

# Les interactions entre atomes dans les gaz quantiques (II)

*Du problème à deux corps au cas macroscopique*

Jean Dalibard  
Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2021-22



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>	<b>II L'approche de Bogoliubov quantique</b>	<b>29</b>
<b>I Le développement du viriel</b>	<b>11</b>	1 L'approximation quadratique pour $\hat{H}$	30
1 Le développement du viriel	12	1-1 Préliminaire : terme de Hartree, terme de Fock	31
1-1 Equation d'état d'un fluide	12	1-2 Hamiltonien à $N$ corps en seconde quantification	32
1-2 Le gaz parfait classique (Boltzmann)	13	1-3 Les hypothèses de l'approche de Bogoliubov	32
1-3 Les gaz parfaits quantiques	13	1-4 Points de vue grand-canonique vs. canonique	33
1-4 Le principe du développement du viriel	14	2 L'hamiltonien de Bogoliubov à deux modes	34
2 Le deuxième coefficient du viriel	15	2-1 Approche perturbative	35
2-1 Séparation "centre de masse" et "mvt. relatif"	15	2-2 Transformation canonique	35
2-2 Interactions en onde $s$ loin de résonance	16	2-3 État fondamental de l'hamiltonien	37
2-3 Pression et énergie interne du gaz	17	3 Exemple : le gaz de spin 1 en "dimension zéro"	39
2-4 Le voisinage d'une résonance de diffusion	18	3-1 Interactions en onde $s$	39
3 Le gaz de Fermi unitaire	21	3-2 L'approximation du mode unique	40
3-1 Développement du viriel pour un gaz spineur	21	3-3 Effet Zeeman et hamiltonien de Bogoliubov	42
3-2 Le coefficient $b_3$	23	3-4 Réponse du gaz à un saut de champ magnétique	43
3-3 Résultats expérimentaux	24	<b>III L'énergie de Lee-Huang-Yang et la déplétion quantique</b>	<b>47</b>
3-4 Au delà des effets à trois corps	26	1 Remarques préliminaires	48

1-1	Préliminaire 1 : le développement de Born . . . . .	48	2-3	Expériences de Boulder et Cambridge : $q \gtrsim 1/a$ . . . . .	73
1-2	Préliminaire 2 : les différents secteurs pour $k$ . . . . .	49	2-4	Retour vers l'approche de Beliaev . . . . .	74
1-3	Illustration : le spectre d'excitation . . . . .	51	2-5	La formule de Feynman . . . . .	75
2	Énergie LHY et déplétion quantique . . . . .	52	2-6	Problème résolu? . . . . .	77
2-1	L'énergie de l'état fondamental . . . . .	52	3	Mélanges et gouttelettes quantiques . . . . .	77
2-2	Calcul de l'énergie $E_{LHY}$ . . . . .	53	3-1	Position du problème . . . . .	77
2-3	La déplétion quantique . . . . .	54	3-2	Stabilité d'un mélange binaire (chp. moyen) . . . . .	78
3	Hamiltonien de Bogoliubov pour $\hat{V}_{pp}$ . . . . .	55	3-3	L'énergie LHY pour un mélange . . . . .	79
3-1	Potentiel de contact et pseudo-potentiel $\hat{V}_{pp}$ . . . . .	55	3-4	Stabilisation de gouttelettes . . . . .	80
3-2	Les subtilités du pseudo-potentiel . . . . .	56	<b>V Le contact à deux corps</b>	<b>85</b>	
3-3	Méthode de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel . . . . .	57	1	Champ d'application du concept de contact . . . . .	86
3-4	L'énergie de l'état fondamental . . . . .	58	1-1	Contribution des états liés . . . . .	86
4	Mesures de la déplétion quantique . . . . .	59	1-2	Conditions d'application : fermions vs. bosons . . . . .	87
4-1	Le cas de l'hélium liquide . . . . .	59	1-3	Rappel sur le gaz de Fermi . . . . .	87
4-2	Mesure sur un gaz atomique . . . . .	61	1-4	Résonances de Feshbach larges ou étroites? . . . . .	88
4-3	Paires d'atomes dans le vide de Bogoliubov . . . . .	62	2	Contact et corrélations à deux corps . . . . .	89
<b>IV État fondamental du gaz de Bose</b>	<b>65</b>		2-1	Rappel : états de diffusion proches de $E = 0$ . . . . .	89
1	Mesures de l'énergie LHY . . . . .	67	2-2	Un argument qualitatif . . . . .	89
1-1	Le problème des pertes à trois corps . . . . .	67	2-3	Fonction de corrélation spatiale à deux corps . . . . .	90
1-2	Mode de respiration . . . . .	67	2-4	Distribution de paires . . . . .	92
1-3	Détermination de l'équation d'état . . . . .	69	2-5	Distribution en impulsion . . . . .	92
1-4	Distribution en impulsion et énergie cinétique . . . . .	70	3	Définition thermodynamique du contact . . . . .	94
2	Le spectre d'excitation d'un condensat . . . . .	71	3-1	Une nouvelle variable thermodynamique . . . . .	94
2-1	Resommation du développement de Born . . . . .	71	3-2	Un lemme utile . . . . .	95
2-2	Mesure du spectre de Bogoliubov . . . . .	72	3-3	Variation de $a$ et contact . . . . .	95

3-4	La cas de la température non nulle . . . . .	96	2-1	Position du problème . . . . .	107
3-5	Contact et théorème du viriel . . . . .	97	2-2	Le centre de gravité du spectre . . . . .	108
4	Premières mesures du contact . . . . .	98	2-3	L'aile du spectre radio-fréquence . . . . .	109
4-1	Distribution en impulsion d'un gaz de Fermi . . . . .	98	3	Études expérimentales sur le gaz de Fermi . . . . .	111
4-2	Lois d'échelle pour le contact . . . . .	99	3-1	Spectroscopie radio-fréquence . . . . .	111
4-3	Études numériques . . . . .	100	3-2	Mesure du contact par pertes d'atomes . . . . .	112
4-4	Résonance de Feshbach et fraction moléculaire . . . . .	101	3-3	Le contact en onde $p$ . . . . .	114
<b>VI Les différentes facettes du contact à deux corps</b>		<b>103</b>	4	Contact à deux corps pour le gaz de Bose . . . . .	116
1	Contact et pseudo-potential . . . . .	104	4-1	Les différents régimes pour le gaz de Bose . . . . .	116
1-1	Rappels sur la définition du contact . . . . .	104	4-2	Prédictions pour le contact à deux corps . . . . .	117
1-2	La limite d'une portée $b$ nulle . . . . .	104	4-3	Contact à deux corps et spectroscopie rf . . . . .	118
1-3	L'approche pseudo-potential . . . . .	105	4-4	Mesure par spectroscopie de Ramsey . . . . .	119
1-4	Le cas d'un potentiel en "vrai" Dirac . . . . .	106			
2	Contact et spectroscopie radio-fréquence . . . . .	107	<b>Références</b>		<b>120</b>



# Introduction

Comment passer du simple au complexe, de l'individuel au collectif, du microscopique au macroscopique ? La connaissance des propriétés des constituants de base de la matière ordinaire, atomes et molécules, permet-elle de prédire le comportement d'une assemblée de  $N \gg 1$  particules, qu'elle soit gazeuse, liquide ou solide ?

Cette question s'est posée dès la mise en place du formalisme de la physique statistique. Un exemple célèbre est l'équation d'état pour un fluide de volume  $V$ , de pression  $P$  et de température  $T$  écrite<sup>1</sup> par Johannes Diderik van der Waals en 1873 dans sa thèse de doctorat, équation qui lui valut le prix Nobel de physique en 1910 :

$$\left( P + a' \frac{N^2}{V^2} \right) (V - Nb') = Nk_B T. \quad (1)$$

Dans cette équation, les paramètres  $a'$  et  $b'$  sont censés décrire les processus physiques microscopiques qui induisent une déviation par rapport au gaz parfait, pour lequel  $PV = Nk_B T$  :  $a'$  caractérise les interactions entre particules, en particulier les interactions de van der Waals, et  $b'$  le volume occupé par chacune, considérée comme une sphère dure impénétrable.

Une prédiction importante de cette équation est l'universalité des phénomènes caractéristiques des fluides décrits par la physique classique, comme l'existence d'une transition liquide-gaz et d'un point critique où la distinction entre liquide et vapeur disparaît<sup>2</sup>. L'équation d'état de van der Waals permet également de relier les propriétés des fluides entre eux pourvu qu'on utilise des unités réduites qui éliminent les paramètres microscopiques  $a'$  et  $b'$ . Si on note  $P_c$ ,  $T_c$  et  $n_c$  la pression, la température et la

1. Les variables utilisées par van der Waals n'étaient pas le nombre de molécules  $N$ , ni la constante de Boltzmann  $k_B$ , mais le nombre de moles et la constante  $R$  des gaz parfaits. On passe d'un système de notation à l'autre par une multiplication par le nombre d'Avogadro.

2. Rappelons que ce point critique est obtenu par la recherche du point d'inflexion du

densité  $n = N/V$  au point critique, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{P}{P_c} = F \left( \frac{T}{T_c}, \frac{n}{n_c} \right) \quad (3)$$

où  $F$  est une fonction identique pour tous les fluides.

Cette universalité, appelée *loi des états correspondants*, est illustrée sur la figure 1 extraite de l'article de GUGGENHEIM (1945). L'auteur y a tracé pour huit fluides différents la densité du gaz et la densité du liquide pour toute une gamme de températures inférieures à la température critique. Les densités sont mesurées en unité de  $n_c$  et les températures en unité de  $T_c$ , de sorte que l'universalité exprimée par (3) doit conduire à une seule et même courbe pour les différents fluides. C'est effectivement ce qui se produit, en bonne approximation, pour les huit fluides considérés.

L'équation de van der Waals et sa généralisation par GUGGENHEIM (1945) sont des approches entièrement classiques. Elles sont valables à haute température, plus précisément à basse densité dans l'espace des phases :

$$n\lambda^3 \ll 1 \quad \text{avec} \quad \lambda = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde thermique.

Nous allons dans ce cours nous intéresser au point de vue opposé, dans lequel les effets quantiques jouent un rôle essentiel. Ce point de vue est résumé par le réseau de courbes isothermes  $P(V)$  à  $T$  donnée. Il faut donc résoudre

$$\text{Point critique :} \quad \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_T = 0, \quad (2)$$

exprimant notamment que la compressibilité du fluide est infinie en ce point.

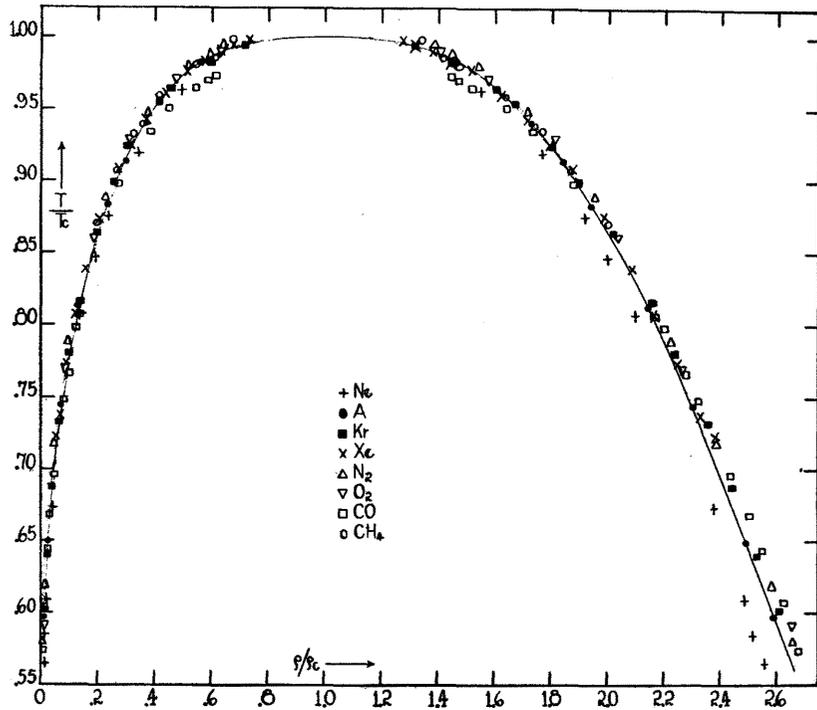


FIGURE 1. Caractère "universel" de la coexistence liquide-gaz pour une série de fluides différents, représentée ici sur un diagramme densité-température. On a tracé sur ce graphique la densité du gaz (branche de gauche) et celle du liquide (branche de droite). Les densités et les températures sont exprimées en unités des valeurs critiques pour chacun des corps,  $n_c$  (notée ici  $\rho_c$ ) et  $T_c$ . Au point critique, en haut du graphe, les deux courbes se rejoignent. Notons que les ajustements indiqués par une ligne continue diffèrent quantitativement de la prédiction pour l'équation d'état de van der Waals, même si l'allure générale des résultats est conforme à ce qu'on attend pour (1). Figure tirée de GUGGENHEIM (1945).

bien entendu motivé par le développement considérable des recherches autour de la physique des gaz à très basse température qui s'est produit au cours des vingt dernières années. Grâce à la combinaison du refroidissement d'atomes par laser et par évaporation, on sait produire des fluides bosoniques ou fermioniques fortement dégénérés. Pour ces fluides, les interactions doivent être décrites par la physique quantique. Plus précisément, les collisions se produisent essentiellement dans l'onde partielle de moment cinétique nul, l'onde  $s$ . Elles sont donc caractérisées par un nombre, la longueur de diffusion  $a$ , dont la valeur peut, pour certaines espèces atomiques, être ajustée à une valeur arbitraire, voire même  $a = \pm\infty$ , grâce à des résonances de diffusion appelée résonances de Fano-Feshbach.

Notre but va être de comprendre dans quelle mesure on peut retrouver une universalité quantique, similaire dans son principe à celle montrée en figure 1. Cette universalité doit permettre de relier les propriétés macroscopiques du fluide, comme son énergie, à cette grandeur microscopique  $a$ . Nous allons pour cela procéder par étapes selon le plan suivant :

- Le chapitre 1 sera consacré au cas faiblement dégénéré,  $n\lambda^3 \lesssim 1$ , qui peut être abordé par le développement du viriel, c'est-à-dire un développement de l'équation d'état en puissances de  $n\lambda^3$ .
- Les chapitres 2, 3 et 4 seront consacrés au cas du gaz de Bose fortement dégénéré,  $n\lambda^3 \gg 1$ , mais en interaction relativement faible au sens où  $na^3 \ll 1$ . Nous commencerons par la présentation détaillée de la méthode de Bogoliubov, puis nous étudierons les corrections d'ordre supérieur, comme celle de Lee-Huang-Yang (LEE, HUANG et al. 1957). Nous présenterons également plusieurs expériences récentes fournissant des tests quantitatifs de ces théories. Nous expliquerons par ailleurs comment ces corrections permettent de stabiliser des états "liquides", c'est-à-dire des états de densité indépendante du nombre de particules (PETROV 2015).
- Dans les chapitres 5 et 6, nous aborderons le cas des systèmes en interaction forte, dans lesquels une résonance de diffusion permet de réaliser une situation telle que  $na^3 \gtrsim 1$ , tout en restant dans le régime dilué  $nb^3 \ll 1$  où  $b$  est la portée du potentiel. Nous présenterons le concept de contact introduit par S. Tan (TAN 2008a; TAN 2008c) et nous montrerons comment il permet de relier la physique à un ou deux corps, par exemple la distribution en impulsion  $n(\mathbf{k})$  et la fonction de corrélation spatiale  $g_2(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b)$ , à la physique à  $N$  corps par l'intermédiaire

des fonctions thermodynamiques.

