)\%$ for $T > T_\lambda$. We determine $n(k)$ in both phases. The $n^*(\mathbf{k})$ is significantly narrower than a Gaussian in both superfluid and normal ^{4}He and narrowest in the normal phase. The final-state function is determined from the data and is the same within precision above and below T_λ. The precise form of $R(Q,y)$ is important in determining the value of $n_0(T)$ below T_λ. When independent, theoretical $R(Q,y)$ are used in the analysis, the $n_0(T)$ is found to be the same as or smaller than the above value.

Fraction condensée : 7.25 (0.75) %

Déplétion quantique : 92.75 %

L'expérience de Cambridge (2017)

Lopes, Eigen, Navon, Clément, Smith, Hadzibabic



Gaz de potassium 39 (boson) de densité uniforme $\sim 3 \times 10^{11}$ atomes/cm³

Transfert d'impulsion et d'énergie par une transition à deux photons : absorption-émission stimulée

"diffraction de Bragg"

$\downarrow \boldsymbol{k}_2, \omega_2$

$\uparrow \boldsymbol{k}_1, \omega_1$

Résonance de Fano-Feshbach à ~ 400 G : elle permet

- d'ajuster la valeur de travail souhaitée pour a
- de basculer ensuite $a \approx 0$ pour rendre négligeable l'interaction entre atomes diffractés et atomes non diffractés

Procédure suivie à Cambridge

↓ $\boldsymbol{k}_2, \omega_2$

↑ $\boldsymbol{k}_1, \omega_1$

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2$$

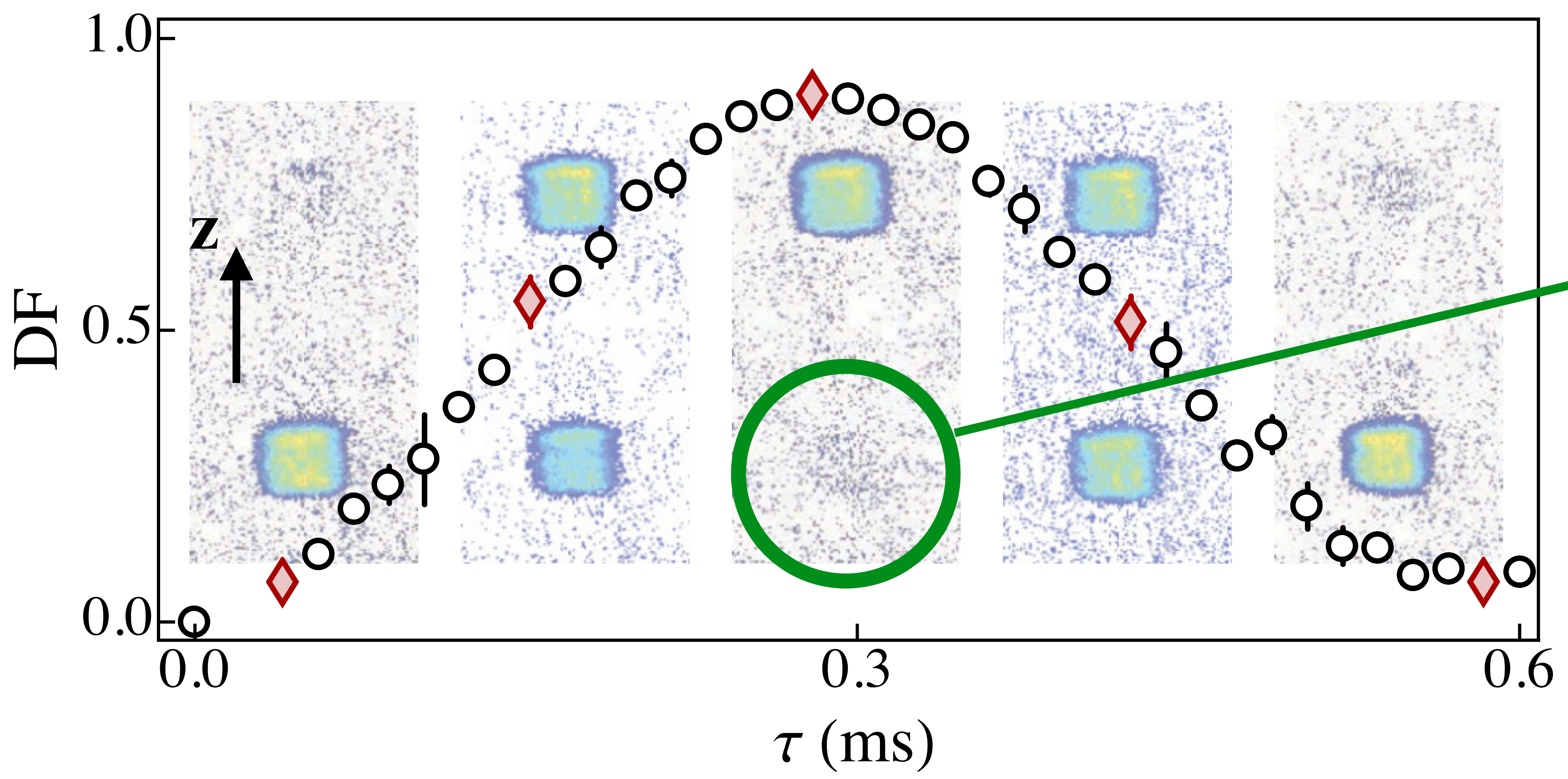
$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{p}_{\rm at}^{\rm ini} \cdot \boldsymbol{k}}{m_{\rm at}}$$