Nous utiliserons dans ce cours un certain nombre de notions qui ont été développées en détail dans le cours de l'an passé : collision en onde  $s$  et longueur de diffusion, développement de Born, résonances de Fano–Feshbach. Nous rappellerons au fur et à mesure les ingrédients essentiels pour utiliser ces notions et nous renvoyons le lecteur vers les notes du cours 2020-21 (DALIBARD 2021) pour les approfondir si besoin est.

Je remercie Jérôme Beugnon, Markus Holzmann, Raphael Lopes, Sylvain Nascimbene, Félix Werner et Willi Zwerger pour de nombreuses discussions sur les points abordés dans ce cours.



# Chapitre I

## Gaz quantiques faiblement dégénérés : l'approche "développement du viriel"

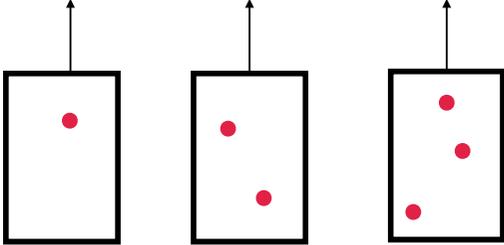
Nous abordons dans ce chapitre une première méthode pour relier la physique à petit nombre de corps et les propriétés macroscopiques d'un fluide. Cette méthode, qui porte le nom de développement du viriel, est utilisable pour des fluides faiblement dégénérés, c'est-à-dire une densité dans l'espace des phases  $n\lambda^3 \ll 1$ , où  $n$  est la densité spatiale et  $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$  la longueur d'onde thermique,  $T$  désignant la température.

Cette approche du viriel consiste à proposer un développement d'une fonction thermodynamique du fluide macroscopique, sa pression par exemple, en puissances de la densité  $n$  ou de la fugacité<sup>1</sup>  $z = \exp(\mu/k_B T)$ , où  $\mu$  est le potentiel chimique. Ce type de développement a été proposé par Kamerlingh Onnes au tout début du vingtième siècle pour un fluide décrit par la thermodynamique classique, puis étendu à une description quantique par UHLENBECK & BETH (1936) et BETH & UHLENBECK (1937). De manière remarquable, le coefficient du terme d'ordre  $n$  (avec en pratique  $n$  de l'ordre de 2 à 5) est calculable pourvu que l'on sache traiter exactement le problème à  $n$  corps, donc un "tout petit" système très loin du cas macroscopique [cf. figure 1].

---

1. Pour un développement en puissances de  $z$ , certains auteurs préfèrent utiliser le terme "développement en amas" (*cluster expansion*). Nous garderons ici la terminologie la plus commune, "développement du viriel".

Nous commençons ce chapitre par un rappel des bases de la description thermodynamique d'un gaz quantique parfait, décrit par la statistique de Bose ou de Fermi. Nous trouvons ainsi une première source de déviation des coefficients du développement du viriel par rapport à un gaz de Boltzmann. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons au premier coefficient du viriel non trivial, noté  $b_2$ . Nous détaillons son calcul dans le cas d'interactions "standard" et nous retrouvons un résultat célèbre de BETH & UHLENBECK (1937). Nous discutons ensuite le cas d'interactions binaires résonantes. La troisième partie est consacrée au cas du gaz de Fermi de spin 1/2 unitaire, c'est-à-dire avec des interactions  $\uparrow\downarrow$  résonantes. Il s'agit d'un système qui joue actuellement un rôle central en physique des gaz quantiques, car il permet de tester de manière très fine différentes approches théoriques en les confrontant à des résultats expérimentaux. Nous décrivons ces expériences et présentons les différents résultats connus pour les coefficients  $b_3$ ,  $b_4$  et  $b_5$  du développement.

$$\frac{P}{k_B T / \lambda^3} = b_1(T)z + b_2(T)z^2 + b_3(T)z^3 + \dots$$


**FIGURE 1.** Principe du développement du viriel. On exprime la pression  $P$  (en unités de  $k_B T / \lambda^3$ ) comme un développement en puissances de la fugacité  $z = \exp(\mu/k_B T)$ . Le coefficient d'ordre  $n$ ,  $b_n(T)$ , se calcule en résolvant le problème à  $n$  corps correspondant. On fait ainsi le lien entre les propriétés macroscopiques du fluide et le problème à petit nombre de corps ( $n$  allant typiquement de 2 à 5), au moins dans le cas faiblement dégénéré :  $n\lambda^3 \sim z \ll 1$ .

## 1 Le développement du viriel

### 1-1 Equation d'état d'un fluide

L'état d'un fluide à l'équilibre thermodynamique est caractérisé par la valeur d'un certain nombre de variables thermodynamiques. Pour un gaz de particules sans spin, on utilise en général les trois variables suivantes :

- la température  $T$  ou sa variable conjuguée, l'entropie  $S$ .
- le volume  $L^3$  ou sa variable conjuguée, la pression  $P$ .
- le nombre de particules  $N$  ou sa variable conjuguée, le potentiel chimique  $\mu$

L'équation d'état d'un fluide consiste à exprimer une fonction thermodynamique, l'énergie  $E(S, L^3, N)$  ou le grand potentiel  $\Omega(T, L^3, \mu)$  par exemple, en fonction d'un triplet formé à partir de ces variables. Dans un premier temps, nous allons utiliser le grand potentiel  $\Omega(T, L^3, \mu)$ , dont la

différentielle totale s'écrit :

$$\boxed{d\Omega = -S dT - P dL^3 - N d\mu} \quad (1)$$

On montre en physique statistique [voir par exemple LANDAU & LIFSHITZ (1975)] que  $\Omega$  est relié à la fonction de partition dans l'ensemble grand-canonique  $Z_{GC}$

$$\Omega = -k_B T \log Z_{GC} \quad (2)$$

avec

$$Z_{GC} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N, \quad (3)$$

où l'on a introduit la fugacité  $z = \exp(\mu/k_B T)$  et où  $Z_N$  est la fonction de partition de l'ensemble canonique à  $N$  particules, avec  $Z_0 = 1$  par convention. Rappelons la définition de  $Z_N$  :

$$Z_N = \sum_j e^{-E_j/k_B T} \quad (4)$$

où la somme porte sur tous les états  $\phi_j$  du système à  $N$  particules. En pratique, du fait du facteur de Boltzmann  $e^{-E_j/k_B T}$ , seuls l'état fondamental d'énergie  $E_0$  et les états excités d'énergie  $E_j - E_0 \lesssim$  quelques  $k_B T$  contribuent significativement à  $Z_N$ .

Une fois connu le grand potentiel  $\Omega(L^3, T, \mu)$ , on déduit les quantités thermodynamiques conjuguées des trois variables, l'entropie  $S$ , la pression  $P$  et le nombre de particules moyen  $N$  (ou la densité spatiale  $n$ ) :

$$S = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{L^3, \mu}, \quad P = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial L^3} \right)_{T, \mu}, \quad n = \frac{N}{L^3} = - \frac{1}{L^3} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, L^3}. \quad (5)$$

Nous considérons ici un fluide dans lequel les interactions sont à suffisamment courte portée pour que le grand potentiel  $\Omega$  soit une fonction extensive, c'est-à-dire proportionnelle au volume quand on maintient  $T$  et  $\mu$  constants. L'intérêt du choix du grand potentiel est alors clair : la relation entre  $\Omega$  et  $P$  ne peut être que la relation linéaire

$$\boxed{\Omega = -PL^3} \quad (6)$$

En d'autres termes, une équation d'état possible pour le fluide est l'expression de la pression  $P$  en termes de la température et du potentiel chimique. Pour travailler avec des quantités sans dimension, on peut s'intéresser par exemple à

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T}. \quad (7)$$

Par transformation de Legendre, on peut ensuite calculer d'autres potentiels thermodynamiques comme l'énergie libre  $F(L^3, T, N) = \Omega + \mu N$  ou l'énergie interne  $E(L^3, S, N) = \Omega + TS + \mu N$ .

### 1-2 Le gaz parfait classique (Boltzmann)

Le gaz parfait classique correspond à une assemblée de particules de masse  $m$ , non interagissantes et non corrélées, et il obéit à la statistique de Boltzmann. Si on prend des conditions aux limites périodiques dans la boîte de volume  $L^3$ , une base d'états propres à une particule est donnée par les ondes planes

$$\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad n \in \mathbb{Z}^3, \quad (8)$$

d'énergie  $\hbar^2 k^2 / 2m$  La fonction de partition à une particule est donc

$$Z_1 = \sum_{\mathbf{k}} e^{-\hbar^2 k^2 / 2mk_B T} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int e^{-\hbar^2 k^2 / 2mk_B T} d^3k \quad (9)$$

ou encore

$$Z_1 = \frac{L^3}{\lambda^3} \quad (10)$$

Comme les particules ne sont pas corrélées, la fonction de partition à  $N$  particules est égale au produit de  $N$  fonctions  $Z_1$ , au facteur  $1/N!$  près nécessaire pour la résolution du paradoxe de Gibbs. On a donc

$$Z_{GC} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(zZ_1)^N}{N!} = \exp(zZ_1) \quad (11)$$

et donc

$$\Omega = -k_B T z Z_1 = -k_B T z \frac{L^3}{\lambda^3}. \quad (12)$$

On déduit de (6) l'expression de la pression

$$\text{Gaz parfait classique : } \frac{P\lambda^3}{k_B T} = z \quad (13)$$

La densité spatiale se déduit de (5) :

$$n\lambda^3 = z. \quad (14)$$

Pour le gaz parfait classique, la fugacité est égale à la densité dans l'espace des phases.

### 1-3 Les gaz parfaits quantiques

Dans notre monde physique, le gaz parfait classique étudié ci-dessus n'existe pas. Même si les particules n'interagissent pas (gaz parfait), le fait qu'elles obéissent à la statistique de Bose ou de Fermi vient introduire des corrélations entre elles. Par exemple, le principe de Pauli interdit que deux fermions de même spin occupent le même état  $\mathbf{k}$ .

Pour des particules quantiques sans interaction, le calcul (2) du grand potentiel  $\Omega$  à partir de la fonction de partition grand-canonique  $Z_{GC}$  est un exercice de dénombrement traité dans tous les ouvrages de physique statistique. Indiquons ici le résultat :

$$\text{Gaz parfait (Bose) : } \Omega = k_B T \sum_j \log \left( 1 - z e^{-E_j / k_B T} \right) \quad (15)$$

$$\text{Gaz parfait (Fermi) : } \Omega = -k_B T \sum_j \log \left( 1 + z e^{-E_j / k_B T} \right) \quad (16)$$

où la somme porte sur tous les états  $\phi_j$  (spin et orbital) à une particule, d'énergie  $E_j$ .

Prenons un gaz de particules sans spin ou polarisées, de sorte que le degré de liberté de spin n'intervienne pas. Les états  $\phi_j$  sont les ondes planes et on trouve, en remplaçant la somme discrète sur  $\mathbf{k}$  par une intégrale :

$$\Omega = \pm k_B T \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \log \left( 1 \mp z e^{-\hbar^2 k^2 / 2mk_B T} \right) d^3k \quad (17)$$

En utilisant le développement en série

$$\log(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}, \quad (18)$$

on arrive à

$$\text{Gaz parfait (bosons polarisés)} : \quad \frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{5/2}} z^j \quad (19)$$

et

$$\text{Gaz parfait (fermions polarisés)} : \quad \frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^{5/2}} z^j \quad (20)$$

Le premier terme ( $j = 1$ ) des développements (19) et (20) coïncide avec le résultat du gaz classique (13). L'apparition des termes suivants ( $j \geq 2$ ) dans le cas des bosons ou des fermions traduit l'émergence des corrélations entre particules dues aux statistiques quantiques.

#### 1-4 Le principe du développement du viriel

Nous considérons maintenant un gaz de particules sans spin ou polarisées, en interaction, et confiné dans une boîte de volume  $L^3$ . Le développement du viriel est basé sur la série en puissances de la fugacité  $z$  :

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j(T) z^j \quad (21)$$

Ce développement est utile quand la fugacité  $z$  est petite devant 1, c'est-à-dire  $\mu$  négatif avec  $|\mu| \gg k_B T$ . Comme nous l'avons vu sur le cas du gaz parfait classique [cf. (14)], cela correspond à un gaz faiblement dégénéré, de petite densité dans l'espace des phases  $n\lambda^3$ . On peut alors se restreindre aux premiers termes du développement, que l'on suppose convergent dans cette limite  $z \ll 1$  (LEBOWITZ & PENROSE 1964).

Une fois connu le développement de la pression, on en déduit les autres quantités thermodynamiques comme la densité  $n$  qui se calcule à partir de (5)

$$n = \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T, L^3}, \quad (22)$$

ce qui conduit à

$$n\lambda^3 = \sum_{j=1}^{\infty} j b_j(T) z^j \quad (23)$$

Les différents coefficients  $b_j(T)$  sont obtenus en identifiant terme à terme les puissances de  $z$  dans l'égalité

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = \frac{\lambda^3}{L^3} \log Z_{GC} \quad (24)$$

c'est-à-dire :

$$b_1(T) z + b_2(T) z^2 + \dots = \frac{\lambda^3}{L^3} \log(1 + zZ_1 + z^2Z_2 + \dots) \quad (25)$$

On constate alors immédiatement que le premier coefficient du viriel  $b_1(T)$  ne fait intervenir que la fonction de partition à un corps  $Z_1$  et ne contiendra donc pas trace des interactions :

$$b_1(T) = \frac{\lambda^3}{L^3} Z_1 \quad (26)$$

ou encore, en utilisant la relation  $Z_1 = L^3/\lambda^3$  :

$$b_1(T) = 1 \quad (27)$$

Le deuxième coefficient du viriel  $b_2(T)$  requiert la connaissance de  $Z_2$ , donc de la physique à deux corps :

$$b_2(T) = \frac{1}{Z_1} \left( Z_2 - \frac{Z_1^2}{2} \right) \quad (28)$$

et on trouve de même :

$$b_3(T) = \frac{1}{Z_1} \left( Z_3 - Z_1 Z_2 + \frac{Z_1^3}{3} \right) \quad (29)$$

Plus généralement, le coefficient d'ordre  $j$ ,  $b_j(T)$ , fait intervenir la solution des problèmes à au plus  $j$  corps, et seulement eux! On a donc la propriété remarquable suivante : le développement du viriel, quand il converge, permet de relier de manière naturelle la physique à petit nombre de corps et les propriétés macroscopiques du fluide. Dans le paragraphe qui suit, nous allons nous concentrer sur les processus à deux corps, c'est-à-dire la première déviation par rapport au gaz parfait.

## 2 Le deuxième coefficient du viriel

D'après les résultats énoncés au paragraphe précédent, le deuxième coefficient du viriel  $b_2(T)$  contient les premières corrections au gaz parfait classique. Ces corrections correspondent à l'émergence de corrélations entre particules causées par

— les simples effets des statistiques quantiques, avec

$$b_2^{(0)} = \pm \frac{1}{2^{5/2}} \quad (30)$$

comme nous l'avons vu en (19) et (20). L'exposant  $^{(0)}$  indique ici que le résultat est obtenu pour un gaz parfait.

— les interactions entre particules, auxquelles nous allons nous intéresser dans les paragraphes qui suivent.

D'après (28), la correction à  $b_2$  liée aux interactions est directement proportionnelle à la correction à  $Z_2$ , que nous noterons  $\Delta Z_2$ .

**Les effets quantiques pour  $b_2$ .** Avant de passer au rôle des interactions, il est instructif de vérifier que l'on peut retrouver simplement le coefficient  $b_2^{(0)}$ . Pour des bosons, une base d'états possibles est donnée par les paires  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , en ne comptant qu'une fois la paire  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \equiv (\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$  et sans restriction pour l'état  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ . Pour des fermions polarisés, on ne compte également qu'une fois chaque paire mais l'état  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$  est exclu. On peut regrouper les deux cas en écrivant :

$$Z_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{-\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)/(2mk_B T)} \pm \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} e^{-\hbar^2 k^2/(mk_B T)} = \frac{Z_1^2}{2} \pm \frac{Z_1}{2^{5/2}} \quad (31)$$

avec le signe + pour les bosons et – pour les fermions. On retrouve bien

Gaz parfait quantique :  $b_2^{(0)} = \pm \frac{1}{2^{5/2}}$

(32)

### 2-1 Séparation "centre de masse" et "mouvement relatif"

Considérons un gaz de bosons polarisés dans lequel les particules interagissent deux à deux par le potentiel  $V(r)$ , supposé isotrope. Nous réécrivons ici la fonction de partition à deux particules  $Z_2$  sous la forme :

$$Z_2 = \left( \sum_{\mathbf{K}} e^{-\hbar^2 K^2/(4mk_B T)} \right) \left( \sum_j e^{-E_j/k_B T} \right). \quad (33)$$

Nous avons séparé le mouvement libre du centre de masse, paramétré par son impulsion  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  associé à la masse totale  $2m$ , et le mouvement de la variable relative, caractérisé par ses états propres  $\psi_j(\mathbf{r})$  d'énergie  $E_j$ , et associé à la masse réduite  $m_r = m/2$ .

La partie "centre de masse" se calcule comme précédemment pour donner :

$Z^{\text{CdM}} = \sum_{\mathbf{K}} e^{-\hbar^2 K^2/(4mk_B T)} = 2^{3/2} Z_1$

(34)

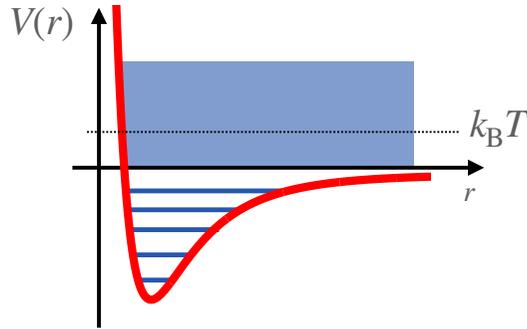
La somme intervenant dans la partie "variable relative"

$$Z^{\text{rel}} = \sum_j e^{-E_j/k_B T} \quad (35)$$

contient la contribution de tous les états de moment cinétique (ondes partielles)  $\ell = 0, 2, 4, \dots$  autorisés par le principe de symétrisation :

$$Z^{\text{rel}} = \sum_{\ell} Z_{\ell}^{\text{rel}}. \quad (36)$$

Nous supposons ici le gaz de bosons suffisamment froid pour que seules les interactions en onde  $s$  jouent un rôle (rappelons que des fermions polarisés n'ont pas d'interaction dans ce canal). La contribution des ondes



**FIGURE 2.** États de diffusion et états liés pour le problème à deux corps. Dans le cas non résonnant ( $|a| \ll \lambda$ ), nous allons nous concentrer essentiellement sur les états de diffusion, et plus particulièrement sur ceux dont l'énergie ne dépasse pas quelques  $k_B T$ . Dans le cas résonnant ( $|a| \gg \lambda$ ), nous prendrons également en compte la contribution du dernier état lié, dont l'énergie  $\sim -\hbar^2/ma^2$  est (en valeur absolue) petite devant  $k_B T$ .

partielles  $\ell \neq 0$  à cette somme est donc identique à celle d'un gaz parfait et nous ne l'écrivons pas explicitement. En ce qui concerne la contribution  $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$  du canal de moment cinétique  $\ell = 0$  (onde  $s$ ), rappelons qu'elle contient à la fois la contribution des états liés (molécules diatomiques) et des états de diffusion, asymptotiquement libres.

## 2-2 Interactions en onde $s$ loin de résonance

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans une situation "normale" de l'interaction entre deux atomes, c'est-à-dire une longueur de diffusion

$a$  comparable à la portée du potentiel de van der Waals<sup>2</sup>  $b \equiv R_{\text{vdW}}$ . Cette hypothèse vient simplifier notablement le calcul du coefficient  $b_2$ , à la fois en ce qui concerne la contribution des états de diffusion et des états liés [cf. figure 2] :

- Les états libres qui contribuent de façon significative à  $Z_2^{\text{rel}}$  sont tels que  $\hbar^2 k^2/2m \lesssim$  quelques  $k_B T$ , c'est-à-dire  $k \lesssim 1/\lambda$ . Or les énergies thermiques  $k_B T$  des gaz quantiques sont très inférieures à  $E_{\text{vdW}} \equiv \hbar^2/mR_{\text{vdW}}^2$ , qui est de l'ordre de la dizaine de microkelvin, voire plus pour les atomes légers. D'ailleurs, si ce n'était pas le cas, les collisions ne se produiraient pas uniquement en onde  $s$ . On a donc  $a \ll \lambda$ , soit pour tous les vecteurs d'onde  $k$  pertinents la relation  $ka \ll 1$ .
- Le potentiel d'interaction entre deux atomes contient généralement de nombreux états liés, et l'énergie du dernier lié en absence d'une résonance de diffusion est de l'ordre de  $-E_{\text{vdW}}$ . Comme nous venons de le dire, cette énergie de liaison est en valeur absolue grande devant  $k_B T$ . S'il y avait dans le gaz un processus de collision qui établissait un équilibre entre les populations des états libres et celles des états liés, essentiellement tous les atomes se trouveraient sous forme de dimères (ou de trimères, tétramères, etc.). Heureusement, ce n'est pas le cas : la formation de dimères peut se produire, mais c'est un processus marginal à l'échelle de temps des expériences. D'ailleurs, sitôt formés, ces dimères s'échappent généralement du piège confinant les atomes car l'énergie libérée lors de leur formation est supérieure à la profondeur du piège.

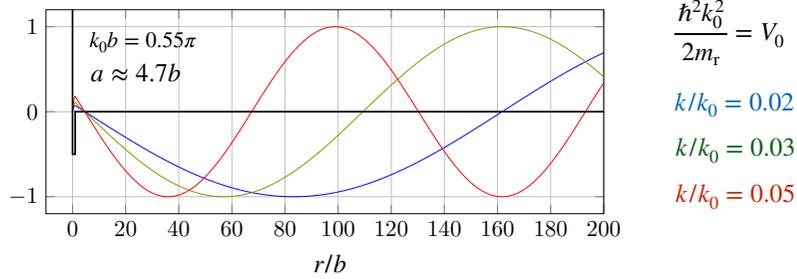
Grâce à ces deux remarques, on limite donc le calcul de  $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$  à la seule contribution des états de diffusion en onde  $s$ , repérés par leur impulsion  $\hbar k$  et leur énergie  $\hbar^2 k^2/2m_r = \hbar^2 k^2/m$ . La seule difficulté est de les dénombrer correctement, sachant que le comportement asymptotique de leur fonction d'onde réduite est pour  $ka \ll 1$  (voir figure 3) :

$$u(r) \approx \sin[k(r - a)]. \quad (38)$$

2. Rappelons que le rayon de van der Waals est défini à partir de la masse d'un atome et du coefficient  $C_6$  décrivant l'interaction de van der Waals par

$$R_{\text{vdW}} = \frac{1}{2} \left( \frac{mC_6}{\hbar^2} \right)^{1/4}. \quad (37)$$

Pour les espèces atomiques utilisées dans les expériences, ce rayon de van der Waals est de l'ordre de quelques nanomètres.



**FIGURE 3.** Etats de diffusion dans un puits carré de profondeur  $V_0$  et de largeur  $b$ , avec un nœud commun aux fonctions d'onde en  $r = a$ .

La présence du terme en  $-ka$  dans le sinus vient en effet modifier leur densité d'états. Supposons que la particule relative est insérée au centre d'une sphère de rayon  $R$ , avec des conditions aux limites de Dirichlet sur les parois de la sphère. Les nombres d'onde  $k$  doivent donc satisfaire la condition de quantification

$$k_n = n \frac{\pi}{R - a}, \quad n \text{ entier positif}, \quad (39)$$

au lieu de  $k_n = n\pi/R$  en absence d'interaction. Le passage d'une somme discrète à une intégrale pour le calcul de  $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$  donne alors :

$$\begin{aligned} Z_{\ell=0}^{\text{rel}} &= \sum_n e^{-\hbar^2 k_n^2 / (mk_B T)} = \frac{R - a}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\hbar^2 k^2 / (mk_B T)} dk \\ &= \frac{R - a}{\sqrt{2} \lambda}. \end{aligned} \quad (40)$$

La contribution en  $R/\lambda$  serait présente même en l'absence d'interactions et elle vient s'ajouter à celle des autres ondes partielles pour donner, tous calculs faits, la fonction de partition  $Z_2$  du gaz parfait quantique. Le terme intéressant ici est celui lié aux interactions, en  $a/\lambda$ . Une fois multiplié par  $Z^{\text{CdM}} = 2^{3/2} Z_1$  [cf. (34)], ce terme conduit à la contribution des interactions à la fonction de partition  $Z_2$  recherchée :

$$\Delta Z_2 = -2Z_1 \frac{a}{\lambda} \quad (41)$$

d'où l'on déduit le deuxième coefficient du viriel

$$\boxed{\text{Bosons hors résonance } (a \ll \lambda) : \quad b_2(T) = \frac{1}{2^{5/2}} - \frac{2a}{\lambda}} \quad (42)$$

avec les deux contributions  $b_2^{(0)} = 2^{-5/2}$  provenant des statistiques quantiques et  $b_2^{(\text{int.})} = -2a/\lambda$  provenant des interactions.

### 2-3 Pression et énergie interne du gaz

Comme nous l'avons expliqué en §1-1, la connaissance du grand potentiel (à un ordre donné en  $z$ ) permet de retrouver les autres fonctions d'état au même ordre. Nous allons utiliser ici le développement du viriel à l'ordre 2 pour retrouver l'expression de l'énergie d'interaction dans le régime faiblement dégénéré.

Nous partons de l'expression de  $\Omega$  :

$$\Omega(T, L^3, \mu) \approx -k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} [z + b_2(T)z^2] \quad (43)$$

dont nous déduisons le nombre de particules moyen

$$N = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{L^3, T} \approx \frac{L^3}{\lambda^3} (z + 2b_2 z^2) \quad (44)$$

et l'entropie :

$$\frac{S}{k_B} = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial (k_B T)} \right)_{L^3, \mu} \approx \frac{L^3}{\lambda^3} \left[ \frac{5}{2} (z + b_2 z^2) - \frac{\mu}{k_B T} (z + 2b_2 z^2) + z^2 T \frac{db_2}{dT} \right]. \quad (45)$$

À cet ordre du calcul, la relation (44) entre nombre de particules et fugacité peut s'inverser pour donner :

$$z \approx n\lambda^3 - 2b_2 (n\lambda^3)^2, \quad (46)$$

ce qui donne à cet ordre pour la relation pression-densité :

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} \approx [n\lambda^3 - 2b_2 (n\lambda^3)^2] + b_2 (n\lambda^3)^2 = n\lambda^3 - b_2 (n\lambda^3)^2. \quad (47)$$

Si on se limite aux corrections liées aux statistiques quantiques,  $b_2(T) = \pm 2^{-5/2}$ , on constate qu'il y a, pour une densité et une température fixées, un abaissement de pression pour les bosons ( $b_2 > 0$ ) et un accroissement pour les fermions ( $b_2 < 0$ ), par rapport au cas d'un gaz parfait classique. Cela se comprend à partir du postulat de (anti)symétrisation. Par exemple, pour des fermions, le fait d'empêcher deux particules d'être présentes au même endroit constitue en quelque sorte une diminution de l'espace accessible, d'où une augmentation de la pression.

Exprimons maintenant l'énergie interne du gaz en fonction de  $T, L^3$  et  $N$  (ou  $n = N/L^3$ ):

$$E = \Omega + TS + \mu N = Nk_B T \left[ \frac{3}{2} + n\lambda^3 \left( T \frac{db_2}{dT} - \frac{3b_2}{2} \right) \right] \quad (48)$$

On retrouve bien entendu le terme dominant  $\frac{3}{2}k_B T$  correspondant à l'énergie cinétique d'un gaz parfait classique. Examinons les corrections à ce modèle classique en passant en revue les deux contributions à  $b_2(T)$  trouvées en (42).

— Le terme lié aux statistiques quantiques,  $b_2^{(0)} = 2^{-5/2}$ , ne dépend pas de la température. Il correspond à un abaissement de l'énergie (pour des bosons) donné par

$$\text{Bosons : } \Delta E^{(0)} = -\frac{3}{2^{7/2}} Nk_B T n\lambda^3. \quad (49)$$

On trouverait la même contribution au signe près pour un gaz de fermions polarisés :

$$\text{Fermions : } \Delta E^{(0)} = +\frac{3}{2^{7/2}} Nk_B T n\lambda^3. \quad (50)$$

On voit bien apparaître ici l'infiniment petit du développement, la densité dans l'espace des phases  $n\lambda^3$ .

— Le terme lié aux interactions, issu de  $b_2^{(\text{int.})} = -2a/\lambda$ , conduit à la modification de l'énergie

$$\text{Bosons : } \Delta E^{(\text{int.})} = gnN \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (51)$$

Ce terme serait absent pour un gaz de fermions polarisés (pas d'interaction en onde  $s$ ).