$$\boldsymbol{k} \parallel z$$

On choisit $\hbar\omega = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$: sélectionne les atomes de $p_z = 0$, essentiellement le condensat

Le processus de diffraction de Bragg est cohérent

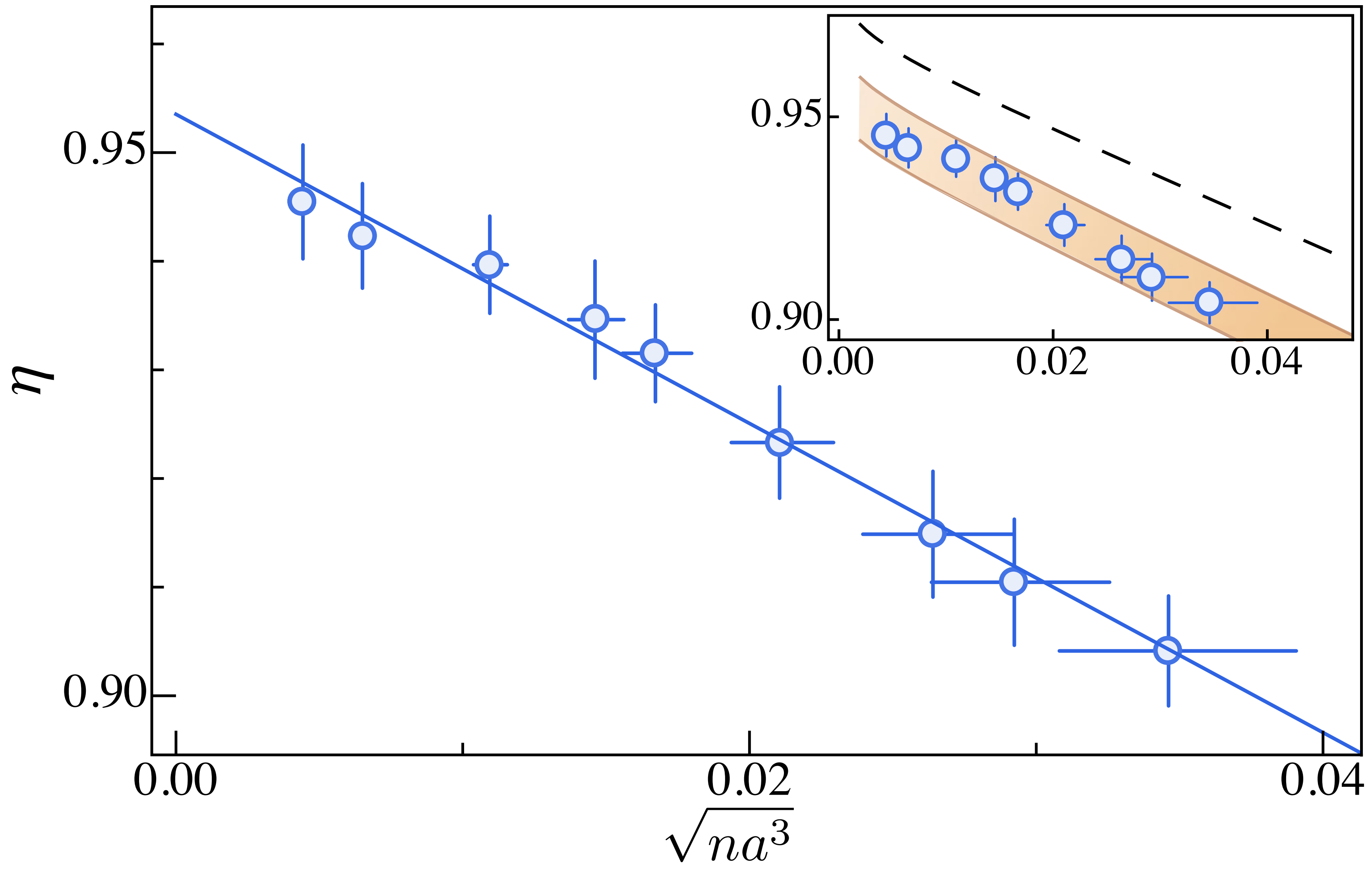
$\longrightarrow$ On observe une oscillation de Rabi de la distribution spatiale après temps de vol