La forme trouvée pour  $\Delta E^{(\text{int.})}$  est intéressante à au moins deux titres. Tout d'abord, elle permet de vérifier que la longueur de diffusion  $a$  est bien le seul paramètre du potentiel d'interaction  $V(r)$  qui joue un rôle dans le problème à  $N$  corps, au moins dans le régime faiblement dégénéré. Ce résultat important ne nécessite pas que le potentiel  $V(r)$  puisse être traité par l'approximation de Born.

Par ailleurs, le coefficient numérique apparaissant dans (51) est instructif. Dans ce cours, nous serons fréquemment amenés à modéliser le potentiel d'interaction par une interaction de contact (éventuellement régularisée), conduisant à la même longueur de diffusion  $a$  que le potentiel réel. Cela revient à remplacer l'hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint \hat{n}(\mathbf{r}) \hat{n}(\mathbf{r}') V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d^3r d^3r' \quad (52)$$

où  $\hat{n}(\mathbf{r})$  est l'opérateur associé à la densité au point  $\mathbf{r}$ , par

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int [\hat{n}(\mathbf{r})]^2 d^3r \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (53)$$

Pour un système homogène, on attend donc pour la moyenne de l'énergie d'interaction

$$\Delta E^{(\text{int.})} = \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \frac{g}{2} \langle n^2(0) \rangle L^3 \quad (54)$$

ce qui entraîne, par comparaison avec (51), que l'on a dans le régime faiblement dégénéré :

$$\langle n^2(0) \rangle = 2n^2. \quad (55)$$

On retrouve ici l'effet de groupement de type Hanbury-Brown et Twiss, caractéristique d'une statistique de champ classique avec des fluctuations gaussiennes (HANBURY-BROWN & TWISS 1956).

## 2-4 Le voisinage d'une résonance de diffusion

Une résonance de diffusion est caractérisée par une longueur de diffusion  $a$  anormalement grande, c'est-à-dire  $|a| \gg b$  où  $b$  est la portée du potentiel. Au voisinage d'une telle résonance, l'évaluation du coefficient  $b_2$  doit être modifiée.

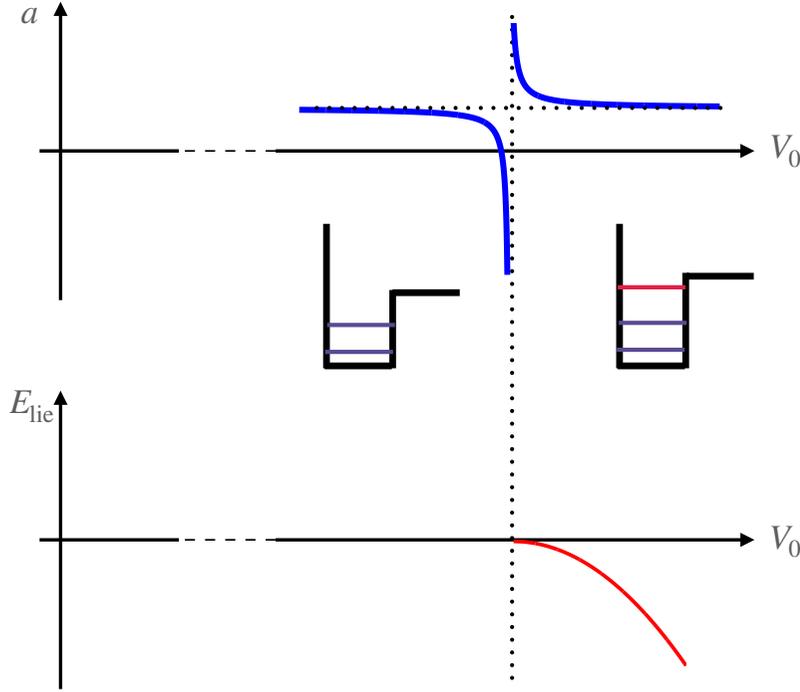


FIGURE 4. Apparition d'un état lié et divergence de la longueur de diffusion  $a$  lors d'une résonance de diffusion.

Rappelons pour commencer la nature de ces résonances, en supposant que l'on peut modifier finement un des paramètres du potentiel d'interaction  $V(r)$  en faisant apparaître un nouvel état lié dans ce potentiel<sup>3</sup>. On a le résultat général suivant, connu sous le nom de théorème de Levinson [cf. figure 4] :

- Juste avant que l'état lié n'apparaisse, la longueur de diffusion est grande et négative.
- Au seuil d'apparition de l'état lié, la longueur de diffusion est infinie.

3. La description qui suit s'applique sans modification au cas d'une résonance de Fano-Feshbach, au moins pour le cas d'une résonance large. Pour une étude dans le cas d'une résonance étroite, on pourra consulter ENDO & CASTIN (2016b)

— Juste après l'apparition de l'état lié, la longueur de diffusion est grande et positive.

Dans ces conditions, il est indispensable de prendre en compte la contribution de cet état faiblement lié à la fonction de partition car sa fonction d'onde est très étendue ( $\sim a$ ) et il peut être significativement peuplé lors de collisions entre atomes. Par ailleurs, son énergie (négative) :

$$E_{\text{lie}} \approx -\frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (56)$$

peut devenir très faible devant  $k_B T$  et une population significative de cet état lié est possible sans que le gaz ne soit entièrement sous forme de dimères.

Par ailleurs, le déphasage  $\delta_0(k)$  varie très vite avec  $k$  et il n'est plus légitime de supposer  $\delta_0(k) \approx -ka$  comme nous l'avons fait en (38). Il faut revenir à l'expression

$$u(r) \approx \sin[kr + \delta_0(k)] \quad (57)$$

où le déphasage se déduit de l'expression générale

$$\tan[\delta_0(k)] = -ka. \quad (58)$$

Comme dans le cas non résonnant, les interactions viennent changer la densité d'états qui intervient dans la sommation sur tous les nombres d'onde possibles. En prenant ici encore des conditions aux limites de Dirichlet dans une boîte sphérique de rayon  $R$ , on a maintenant la condition de quantification sur  $k$  :

$$k_n R + \delta_0(k_n) = n\pi, \quad n \text{ entier positif} \quad (59)$$

de sorte que l'intervalle entre deux valeurs de  $k$  successives vérifie

$$(k_{n+1} - k_n) \left( R + \frac{d\delta_0}{dk} \right) = \pi. \quad (60)$$

On peut alors reprendre le calcul de la fonction de partition  $Z_{\ell=0}^{\text{rel}}$  comme en (40) pour trouver :

$$Z_{\ell=0}^{\text{rel}} = (\dots) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\delta_0}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / mk_B T} dk + \left[ e^{-E_{\text{lie}} / k_B T} \right]. \quad (61)$$

Dans cette expression, le premier terme (...) représente la contribution du rayon de la sphere  $R$  : elle est indépendante des interactions et sera donc omise dans ce qui suit. Par ailleurs, le dernier terme correspond à la contribution de l'éventuel état lié : cette contribution ne doit être prise en compte que du côté  $a > 0$ , puisque cet état n'existe pas tant que  $a$  est négatif ; les crochets autour de ce terme indiquent cette restriction. Dans ce qui suit, on multipliera cette contribution par la fonction de Heaviside  $\Theta(a)$  pour prendre en compte les deux possibilités.

En utilisant l'expression de la fonction de partition pour le centre de masse,  $Z^{\text{CdM}} = 2^{3/2} Z_1$  [cf. (34)], on trouve alors la contribution des interactions au deuxième coefficient du viriel<sup>4</sup> :

$$b_2^{(\text{int})} = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\delta_0}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / m k_B T} dk + 2^{3/2} e^{-E_{\text{lie}} / k_B T} \Theta(a). \quad (63)$$

Calculons explicitement l'intégrale sur  $k$  dans le cas d'une résonance de diffusion. La relation  $\tan[\delta_0(k)] = -ka$  se différencie pour donner :

$$\frac{d\delta_0}{dk} = \frac{-a}{1 + k^2 a^2}. \quad (64)$$

La variation de  $\delta_0(k)$  avec  $k$  est représentée sur la figure 5. Pour  $a < 0$ ,  $\delta_0(k)$  est une fonction croissante qui part de la valeur 0 en  $k = 0$  pour atteindre une valeur proche de  $\pi/2$  quand  $k$  devient supérieur à  $1/a$ . Pour  $a > 0$ ,  $\delta_0(k)$  est une fonction décroissante, qui part de  $\pi$  en  $k = 0$  pour tendre elle aussi vers  $\pi/2$  aux grands  $k$ .

Si on définit la résonance comme la zone où la longueur de diffusion  $|a|$  est beaucoup plus grande que la longueur d'onde thermique  $\lambda$ , on voit que dans ce cas, les variations de l'intégrande de (63) sont dominées par  $\frac{d\delta_0}{dk}$  et on peut prendre  $e^{-\hbar^2 k^2 / m k_B T} \approx 1$  dans cette intégrale. Par ailleurs, l'état lié quand il existe ( $a > 0$ ) a également une contribution très simple à (63) :  $e^{-E_{\text{lie}} / k_B T} \approx 1$ . On trouve donc (HO & MUELLER 2004) :

$$b_2^{(\text{int})} \approx \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-a}{1 + k^2 a^2} dk + 2^{3/2} \Theta(a) \quad (65)$$

4. On retrouve la formule générale de BETH & UHLENBECK (1937)

$$b_2^{(\text{int})} = \frac{2^{3/2}}{\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \int_0^{\infty} \frac{d\delta_{\ell}}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / m k_B T} dk + 2^{3/2} \sum_j e^{-E_j / k_B T} \quad (62)$$

restreinte ici au cas de l'onde  $s$ ,  $\ell = 0$ . La somme discrète sur  $j$  correspond aux états liés.

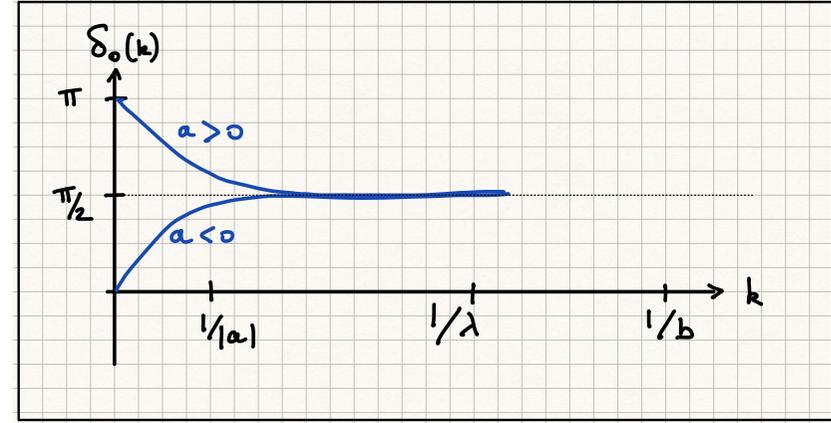


FIGURE 5. Représentation schématique de la variation du déphasage en onde  $s$   $\delta_0(k)$  au voisinage d'une résonance de diffusion ( $|a| \gg \lambda$ ).

c'est-à-dire :

$$a < 0 : \quad b_2^{(\text{int})} \approx \sqrt{2} \quad (\text{pas d'état lié}) \quad (66)$$

et

$$a > 0 : \quad b_2^{(\text{int})} \approx -\sqrt{2} + 2^{3/2} = \sqrt{2}. \quad (67)$$

Le coefficient  $b_2$  lié aux interactions ne présente donc pas de discontinuité au passage à la résonance et il prend en ce point une valeur "universelle", c'est-à-dire indépendante de la température :

$$\text{Bosons à résonance : } \quad b_2^{(\text{int})} = \sqrt{2} \quad (68)$$

Nous retrouverons ce même comportement, à un facteur 2 près, pour le gaz de Fermi à deux composantes dans le régime unitaire. En ajoutant la contribution liée à la statistique, on a donc :

$$\text{Bosons à résonance : } \quad b_2 = \frac{1}{2^{5/2}} + \sqrt{2} \quad (69)$$

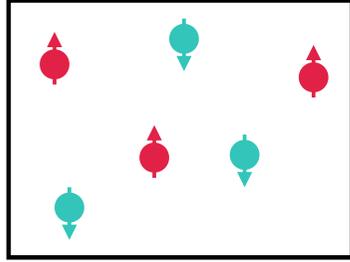


FIGURE 6. Gaz de Fermi à deux composantes, composé d'atomes de spins  $\uparrow$  et  $\downarrow$ .

### 3 Le gaz de Fermi unitaire

Nous nous intéressons dans cette partie à un gaz de particules de spin (ou de pseudo-spin) égal à  $1/2$ , suffisamment froid pour que les interactions soient dans le régime de l'onde  $s$  (figure 6). Ce gaz présente une résonance de diffusion de sorte que l'interaction  $\uparrow\downarrow$  correspond à une longueur de diffusion  $a$  infinie (figure 4). Par ailleurs, on suppose le gaz suffisamment dilué pour que la distance entre particules reste grande devant la portée  $b$  du potentiel (ou sa portée effective  $r_0$ ) de sorte que  $b$  et  $r_0$  n'interviennent pas dans la physique du problème. On parle alors de gaz de Fermi unitaire puisque les interactions atteignent la valeur la plus grande possible, compte tenu de la contrainte imposée par l'unitarité de la physique quantique. Rappelons qu'il n'y a pas d'interaction en onde  $s$  pour une paire  $\uparrow\uparrow$  ou  $\downarrow\downarrow$ , en raison de l'antisymétrie d'échange entre deux fermions.

Ce paradigme du gaz de Fermi unitaire se rencontre dans plusieurs circonstances dans la nature, au moins de manière approchée. On le trouve par exemple dans les étoiles à neutrons : la longueur de diffusion  $a$  est de l'ordre de 18 fm alors que la portée effective  $r_0$  n'est que de 2.8 fm. On peut donc envisager des configurations où la distance entre particules est grande devant  $r_0$  (donc un système dilué), mais petite devant  $a$  (donc une interaction forte). D'autres systèmes physiques s'approchant du régime d'un gaz de Fermi unitaire sont le plasma quark-gluon ou certains supraconducteurs à haute température critique.

Le gaz de Fermi unitaire constitue un système universel dans la mesure où il ne présente aucune échelle de longueur associée aux interactions<sup>5</sup>. C'est donc un banc d'essai remarquable pour les différentes approches des systèmes de particules fortement corrélées. Pour le développement du viriel qui nous intéresse ici, cette invariance d'échelle se traduit par le fait que les coefficients  $b_n$  du développement sont de purs nombres. Nous avons déjà constaté ce point au paragraphe § 2-4 sur le cas de bosons polarisés pour le coefficient  $b_2$ , mais pour le cas du gaz de Fermi unitaire, il est en fait valable pour tous les  $b_n$  comme nous l'expliquerons en § 3-2.