atomes non diffractés :
déplétion quantique + …

… = effets de taille finie, excitation thermique

Résultat de l'expérience de Cambridge



η : fraction diffractée au maximum de l'oscillation de Rabi

Ajustement des données par $\eta = \eta_0 \left(1 - \gamma\sqrt{na^3}\right)$

$\eta_0 = 0.954(5)$ $\gamma = 1.5(2)$ $\dfrac{8}{3\sqrt{\pi}} = 1.505$

Effets systématiques :

- La longueur L n'est pas très grande devant ξ : séparation imparfaite entre nuages diffracté et non diffracté
- Effets de température non nulle (zone orange : T entre 3.5 et 5 nK)
- Certains atomes en dehors du condensat sont malgré tout diffractés

Bilan : erreurs statistiques (15%), erreurs systématiques (20%)

Paires d'atomes dans le vide de Bogoliubov

$|\Psi\rangle = \prod_{\{+\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}\}} |\Psi_{\boldsymbol{k}}\rangle$ où chaque $|\Psi_{\boldsymbol{k}}\rangle$ est un état comprimé du vide à deux modes

$$|\Psi_{\boldsymbol{k}}\rangle = \sum_n c_{\boldsymbol{k}}(n)\, |n : +\boldsymbol{k}\ ,\, n : -\boldsymbol{k}\rangle$$

Recherche des corrélations $\{+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$ dans un condensat d'hélium métastable

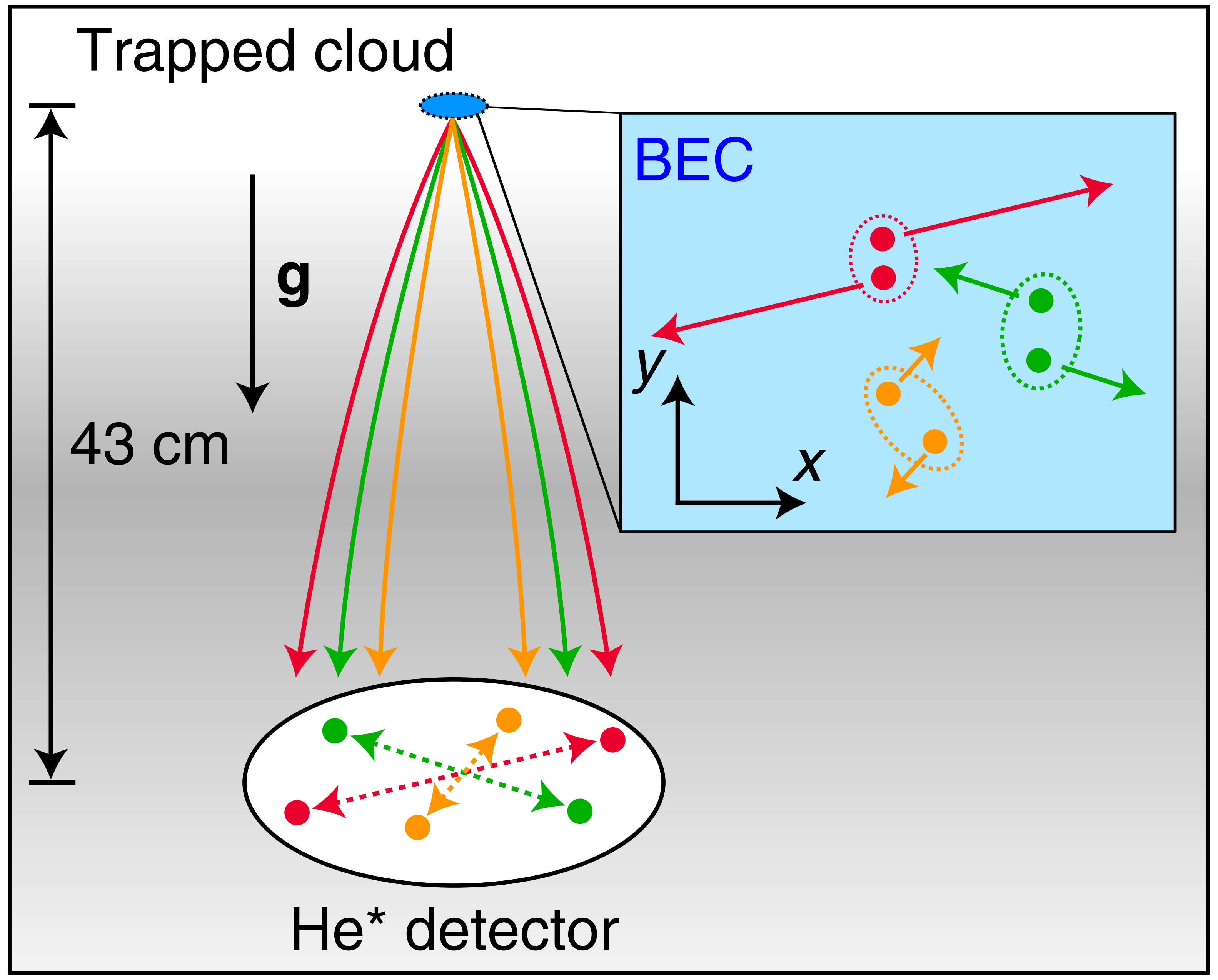
Expérience rendue possible grâce à

- *une détection atome par atome*
- *l'utilisation d'un réseau optique 3D de faible amplitude qui concentre les atomes et augmente la déplétion quantique : 0.2% $\longrightarrow$ 5.0%*

Tenart, Hercé, Bureik, Dareau, Clément, 2021

Mesure de la fonction de corrélation à deux corps

Tenart et al., 2021



Détection des atomes après une chute libre lors de leur impact sur une galette de micro-canaux

Efficacité : 53 %

Pour chaque événement de détection : x, y, t

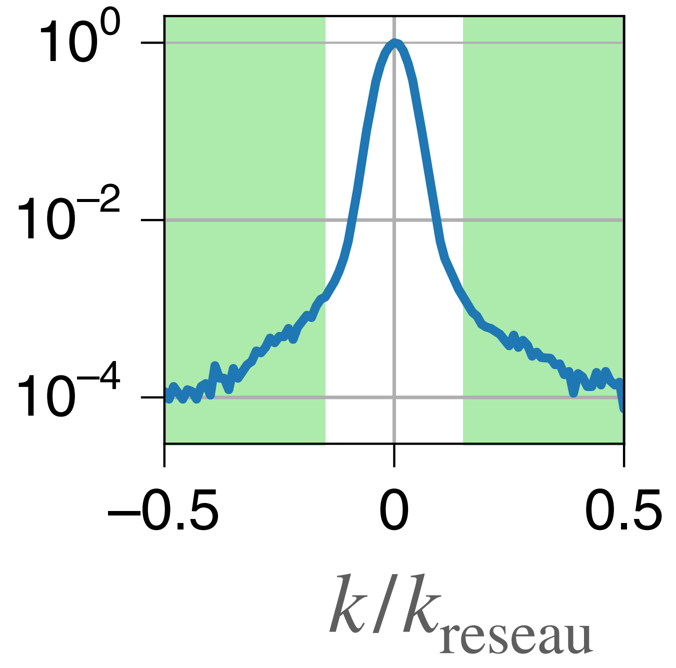
Permet de remonter aux trois composantes de la vitesse initiale :