Des efforts considérables ont été fait au cours des 15 dernières années pour aller au delà du coefficient  $b_2$ . On dispose désormais de valeurs théoriques fiables pour  $b_3$  et pour  $b_4$ , validées (au moins dans une certaine mesure) par l'expérience. Nous n'allons pas détailler ici les calculs complexes qui ont menés à ces prédictions, mais simplement esquisser la progression qui s'est faite durant ces dernières années. Le lecteur désireux d'approfondir la question pourra consulter les articles de revues de LIU (2013) et ENDO (2020).

#### 3-1 Développement du viriel pour un gaz spineur

Pour décrire l'équilibre thermodynamique d'un gaz à deux composantes, on est amené à introduire un potentiel chimique pour chacune d'elles, que nous noterons  $\mu_+$  et  $\mu_-$ . Nous supposons ici que les deux composantes ont la même masse et la même énergie pour l'état fondamental à une particule  $k = 0$ . Elles sont à la même température et occupent le même volume  $L^3$  de sorte que la fonction de partition grand-canonique s'écrit maintenant

$$Z_{GC} = \sum_{N_+, N_-} z_+^{N_+} z_-^{N_-} Z_{N_+, N_-}. \quad (70)$$

5. Pour le gaz de Bose unitaire, les effets liés au phénomène d'Efimov (apparition d'une série infinie d'états liés à trois corps quand  $|a| = +\infty$ ) viennent introduire une échelle de longueur spécifique, ce qui brise l'invariance d'échelle. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'article de CASTIN & WERNER (2013) qui explique comment obtenir le coefficient  $b_3$  dans ce cas. Une situation similaire se produit si les deux états de (pseudo-)spin du gaz de Fermi unitaire ont des masses très différentes. Nous supposons ici que les deux masses  $m_\uparrow$  et  $m_\downarrow$  sont égales ; il n'y a donc pas d'effet Efimov, d'où l'universalité annoncée.

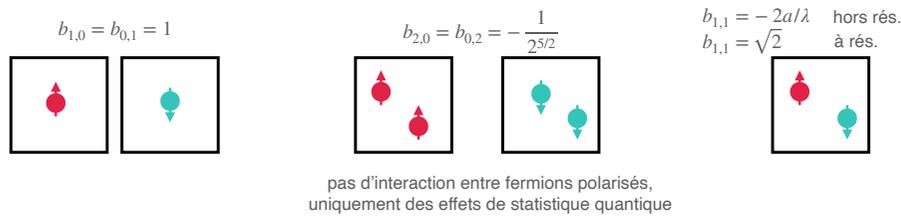


FIGURE 7. Les premiers coefficients du viriel pour un gaz de spin 1/2.

La fonction de partition canonique  $Z_{N_+, N_-}$  décrit un système de  $N_+$  particules dans l'état  $\uparrow$  et  $N_-$  particules dans l'état  $\downarrow$ , le tout à la température  $T$ . La relation entre  $Z_{GC}$  et le grand potentiel est inchangée :

$$\Omega = -k_B T \log Z_{GC}, \quad (71)$$

de sorte qu'on arrive à un développement pour  $\Omega$

$$\Omega = -k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} \sum_{i,j} b_{i,j} z_+^i z_-^j \quad (72)$$

que l'on espère rapidement convergent, au moins aux faibles densités dans l'espace des phases.

La valeur des deux premiers coefficients  $b_{1,0}$  et  $b_{0,1}$  est obtenue en mettant une seule particule ( $\uparrow$  ou  $\downarrow$ ) dans la boîte de volume  $L^3$  et elle est donc inchangée par rapport au cas à une composante (cf. figure 7) :

$$\boxed{b_{1,0} = b_{0,1} = 1} \quad (73)$$

Pour évaluer les termes d'ordre 2, séparons les deux cas possibles :

- Les deux particules sont dans le même état de spin,  $N_+ = 2, N_- = 0$  ou  $N_+ = 0, N_- = 2$ . On est alors ramené au cas déjà étudié précédemment de fermions polarisés, sans interaction dans l'onde  $s$ . Le coefficient du viriel correspondant est dû uniquement aux effets statistiques et on a donc [cf. (32)]

$$\boxed{b_{2,0} = b_{0,2} = -\frac{1}{2^{5/2}}} \quad (74)$$

- Les deux particules sont dans des états de spins opposés  $N_+ = 1, N_- = 1$ . On peut considérer :

- Des états symétriques de spin, donc antisymétriques d'espace (ondes partielles impaires), pour lesquels il n'y aura pas d'interaction en onde  $s$  et une contribution à  $b_{1,1}$  due aux statistiques quantiques en  $-2^{-5/2}$  comme ci-dessus.
- Des états antisymétriques de spin, donc symétriques d'espace (ondes partielles paires). On retrouve alors le même résultat que pour les bosons polarisés [cf. (42) et (68)] avec une contribution due aux statistiques quantiques en  $+2^{-5/2}$  et une contribution due aux interactions égale à  $-2a/\lambda$  hors résonance et à  $\sqrt{2}$  à résonance.

En sommant les contributions de ces deux classes d'états, on arrive donc à

$$\boxed{\text{Hors résonance : } b_{1,1} = -\frac{2a}{\lambda} \quad \text{À résonance : } b_{1,1} = \sqrt{2}} \quad (75)$$

Dans la suite, nous allons considérer un gaz de Fermi équilibré, pour lequel  $z_+ = z_- \equiv z$ . En notant  $n_s = 2$  le nombre d'états de spin, le grand potentiel s'écrit alors à l'ordre 2 inclus en fugacité :

$$\Omega \approx -n_s k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} [z + b_2 z^2] \quad (76)$$

avec le coefficient  $b_2$  "effectif" :

$$b_2 = \frac{1}{2} (b_{2,0} + b_{0,2} + b_{1,1}). \quad (77)$$

On trouve alors hors résonance :

$$\boxed{\text{Gaz de Fermi équilibré hors résonance : } b_2 = -\frac{1}{2^{5/2}} - \frac{a}{\lambda}} \quad (78)$$

et à résonance (HO & MUELLER 2004)

$$\boxed{\text{Gaz de Fermi équilibré à résonance : } b_2 = -\frac{1}{2^{5/2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}} \quad (79)$$

soit un effet des interactions divisé par 2 par rapport au cas bosonique : chaque particule n'interagit qu'avec la moitié des particules restantes, à savoir celles qui ont un spin opposé au sien.

**Énergie interne.** Comme nous l'avons fait dans le cas de bosons polarisés en § 2-3, il est intéressant d'étudier l'expression de l'énergie interne du gaz en fonction des densités  $n_+$  et  $n_-$ . Nous nous plaçons ici dans le cas non-résonant et nous partons du grand potentiel à l'ordre deux inclus

$$\Omega \approx -k_B T \frac{L^3}{\lambda^3} \left[ z_+ + z_- - \frac{1}{2^{5/2}} (z_+^2 + z_-^2) - \frac{2a}{\lambda} z_+ z_- \right]. \quad (80)$$

Le calcul se déroule comme dans le cas bosonique. On commence par évaluer les nombres moyens de particules  $N_{\pm}$  et l'entropie  $S$  en dérivant  $\Omega$  par rapport à  $\mu_{\pm}$  et à  $T$ . On arrive notamment à (HO & MUELLER 2004)

$$z_+ \approx n_+ \lambda^3 + \frac{1}{2^{3/2}} (n_+ \lambda^3)^2 + \frac{2a}{\lambda} (n_+ \lambda^3) (n_- \lambda^3) \quad (81)$$

et un résultat similaire pour  $z_-$ , puis à la contribution des interactions à l'énergie interne :

$$\Delta E^{(\text{int})} = g n_+ n_- L^3 \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi \hbar^2 a}{m}. \quad (82)$$

Ce résultat correspond bien à celui attendu pour une interaction de contact entre les deux composantes :

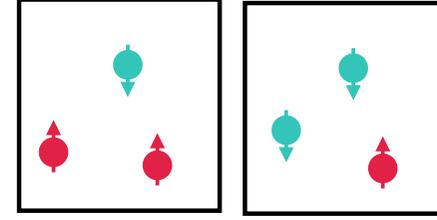
$$\hat{H}_{\text{int}} = g \int \hat{n}_+(\mathbf{r}) \hat{n}_-(\mathbf{r}) d^3r, \quad (83)$$

avec des fluctuations non corrélées des densités spatiales des deux composantes.

### 3-2 Le coefficient $b_3$

Le calcul du coefficient  $b_3$  (et des suivants) est notoirement plus difficile puisqu'il implique la résolution du problème à (au moins) trois corps, avec la détermination de toutes ses énergies propres (figure 8). Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur le cas résonant ( $|a| = +\infty$ ) qui est la situation la plus discriminante en ce qui concerne la validité des différentes approches possibles.

Du fait de l'invariance d'échelle qui apparaît dans le régime unitaire, le coefficient  $b_3(T)$  – ainsi que tous les autres coefficients du viriel – ne peut



**FIGURE 8.** Les deux situations à prendre en compte pour le calcul du coefficient  $b_3$ . Ces deux situations conduisent à des résultats identiques si  $m_{\uparrow} = m_{\downarrow}$ .

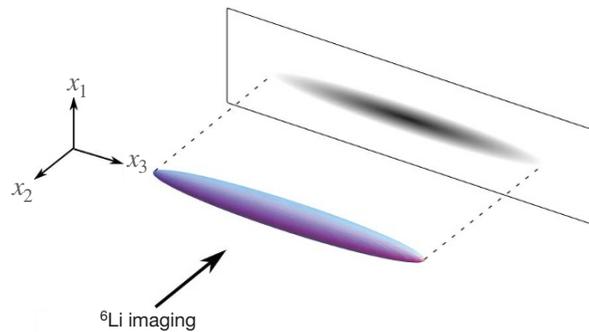
être qu'un pur nombre. En effet,  $b_n(T)$  est par construction une fonction de la température seulement, et pas du potentiel chimique  $\mu$ . Par ailleurs, il est sans dimension et la température ne peut donc y intervenir que de manière adimensionnée. Quand la longueur de diffusion n'est pas infinie, elle fournit l'échelle d'énergie  $E_a = \hbar^2/ma^2$  et on peut donc trouver  $b_n(T)$  comme fonction de la variable  $x = k_B T/E_a$ . C'est bien ce qui s'est produit quand nous sommes arrivés au résultat  $b_2^{(\text{int})} = -2a/\lambda$  dans le cas non résonant. En revanche, dans le cas résonant, la seule quantité sans dimension possible qui permettrait de "faire varier"  $b_n(T)$  est  $k_B T/\mu$ , mais elle n'est pas éligible puisqu'elle dépend de  $\mu$ . Les coefficients  $b_n(T)$  sont donc des nombres indépendants de  $T$  dans le régime unitaire.

Le calcul de ce coefficient  $b_3$  dans le régime unitaire n'a été fait qu'assez récemment, avec au départ des résultats contradictoires. Le premier résultat publié (RUPAK 2007),  $b_3 \approx 1.11$ , dont on sait désormais qu'il est incorrect, utilisait une approche "théorie des champs". Deux ans plus tard, LIU, HU et al. (2009) ont publié la valeur considérée désormais comme correcte et confirmée par l'expérience

Gaz de Fermi équilibré à résonance :  $b_3 = \frac{1}{3^{5/2}} - 0.3551\dots = -0.2910\dots$

(84)

Ils se sont appuyés sur un travail précédent de WERNER & CASTIN (2006), qui avaient réussi à calculer quasi-analytiquement le spectre entier de trois particules identiques dans un piège harmonique isotrope, pour une interaction de portée nulle et résonante. LIU, HU et al. (2009) ont alors calculé la fonction de partition à trois corps dans un piège de fréquence  $\omega$  et ils en ont



**FIGURE 9.** Imagerie d'un gaz de Fermi unitaire de lithium 6. La longueur du gaz piégé selon la direction  $x_3$  est de quelques centaines de micromètres. Figure extraite de NASCIMBÈNE, NAVON *et al.* (2010).

déduit le coefficient  $b_{3,\text{trap}}$  correspondant. Le retour vers un gaz homogène s'est fait via une approximation de densité locale qui devient exacte dans la limite  $\omega \rightarrow 0$  et qui conduit à :

$$b_n = n^{3/2} b_{n,\text{trap}} \quad (85)$$

Le résultat de LIU, HU *et al.* (2009) a ensuite été confirmé théoriquement par plusieurs auteurs, soit à partir des méthodes utilisant la théorie des champs (KAPLAN & SUN 2011; LEYRONAS 2011), soit par une solution numérique du problème à trois corps (RAKSHIT, DAILY *et al.* 2012). Comme nous allons le voir dans le paragraphe qui suit, ce résultat est également en excellent accord avec l'expérience.

### 3-3 Résultats expérimentaux

La première mesure de la thermodynamique du gaz de Fermi dans le régime unitaire a été menée en 2009-10 dans le groupe de Christophe Salomon et Frédéric Chevy à l'ENS (NASCIMBÈNE, NAVON *et al.* 2010). L'expérience est menée sur une assemblée d'environ  $10^5$  atomes de  ${}^6\text{Li}$ , placés dans un champ magnétique  $B = 834 \text{ G}$  (centre d'une résonance de Fano-Feshbach large) et préparés dans un mélange équilibré des deux états Zee-

man de plus basse énergie. On réalise ainsi un système de pseudospin 1/2. La gamme de température explorée va de 150 nK à 1.3  $\mu\text{K}$ . Les atomes sont confinés dans un piège harmonique allongé dans la direction  $x_3$  (cf. figure 9), avec le potentiel :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}m\omega_3^2x_3^2. \quad (86)$$

On mesure *in situ* la densité totale du gaz,  $\bar{n}(x_3) = \bar{n}_+(x_3) + \bar{n}_-(x_3)$ , intégrée les long des axes  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\bar{n}(x_3) = \iint n(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2. \quad (87)$$

L'intégration le long de l'axe d'imagerie  $x_2$  résulte naturellement de la procédure d'imagerie, et celle le long de l'axe  $x_1$  est faite numériquement à partir des images à deux dimensions dans le plan  $(x_1, x_3)$ . Cette mesure permet de remonter à la pression du gaz  $P(\mu, T)$  grâce à une remarque ingénieuse publiée par HO & ZHOU (2010), et établie indépendamment par Sylvain Nascimbene :

- On utilise la relation entre densité et pression, déduite des relations thermodynamiques déjà mentionnées :

$$n_+ = \left( \frac{\partial P}{\partial \mu_+} \right)_{T, \mu_-} \quad (88)$$

et idem pour  $n_-$ . Ici, comme le gaz est équilibré, on prendra  $\mu_+ = \mu_-$  et donc

$$n = \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T. \quad (89)$$

- On suppose que le gaz est suffisamment étendu pour être bien décrit par l'approximation de densité locale, c'est-à-dire que l'état d'équilibre en un point  $\mathbf{x}$  est celui d'un gaz homogène de potentiel chimique  $\mu(\mathbf{x}) = \mu_c - V(\mathbf{x})$ , où  $\mu_c$  est le potentiel chimique au centre du piège ( $\mathbf{x} = 0$  avec par convention  $V(0) = 0$ ).