$$v_x, v_y, v_z$$

On calcule à partir de l'ensemble des impacts la fonction de corrélation

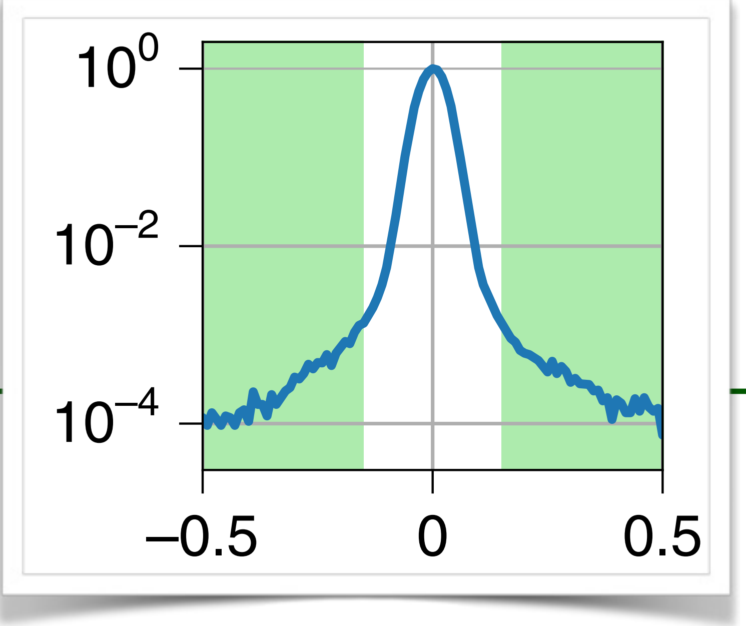
$$g^{(2)}(\delta \mathbf{k}) = \frac{\int_\Omega \langle n(\mathbf{k}) n(\delta \mathbf{k} - \mathbf{k})\rangle \ \mathrm{d}^3 k}{\int_\Omega \langle n(\mathbf{k})\rangle \ \langle n(\delta \mathbf{k} - \mathbf{k})\rangle \ \mathrm{d}^3 k}$$

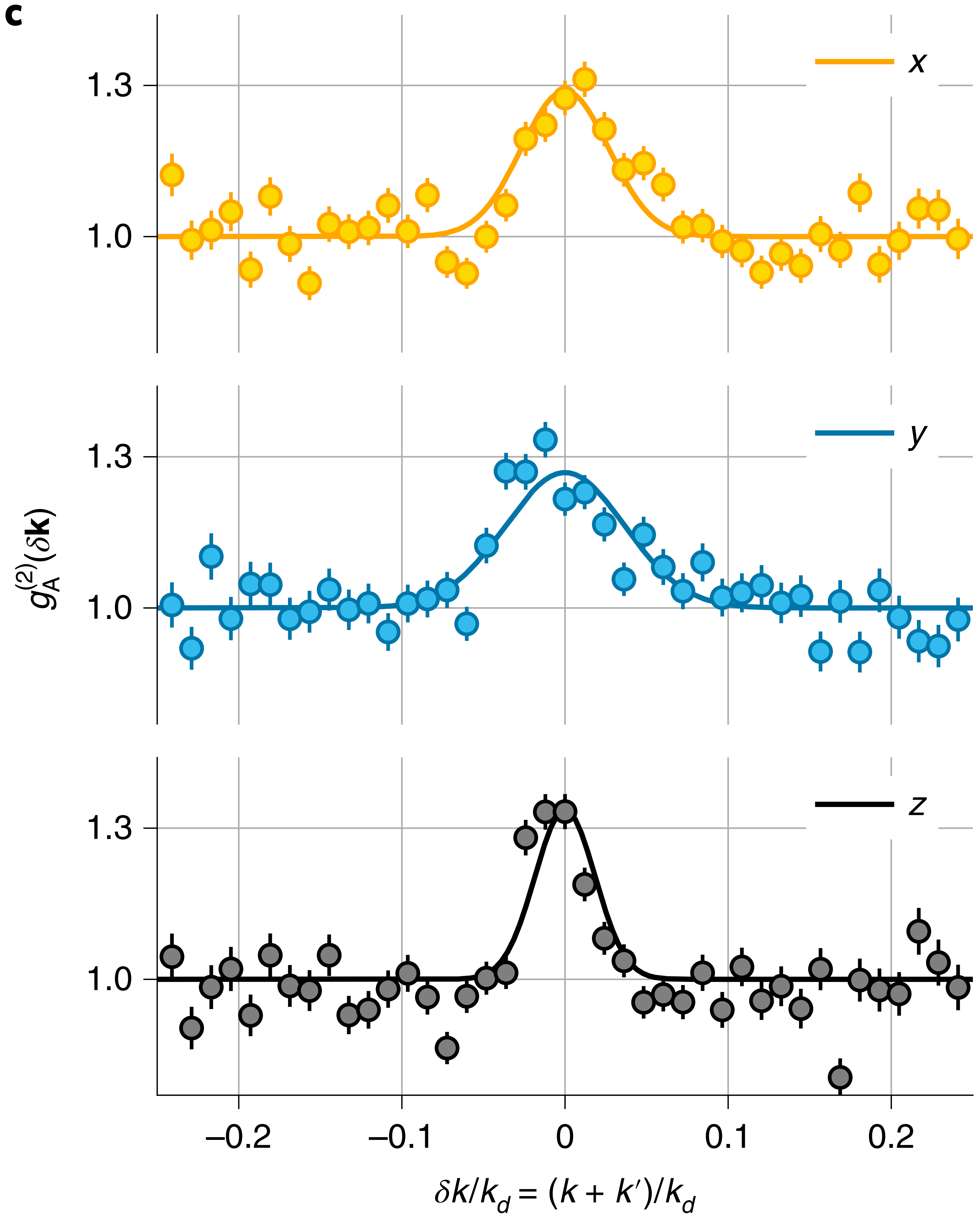
Ω : zone sélectionnée en dehors du condensat



La corrélation de paires $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ doit se manifester par un pic en $\delta \mathbf{k} = 0$

Observation des corrélations $\{+\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}\}$





Pour chaque réalisation, ~ 100 atomes dans la région Ω

~ 0.5 paires corrélées

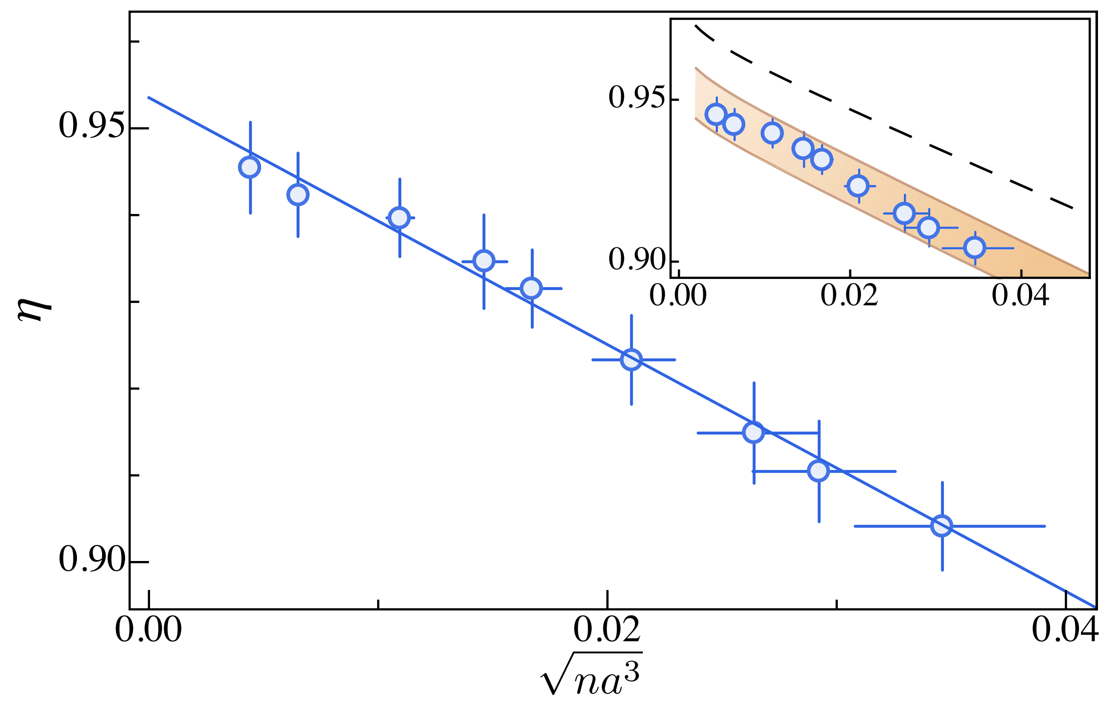
Le pic de corrélation observé à basse température devient indétectable quand on s'approche de T_c

Tenart et al., 2021

En résumé

Modélisation quantitative de l'état fondamental d'un gaz de Bose dans la limite de faible déplétion

Vérification expérimentale de la loi $\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}$



A venir :

Etudes expérimentales de l'énergie de LHY et du spectre d'excitation du condensat

Comment augmenter le rôle des fluctuations quantiques ?