6. Nous notons ici les trois coordonnées d'espace  $x_1, x_2, x_3$  plutôt que  $x, y, z$  pour éviter toute confusion avec la fugacité  $z$ .

— On transforme alors l'intégrale sur l'espace de (87) en une intégrale sur le potentiel chimique :

$$\bar{n}(x_3) = 2\pi \int_0^\infty n(r, x_3) r dr = \frac{2\pi}{m\omega^2} \int_{-\infty}^{\mu(x_3)} \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T d\mu = \frac{2\pi}{m\omega^2} P[T, \mu(x_3)]. \quad (90)$$

On a donc directement accès à la pression attendue pour un gaz homogène de paramètres  $[T, \mu(x_3) = \mu_c - m\omega_3^2 x_3^2/2]$ . Compte tenu de l'invariance d'échelle, cette quantité n'est en fait fonction que de  $\mu(x_3)/k_B T$  de sorte qu'une seule image suffit en principe pour obtenir toute l'équation d'état depuis  $z = 0$  (sur les bords du piège où  $\mu \rightarrow -\infty$ ) jusqu'à  $z = \exp(\mu_c/k_B T)$ .

La température du gaz est quant à elle mesurée en insérant des impuretés de faible densité (quelques milliers d'atomes de lithium 7) et en mesurant leur distribution en vitesse par une méthode de temps de vol (SPIEGELHALDER, TRENKWALDER et al. 2009a).

Un exemple de résultat est montré sur la figure 10, extraite de la thèse de Sylvain Nascimbène. On y trace les variations de la pression, normalisée par la pression du gaz parfait de fermions,  $h(z) = P(z)/P_{\text{ideal}}(z)$ , en fonction de la variable  $\zeta = 1/z$ . Le domaine d'applicabilité du développement du viriel ( $z \lesssim 1$ ) correspond donc à la zone  $\zeta \gtrsim 1$ . On a représenté un ajustement des données avec un polynôme de degré 4 :

$$h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4, \quad (91)$$

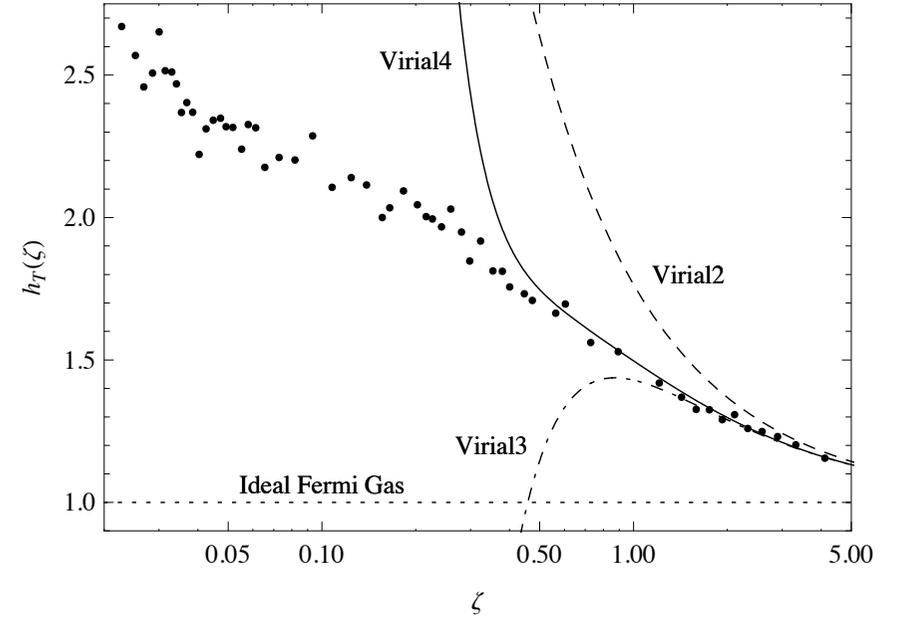
les trois premiers coefficients étant fixés à leurs valeurs connues à l'époque :

$$b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \quad b_3 = -0.2910. \quad (92)$$

On déduit alors de cet ajustement une valeur de  $b_4$  :  $b_4 = 0.065$  (15).

La vérification de la valeur de  $b_3$  est détaillée sur la figure 11. On y montre à gauche l'écart de la pression (en unité de  $P_{\text{ideal}}$ ) à la loi  $z + b_2 z^2$ , en fonction de  $z^3$ . L'ajustement par une fonction  $b_3 z^3$  dépend de la valeur  $z_{\text{cutoff}}$  utilisée. Le rectangle gris indique les valeurs de  $b_3$  compatibles avec les données.

Deux ans plus tard, une nouvelle série de données a été publiée par le groupe de Martin Zwierlein au MIT, également à partir d'un gaz de lithium



**FIGURE 10.** Mesure expérimentale de la pression  $P$  d'un gaz de Fermi dans le régime unitaire par le groupe de l'ENS [cf. NASCIBÈNE, NAVON et al. (2010)]. On a tracé ici  $h = P/P_{\text{ideal}}$  en fonction de l'inverse de la fugacité  $\zeta = 1/z$ . La zone des petites fugacités (grand  $\zeta$ ) est ajustée par un polynôme de degré 4 en  $z$ . Le résultat de cet ajustement conduit à  $b_4 = -4^{-5/2} + 0.096 = 0.065$ . Figure extraite de la thèse de Sylvain Nascimbène.

6 (KU, SOMMER et al. 2012). Nous ne rentrerons pas ici dans la description détaillée de cette expérience, dont nous donnons un des principaux résultats en figure 12. Dans la zone qui nous intéresse ici,  $z \lesssim 1$ , l'accord avec les données de l'ENS est excellent et conduit à une valeur compatible pour  $b_4$  :  $b_4 = 0.065$  (10).

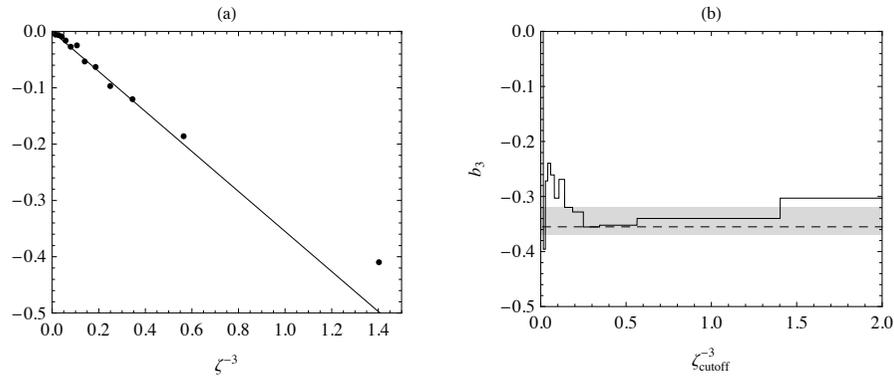


FIGURE 11. Détermination de  $b_3$  (voir texte). Figure extraite de la thèse de Sylvain Nascimbène.

### 3-4 Au delà des effets à trois corps

Une fois la valeur pour  $b_4$  déduite des deux expériences que nous venons de décrire, la balle était dans le camp des théoriciens pour affiner les calculs de cette quantité. Le défi est bien sûr considérable puisqu'il s'agit de déterminer le spectre exact de 4 fermions en interaction avec deux configurations de nature différente,  $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$  et  $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$  (ou son symétrique).

Le bilan de cette série de travaux est décrit par ENDO (2020) :

- Au moment où l'article expérimental du MIT a été publié, une seule prédiction était disponible :  $b_4 = -0.047(4)$ , en désaccord manifeste avec l'expérience (RAKSHIT, DAILY et al. 2012). Ce travail utilisait la méthode variationnelle pour trouver l'énergie des particules dans un piège et extrapolait ensuite les résultats vers la raideur nulle, correspondant au gaz homogène.
- NGAMPRUETIKORN, PARISH et al. (2015) ont utilisé une méthode de théorie des champs dans le cas homogène pour arriver à  $b_4 \approx 0.03$ .
- ENDO & CASTIN (2016a) ont utilisé un ansatz de Fadeev, inspiré de la résolution du problème à trois corps, pour traiter quasi-analytiquement le cas de particules piégées. Au prix d'une conjecture<sup>7</sup>

7. Le calcul passe par l'intégration dans le plan complexe d'une fonction dont les proprié-

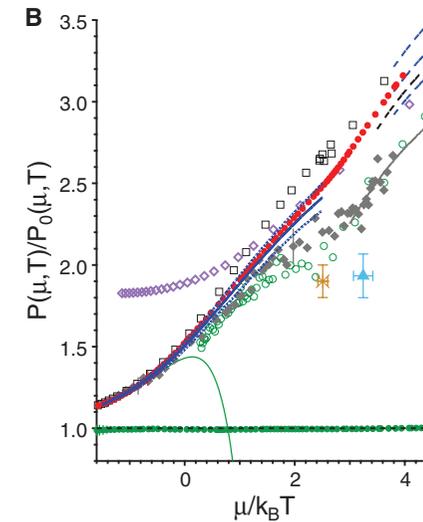
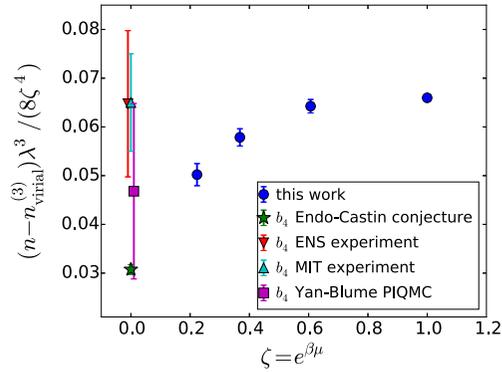


FIGURE 12. Pression d'un gaz de Fermi de lithium 6 dans le régime unitaire, normalisée par la pression du gaz parfait de Fermi. Points rouges : données du groupe du MIT (KU, SOMMER et al. 2012), losanges gris : données du groupe de l'ENS (NASCIMBÈNE, NAVON et al. 2010). Le développement du viriel à l'ordre 4 avec les paramètres donnés en (92) et  $b_4 = 0.065$  est représenté par la ligne continue verte. Les autres points ou lignes correspondent à des prédictions théoriques dans le régime dégénéré, non décrites dans ce chapitre. Figure extraite de KU, SOMMER et al. (2012).

(non encore prouvée à notre connaissance), ils sont arrivés à une valeur précise de  $b_4$  :  $b_4 = 0.031(1)$ .

- YAN & BLUME (2016) ont utilisé une méthode Monte-Carlo basée sur l'intégrale de chemin pour calculer numériquement le spectre de l'hamiltonien à quatre particules piégées, puis procédé à une extrapolation à raideur nulle pour trouver la valeur de  $b_4$  dans le cas homogène :  $b_4 = 0.047(18)$ .
- HOU & DRUT (2020) [voir aussi HOU, MORRELL et al. 2021] ont développé une méthode partiellement analytique pour évaluer les poids

tés analytiques ne sont pas complètement connues. La conjecture en question est nécessaire pour pouvoir appliquer malgré tout le théorème des résidus.



**FIGURE 13.** Calcul de la densité d'un gaz de Fermi unitaire en fonction de sa fugacité. Le calcul est fait par sommation d'une série de diagrammes de Feynman, associée à une méthode de Monte Carlo diagrammatique allant jusqu'à l'ordre 9. Figure extraite de ROSSI, OHGOE et al. (2018).

de Boltzmann intervenant dans la fonction de partition, en utilisant une décomposition de Trotter (alternance d'évolutions due à l'énergie cinétique et à l'énergie d'interaction). Ils ont confirmé le résultat (93) de ENDO & CASTIN (2016a), tout en remarquant que le résultat pour  $b_4$  de NGAMPRUETIKORN, PARISH et al. (2015), même s'il est globalement compatible avec (93), correspond des valeurs notablement différentes pour chacune des deux composantes  $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$  et  $\uparrow\uparrow\downarrow$ . En revanche, ces composantes individuelles ont des valeurs compatibles dans les deux approches de ENDO & CASTIN (2016a) et de HOU & DRUT (2020). Nous retiendrons donc la valeur :

$$\text{Gaz de Fermi équilibré à résonance : } b_4 = -\frac{1}{4^{5/2}} + 0.062 = 0.031 \quad (1)$$

Notons que cette valeur est significativement différente de celle trouvée expérimentalement ( $b_4 = 0.065$ , cf. figure 10). Signalons également que HOU & DRUT (2020) proposent une valeur pour  $b_5$  :  $b_5 = 5^{-5/2} + 0.78 = 0.80$  (6).

La détermination de  $b_4$  est donc clairement un problème difficile, et ENDO (2020) donne au moins une raison de cette difficulté sur le plan théo-

rique : quand ce coefficient est d'abord calculé dans un piège de fréquence  $\omega$ , le comportement de  $b_4(\omega)$  n'est pas monotone ce qui rend très délicat le passage numérique à la limite  $\omega \rightarrow 0$  utilisé par plusieurs auteurs. Sur le plan expérimental, une difficulté potentielle est illustrée sur la figure 13, extraite de ROSSI, OHGOE et al. (2018). Cette figure montre l'écart entre la densité calculée par une méthode de resommation de diagrammes de Feynman et la densité  $n^{(3)}$  calculée par le développement du viriel à l'ordre 3. On y voit un plateau apparent pour des valeurs de la fugacité entre 0.6 et 1.1. Une extrapolation de ce plateau à fugacité nulle redonne la valeur proposée par les expérimentateurs. Mais les données obtenues pour des valeurs encore plus petites de la fugacité semblent plutôt compatibles avec la valeur  $b_4 = 0.031$  donnée par ENDO & CASTIN (2016a).



## Chapitre II

# L'approche de Bogoliubov quantique

Nous abordons dans ce chapitre la description d'une méthode puissante pour traiter le cas d'un gaz de Bose en interaction, l'approche de Bogoliubov<sup>1</sup> (BOGOLIUBOV 1947). Cette approche permet de décrire l'état fondamental du gaz ainsi que son spectre d'excitation à basse énergie, moyennant un certain nombre d'approximations que nous allons détailler dans les cours qui suivent. Cette méthode part d'un potentiel binaire d'interaction entre les particules

$$\hat{V} = \sum_{i < j} V(\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j), \quad (1)$$

et est fondée sur l'hypothèse que l'action de ce potentiel "ne modifie pas beaucoup" – en un sens que nous allons préciser – l'état fondamental du fluide par rapport au cas du gaz parfait.

La méthode de Bogoliubov, même si elle est un outil communément utilisé, comporte certaines subtilités que nous soulignerons dans les chapitres qui suivent. Une partie de ces subtilités provient du fait qu'il est difficile d'utiliser la méthode de Bogoliubov avec le potentiel interatomique réel. Pour toutes les espèces atomiques utilisées au laboratoire, ce potentiel contient en effet de nombreux états liés à deux particules. Le véritable état fondamental du système est donc très différent du condensat de Bose-Einstein formé à partir du gaz monoatomique trouvé dans le cas sans inter-

1. Nous avons déjà abordé cette méthode dans le cadre d'une description en termes de champs classiques dans le cours 2015-16, mais l'aspect quantique du traitement vient changer très notablement la démarche, même si certains résultats sont similaires.

action, et également très éloigné du fluide préparé, dans un état métastable, dans les expériences d'atomes froids.

On utilise fréquemment la méthode de Bogoliubov avec un potentiel de contact  $V(\mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r})$ , donc de portée  $b$  nulle. Le couplage  $g$  est alors défini à partir de la longueur de diffusion  $a$  du problème physique par :

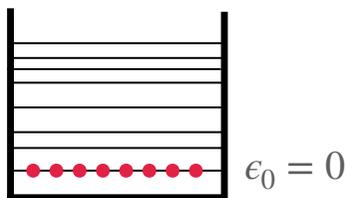
$$g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (2)$$

Toutefois, on sait (*cf.* cours 2020-21) qu'un tel potentiel conduit à des divergences dès l'ordre 2 de la série de Born. *A fortiori*, il ne permet pas de décrire de "manière sécurisée" l'interaction entre  $N$  particules. Certaines expressions, comme la vitesse du son ou la déplétion quantique, peuvent être calculées sans difficulté alors que d'autres, comme l'énergie de l'état fondamental, divergent. Pour une version mathématiquement bien établie d'un potentiel de portée nulle, on peut utiliser<sup>2</sup> le pseudo-potentiel  $\hat{V}_{pp}$ , défini par son action sur une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  par :

$$\hat{V}_{pp}[\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r \psi(\mathbf{r})]. \quad (3)$$

C'est l'approche suivie dans l'article initial de LEE, HUANG et al. (1957), mais les calculs sont alors relativement subtils. En effet, comme nous l'avons expliqué dans le cours 2020-21, l'utilisation du pseudo-potentiel

2. Voir OLSHANII & PRICOUPEKNO (2001) pour une classe générale de potentiels de ce type.



**FIGURE 1.** État fondamental du gaz de Bose sans interaction : toutes les particules s'accumulent dans l'état d'impulsion et d'énergie nulles (pour des conditions aux limites périodiques) et  $N_0 = N$ .

revient à changer le domaine de l'hamiltonien. Quand on utilise  $\hat{V}_{pp}$ , une fonction d'onde à deux corps  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  quelconque ne doit pas être régulière quand  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0$ , mais doit varier comme

$$r \rightarrow 0 : \quad \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \Phi(\mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2. \quad (4)$$

Nous décrivons l'esprit de cette démarche dans le chapitre 3.

L'approche que nous allons explorer ici consiste à utiliser un potentiel  $V(\mathbf{r})$  régulier, de portée  $b$ , dont la transformée de Fourier  $\tilde{V}_{\mathbf{k}}$  est également régulière pour tout  $\mathbf{k}$  :

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}} = \int V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r. \quad (5)$$

Nous supposons que l'action de ce potentiel à deux corps peut être décrit dans le cadre de l'approximation de Born. Pour le régime de basse énergie qui nous intéresse ici, cela entraîne en particulier le lien suivant entre la transformée de Fourier à impulsion nulle,  $\tilde{V}_0$ , et le couplage  $g$  défini en (2) :

$$\text{approx. de Born :} \quad \tilde{V}_0 = \int V(\mathbf{r}) d^3r \approx g. \quad (6)$$

Rappelons qu'une condition de validité de l'approximation de Born est que la longueur de diffusion déduite de (6) soit petite devant la portée  $b$  du potentiel  $V(\mathbf{r})$ .

Dans un gaz de Bose sans interaction, l'état fondamental est obtenu en plaçant les  $N$  particules dans l'état fondamental  $\mathbf{k} = 0$  (figure 1). En d'autre

termes, la population  $N_0$  de cet état  $\mathbf{k} = 0$  est égale à  $N$ . Dans ce qui suit, nous allons commencer (§1) par utiliser le fait que le potentiel peut être traité comme une faible perturbation pour effectuer un développement systématique de l'hamiltonien à  $N$  corps, en supposant que la population moyenne  $\langle N_0 \rangle$  de l'état  $\mathbf{k} = 0$  reste très majoritaire :

$$\frac{N - \langle N_0 \rangle}{N} \ll 1. \quad (7)$$

Cela va nous permettre d'obtenir une expression approchée de l'hamiltonien ne contenant que des termes quadratiques en  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  et  $a_{\mathbf{k}}$ , opérateurs création et destruction d'une particule dans l'état d'impulsion  $\hbar\mathbf{k} \neq 0$ . Plus précisément, la structure de l'hamiltonien fera apparaître une somme de termes indépendants, portant chacun sur une paire  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ . En §2, nous allons nous concentrer sur une paire donnée pour détailler la méthode de Bogoliubov, qui utilise une transformation canonique pour diagonaliser cet hamiltonien de paires. Enfin en §3, nous illustrerons cette méthode de diagonalisation sur le cas d'un gaz spinoir à l'approximation du mode spatial unique.

Le retour vers un nombre infini de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ , avec les problèmes de convergence qui peuvent alors se poser, sera abordé au chapitre 3, tout comme la discussion de la validité du développement en puissances de  $(N - \langle N_0 \rangle)/N$  dont nous verrons qu'elle revient à imposer  $\sqrt{na^3} \ll 1$ .

## 1 L'approximation quadratique pour $\hat{H}$

Nous considérons ici une assemblée de particules avec des interactions binaires. L'hamiltonien écrit dans le formalisme de la seconde quantification sur la base des ondes planes fait alors intervenir des produits de quatre opérateurs de création ou d'annihilation  $a_{\mathbf{k}}$  ou  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  (cf. appendice). Sous cette forme, il n'est pas possible de trouver analytiquement les états propres et les énergies propres du système. La méthode de Bogoliubov consiste à supposer qu'un mode particulier, en l'occurrence l'onde plane d'impulsion nulle  $\mathbf{k} = 0$ , est macroscopiquement peuplé. Dans ces conditions, on peut négliger le caractère opératoire de  $a_0$  et  $a_0^\dagger$ , puis se limiter aux termes ne faisant intervenir que des produits binaires des autres opé-

rateurs  $a_k$  et  $a_k^\dagger$  avec  $\mathbf{k} \neq 0$ . L'étude mathématique de l'hamiltonien quadratique résultant ne pose alors pas de difficultés, comme nous le verrons dans les sections suivantes.

Nous ferons dans ce qui suit l'hypothèse que  $V(\mathbf{r})$  est invariant par rotation,  $V(\mathbf{r}) = V(r)$ , avec  $r = |\mathbf{r}|$ . Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais simplifiera notablement les notations. Il s'ensuit que la transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$  est également invariante par rotation :  $\tilde{V}_k = \tilde{V}_k$ .

### 1-1 Préliminaire : terme de Hartree, terme de Fock

Commençons par considérer le cas de deux particules identiques, préparées dans des états d'impulsion bien définie  $\hbar\mathbf{k}_a, \hbar\mathbf{k}_b$ , avec  $\mathbf{k}_a \neq \mathbf{k}_b$ . Supposons ces particules polarisées en spin de sorte que le degré de liberté correspondant ne joue pas de rôle ici. Nous nous intéressons à la moyenne d'un potentiel  $V(|\mathbf{r}_{12}|)$ , ne dépendant que de la distance  $r_{12}$  entre les deux particules.

L'état à deux particules s'écrit

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b\rangle \pm |1 : \mathbf{k}_b, 2 : \mathbf{k}_a\rangle) \quad (8)$$

où les signes + et - sont associés respectivement aux bosons et aux fermions. La valeur moyenne de  $\hat{V}$  dans cet état est une somme de quatre termes

$$\langle V \rangle = \langle \Psi | \hat{V} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle \pm \langle 1 : \mathbf{k}_b, 2 : \mathbf{k}_a | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle + \dots \right) \quad (9)$$

En utilisant la définition de l'onde plane d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  dans un volume de quantification  $L^3$  avec des conditions aux limites périodiques :

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3, \quad (10)$$

les deux termes écrits explicitement dans cette équation se calculent pour donner

$$\langle 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle = \frac{1}{L^3} \tilde{V}_0 \quad (11)$$

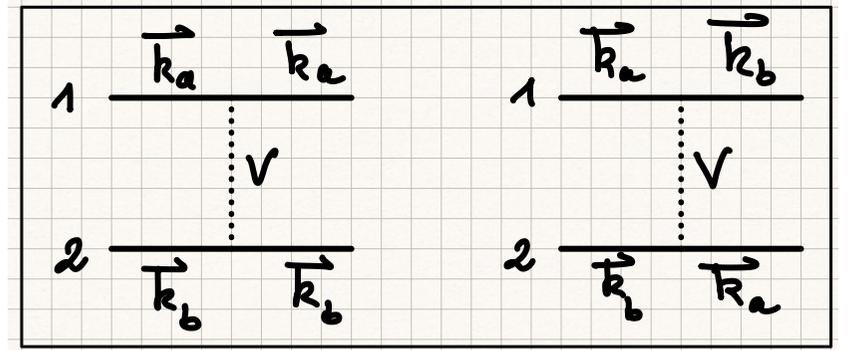


FIGURE 2. Terme de Hartree et terme de Fock intervenant dans le calcul de la valeur moyenne  $\langle \Psi | \hat{V} | \Psi \rangle$  d'un état à deux particules, avec les deux ondes planes  $\mathbf{k}_a$  et  $\mathbf{k}_b$  occupées [cf. (13)].

et

$$\langle 1 : \mathbf{k}_b, 2 : \mathbf{k}_a | \hat{V} | 1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b \rangle = \frac{1}{L^3} \tilde{V}_{\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b}. \quad (12)$$

Les deux autres termes intervenant dans (9) et représentés par "..." sont égaux aux deux termes donnés ci-dessus, de sorte que la moyenne recherchée s'écrit :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{L^3} (\tilde{V}_0 \pm \tilde{V}_k) \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b \quad (13)$$

Il y a donc deux contributions à  $\langle V \rangle$ , la première est appelée *terme de Hartree*, la seconde *terme de Fock* (figure 2).

La structure de ce résultat est caractéristique d'un problème de particules indiscernables en mécanique quantique. Si les particules étaient discernables, l'état de départ s'écrirait

$$\text{Particules discernables : } |\Psi\rangle = |1 : \mathbf{k}_a, 2 : \mathbf{k}_b\rangle \quad (14)$$

et seule la première contribution à (13), le terme de Hartree encore appelé *terme direct*, serait présent dans la moyenne de  $\langle V \rangle$ . Le terme de Fock, également appelé *terme d'échange*, trouve son origine dans l'impossibilité fondamentale de savoir si la paire de particules (1, 2) est dans l'état  $(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$  ou  $(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$ .

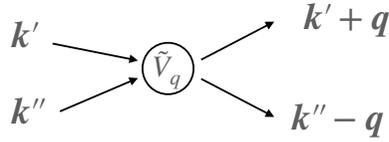


FIGURE 3. Représentation du terme d'interaction de (16), pour lequel la conservation de l'impulsion totale apparaît explicitement.

Notons que dans le cas d'une paire de bosons préparés dans le même état d'impulsion  $\hbar k_a$ , l'état initial est  $|\Psi\rangle = |1 : k_a, 2 : k_a\rangle$  et le terme d'échange disparaît également du résultat (13).

## 1-2 Hamiltonien à $N$ corps en seconde quantification

Nous considérons maintenant une assemblée de  $N$  bosons (sans spin ou polarisés) avec des interactions à deux corps décrites par le potentiel  $V(r)$ . L'hamiltonien s'écrit en première quantification pour des particules de masse  $m$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\hat{r}_i - \hat{r}_j|) \quad (15)$$

et on peut montrer avec les définitions rappelées dans l'appendice de ce chapitre que sa version en seconde quantification est<sup>3</sup>

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{q}} \tilde{V}_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}''-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}'}. \quad (16)$$

où l'on a introduit l'énergie cinétique à une particule associée à l'onde plane  $\mathbf{k}$

$$\epsilon_{\mathbf{k}} \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (17)$$

Une représentation diagrammatique du terme d'interaction est donnée en figure 3.

3. Pour alléger les notations, nous ne mettrons pas de  $\hat{\phantom{a}}$  au dessus des symboles  $a_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  bien qu'il s'agisse d'opérateurs.

En particulier, on peut vérifier que l'on retrouve bien les termes de Hartree et de Fock quand on calcule la valeur moyenne du terme d'interaction dans l'état  $|\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b\rangle$ . Il y a en effet 4 triplets  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$  qui contribuent dans la somme intervenant dans (16) :

- Le choix  $\mathbf{q} = 0$  avec les deux possibilités  $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$  et  $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$  : on retrouve le terme de Hartree de (13).
- Le choix  $\mathbf{q} = \mathbf{k}'' - \mathbf{k}'$  avec les deux possibilités  $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b)$  et  $(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = (\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a)$  : on retrouve le terme de Fock de (13).

## 1-3 Les hypothèses de l'approche de Bogoliubov

L'expression (16) de l'hamiltonien est valable quel que soit le régime du gaz, faiblement ou fortement dégénéré. Nous allons maintenant supposer qu'un état particulier du gaz, l'état d'impulsion nulle  $\mathbf{k} = 0$ , est fortement peuplé :

$$\langle N_0 \rangle \gg 1. \quad (18)$$

Un argument introduit<sup>4</sup> par BOGOLIUBOV (1947) et repris dans pratiquement toutes les approches à ce problème consiste à poser que dans ces conditions, la différence entre le préfacteur  $\sqrt{N_0}$  intervenant pour  $a_0$  et le préfacteur  $\sqrt{N_0 + 1}$  intervenant dans  $a_0^\dagger$  ne doit pas jouer de rôle significatif. On peut alors négliger le fait que le commutateur entre  $a_0$  et  $a_0^\dagger$  est non nul, et remplacer ces opérateurs par  $\sqrt{N_0}$ .

Cette approche consiste donc (à une subtilité près pour le point de vue canonique, voir paragraphe suivant §1-4) à traiter le condensat de particules dans l'état  $\mathbf{k} = 0$  comme un champ classique. Ce champ sera capable de générer ou d'absorber en nombre arbitraire des particules provenant des autres états d'impulsion  $\mathbf{k} \neq 0$ .

Faisons de plus l'hypothèse que le nombre de particules en dehors du mode  $\mathbf{k} = 0$  est petit devant  $N$  :

$$N - \langle N_0 \rangle \ll N. \quad (19)$$

On peut alors tronquer l'hamiltonien (16) pour ne garder dans le terme d'interaction que les termes au moins linéaires en  $N_0$ , c'est-à-dire les

4. Bogoliubov cite le livre de Dirac, *The Principles of Quantum mechanics*, comme une source d'inspiration pour cet argument.

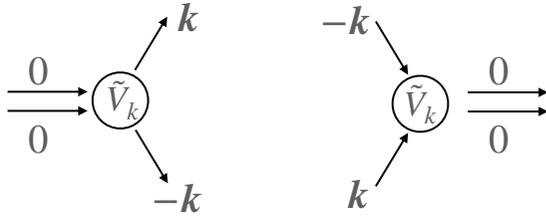


FIGURE 4. Création et annihilation d'une paire  $\{+k, -k\}$  apparaissant dans la seconde ligne de (20).

termes  $a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}$  faisant intervenir au moins deux opérateurs  $a_0$  ou  $a_0^\dagger$ . On arrive alors à un hamiltonien approché  $\hat{H}'$  quadratique vis-à-vis des  $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$  avec  $\mathbf{k} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \frac{N_0^2}{2L^3} \tilde{V}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[ \epsilon_{\mathbf{k}} + n_0 \tilde{V}_0 + n_0 \tilde{V}_{\mathbf{k}} \right] a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} n_0 \tilde{V}_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

où l'on a introduit la densité spatiale dans le mode condensé  $n_0 = N_0/L^3$ .

La première ligne de cette expression fait apparaître tout d'abord l'énergie des particules occupant le mode  $\mathbf{k} = 0$  en interaction les unes avec les autres (pas de terme de Fock puisqu'elles sont toutes dans le même état), puis une première contribution des particules non condensées, avec leur énergie cinétique  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  et les termes de Hartree et de Fock en  $\tilde{V}_0$  et  $\tilde{V}_{\mathbf{k}}$ . Sur la seconde ligne, on voit apparaître le fait que l'interaction va induire en plus des corrélations entre les modes  $\mathbf{k}$  et  $-\mathbf{k}$ , par l'intermédiaire de termes qui créent ou annihilent des paires de particules dans ces modes. Les diagrammes correspondant sont représentés en figure 4.

À ce stade, rien ne garantit que les deux hypothèses faites ci-dessus,  $N_0 \gg 1$  et  $N - N_0 \ll N$  soient légitimes. Ce sera donc une fois l'analyse menée à bien que nous pourrons vérifier *a posteriori* quelles contraintes ces hypothèses viennent imposer sur le potentiel  $V(r)$  ou sa transformée de Fourier  $\tilde{V}_q$ , en association avec la densité spatiale totale  $n = N/L^3$ .

**Non-conservation du nombre de particules.** Une contre-partie immédiate de l'approximation  $a_0^\dagger \approx a_0 \approx N_0$  est que le nombre total de particules n'est plus une quantité conservée pour l'hamiltonien  $\hat{H}'$  alors qu'il l'était pour l'hamiltonien  $\hat{H}$  écrit en (16). Même si ce point ne pose pas de problème sur le plan mathématique, il peut soulever des difficultés lors de l'interprétation physique de certains résultats. LEGGETT (2001) [voir aussi LEGGETT (2006)] propose pour cela une approche alternative, basée sur la méthode variationnelle avec une fonction d'essai à  $N$  particules ( $N$  est supposé ici pair)

$$|\Psi\rangle \propto \left( a_0^\dagger a_0^\dagger - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} c(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger \right)^{N/2} |0\rangle, \quad (21)$$

les coefficients  $c(\mathbf{k})$  étant des paramètres à optimiser pour minimiser l'énergie moyenne du gaz dans l'état  $|\Psi\rangle$ . Grâce à cet ansatz, on force l'émergence des corrélations entre les modes  $\mathbf{k}$  et  $-\mathbf{k}$ . Les calculs correspondants sont menés de manière détaillée dans le complément E<sub>XVII</sub> de COHEN-TANNOUJJI, DIU et al. (2021). Le résultat de cette approche est identique à celui de la méthode "standard" que nous allons développer ici. Signalons par ailleurs les approches de GARDINER (1997) et CASTIN & DUM (1998), qui utilisent également des hamiltoniens conservant le nombre de particules, ces approches étant bien adaptées au cas de gaz de densité non uniforme.

#### 1-4 Points de vue grand-canonique vs. canonique

Dans ce qui suit, nous allons essentiellement nous intéresser à l'état fondamental de l'hamiltonien du gaz de Bose, et il va donc s'agir de minimiser l'énergie associée à l'hamiltonien  $\hat{H}'$  écrit en (20). Comme toujours en physique statistique, plusieurs ensembles peuvent être utilisés pour cela. Deux ensembles sont particulièrement pertinents :

- L'ensemble grand-canonique qui correspond au cas où le gaz (condensat+partie non condensée) est couplé à un réservoir de particules qui vient imposer son potentiel chimique  $\mu$ . Il s'agit alors de minimiser la quantité  $\langle \hat{H}' - \mu \hat{N} \rangle$  à  $\mu$  fixé. La valeur de  $\mu$  est ensuite ajustée pour décrire correctement la situation physique à laquelle on s'intéresse. Ce point de vue est utilisé par exemple par NOZIÈRES & PINES (1990).

— L'ensemble canonique pour lequel on considère que le gaz (condensat+partie non condensée) est isolé du point de vue nombre de particules, même si un échange d'énergie avec un réservoir reste possible pour imposer une certaine température. Le nombre total de particules  $N$  est donc fixé et on doit imposer la contrainte

$$N = \hat{N}_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (22)$$

Cela amène à reprendre (légèrement) l'assimilation de  $N_0$  à un champ classique. C'est le point de vue utilisé par PETHICK & SMITH (2008) et par PITAEVSKII & STRINGARI (2016).

Nous prenons ici le point de vue canonique. La contrainte sur le nombre d'atomes écrite en (22) impose d'être vigilant vis-à-vis du terme dominant de  $\hat{H}'$ ,  $N_0^2 \tilde{V}_0 / 2L^3$ . Il serait inexact de traiter  $N_0$  simplement comme un nombre fixé pour ce terme car l'erreur faite serait comparable aux autres termes de  $\hat{H}'$ . Pour faire un développement en  $(N - N_0)/N$ , il faut récrire ce terme sous la forme :

$$\frac{N_0^2 \tilde{V}_0}{2L^3} = \frac{\tilde{V}_0}{2L^3} \left( N - \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right)^2 \approx \frac{N^2 \tilde{V}_0}{2L^3} - n_0 \tilde{V}_0 \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (23)$$

Une fois cette approximation faite, l'expression de l'hamiltonien  $\hat{H}'$  se simplifie : les termes en  $\tilde{V}_0 a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$  s'éliminent de sorte que  $\hat{H}'$  s'écrit :

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} n N \tilde{V}_0 + \hat{H}'' \quad (24)$$

avec

$$\hat{H}'' = \sum_{\substack{\text{paires} \\ \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}}} \left[ \epsilon_{\mathbf{k}} + n \tilde{V}_{\mathbf{k}} \right] \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} \right) + n \tilde{V}_{\mathbf{k}} \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \quad (25)$$

Dans cette somme, chaque paire  $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  (avec  $\mathbf{k} \neq 0$ ) n'est comptée qu'une seule fois. De manière équivalente, on peut sommer sur tous les  $\mathbf{k} \neq 0$  et multiplier le résultat obtenu par  $1/2$ . Notons que nous avons remplacé dans  $\hat{H}''$  la densité condensée  $n_0$  par la densité totale  $n$ , ce qui est légitime à cet ordre du calcul.

## 2 L'hamiltonien de Bogoliubov à deux modes

L'hamiltonien (25) trouvé au paragraphe précédent est quadratique vis-à-vis des opérateurs création et annihilation  $a_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ . Il est toujours possible de diagonaliser exactement ce type d'hamiltonien, que ce soit pour des bosons ou des fermions, au moyen de transformations canoniques. Dans le cours de l'année 2017-18 (chapitre 2), nous avons étudié le problème pour des fermions dans le cadre du modèle de Kitaev. Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur le cas de particules bosoniques.

Pour bien dégager les étapes essentielles de la méthode à suivre, nous allons raisonner ici sur un modèle à deux modes, caractérisés par les opérateurs  $(a_1^\dagger, a_1)$  et  $(a_2^\dagger, a_2)$ , et considérer l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (26)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_0 \left( a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \right) \quad \hat{V} = \hbar \kappa \left( a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2 \right), \quad (27)$$

où les paramètres réels  $\omega_0$  et  $\kappa$  ont chacun la dimension d'une fréquence. La quantité  $\omega_0$  est supposée positive de sorte que le spectre de  $\hat{H}_0$  est simplement  $(n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega_0$ , avec les états propres  $|n_1, n_2\rangle$ . Nous avons choisi ici l'origine des énergies de sorte que l'état fondamental de  $\hat{H}_0$  a pour énergie

$$E_{\text{fond}}^{(0)} = \hbar \omega_0, \quad (28)$$

c'est-à-dire la somme des énergies de point zéro  $\hbar\omega_0/2$  pour chacun des modes  $a_1$  et  $a_2$ ; cet état fondamental est obtenu pour  $n_1 = n_2 = 0$ .

Notons que cet hamiltonien se rencontre dans de nombreux problèmes d'optique quantique et il est à la base de la génération d'états comprimés à deux modes (*two-mode squeezed vacuum state*), en peuplant les modes 1 et 2 avec des nombres de photons rigoureusement égaux à partir d'un laser pompe décrit comme un champ classique (WALLS & MILBURN 2007). On le retrouve aussi dans la description de circuits supraconducteurs (NATION, JOHANSSON et al. 2012) et dans la description de la dynamique de gaz spinaux, où les modes (1,2) correspondent à différents états de spin, comme nous le verrons en §3.

Dans cette section, nous allons principalement prendre en compte de manière exacte le couplage  $\hat{V}$  entre les deux modes mais nous commençons pour fixer les idées en traitant le problème par la théorie des perturbations.

## 2-1 Approche perturbative

Nous nous intéressons ici à l'état fondamental du système à deux modes. Partant de l'état fondamental non perturbé  $|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle$ , nous constatons immédiatement que la moyenne de  $\hat{V}$  dans cet état est nulle, de sorte que l'énergie du fondamental est inchangée à l'ordre 1 :

$$\Delta E^{(1)} = \langle \Psi_0 | \hat{V} | \Psi_0 \rangle = 0. \quad (29)$$

Passons à l'ordre 2 en  $\hat{V}$ . La formule générale de la théorie des perturbations s'écrit

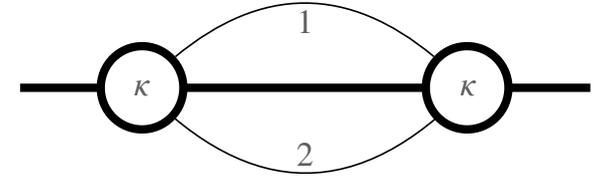
$$\Delta E^{(2)} = \sum_{j \neq 0} \frac{|\langle \Psi_j | \hat{V} | \Psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_j} \quad (30)$$

où la somme porte *a priori* sur tous les états excités. Dans le cas présent, seul un état excité contribue,  $n_1 = n_2 = 1$ , cet état ayant pour énergie  $3\hbar\omega_0$ . On en déduit :

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{\hbar\kappa^2}{2\omega_0}. \quad (31)$$

Nous avons représenté sur la figure 5 le diagramme correspondant. Partant de l'état fondamental non perturbé, représenté par une ligne épaisse, on crée la paire d'excitations  $n_1 = n_2 = 1$  qui est ensuite détruite.

On pourrait continuer à appliquer la théorie des perturbations à des ordres plus élevés. À l'ordre  $2n$  en  $\kappa/\omega_0$ , on sera en particulier amené à considérer le couplage entre l'état fondamental et l'état  $|n, n\rangle$  résultant de l'application de l'opérateur  $\hat{V}^n$  qui crée  $n$  paires de bosons. Toutefois, il est plus simple d'utiliser le formalisme des transformations canoniques, qui revient à resommer la série infinie fournie par la théorie des perturbations poussée à des ordres arbitrairement élevés.



**FIGURE 5.** Unique diagramme contribuant à l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien (26) à l'ordre 2 en  $\kappa/\omega_0$ . Le trait horizontal épais représente le "réservoir" à partir duquel on peut créer des paires (1, 2). Chaque disque représente la création ou la destruction d'une paire sous l'influence du potentiel  $\hat{V} \propto \kappa$ .

## 2-2 Transformation canonique

Le principe de cette méthode consiste à introduire deux nouveaux couples d'opérateurs bosoniques  $(b_1^\dagger, b_1)$  et  $(b_2^\dagger, b_2)$ , combinaison linéaire des opérateurs initiaux  $(a_i^\dagger, a_i)$  avec  $i = 1, 2$ , de sorte que l'hamiltonien  $\hat{H}$  soit "diagonal" vis-à-vis des  $b_i$ , c'est-à-dire qu'il s'écrit comme une somme des  $b_i^\dagger b_i$  et d'un terme constant.

Compte tenu de la forme particulière du couplage  $\hat{V}$ , on peut chercher les  $b_i$  sous la forme

$$\boxed{b_1 = ua_1 + va_2^\dagger \quad b_2 = ua_2 + va_1^\dagger} \quad (32)$$

où  $u$  et  $v$  sont des nombres réels. Le caractère bosonique<sup>5</sup> de ces nouveaux opérateurs impose que :

$$[b_i, b_i^\dagger] = 1 \quad \Rightarrow \quad u^2 - v^2 = 1 \quad (33)$$

ce qui signifie que l'on peut chercher les nombres  $u$  et  $v$  sous la forme

$$u = \cosh \lambda \quad v = \sinh \lambda \quad (34)$$

où  $\lambda$  est lui-même un nombre réel. Par ailleurs, la forme choisie en (32) assure bien l'indépendance des deux nouveaux modes :

$$[b_1, b_2] = 0 \quad [b_1, b_2^\dagger] = 0. \quad (35)$$

<sup>5</sup> L'adjectif "canonique" signifie précisément que les nouveaux opérateurs  $b_i$  satisfont les relations de commutation associées à des bosons.

La relation (32) définissant les  $b_i$  s'inverse pour donner

$$a_1 = ub_1 - vb_2^\dagger \quad a_2 = ub_2 - vb_1^\dagger \quad (36)$$

de sorte que l'hamiltonien  $\hat{H}$  s'écrit en fonction des  $b_i$  :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hbar\omega_0 \left[ (u^2 + v^2) (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) - 2uv (b_1^\dagger b_2^\dagger + b_1 b_2) + 2v^2 + 1 \right] \\ & + \hbar\kappa \left[ -2uv (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2) + (u^2 + v^2) (b_1^\dagger b_2^\dagger + b_1 b_2) - 2uv \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Le choix des nombres  $u$  et  $v$  se fait de sorte à annuler la contribution de  $b_1^\dagger b_2^\dagger$  et de  $b_1 b_2$  à cette expression. En utilisant la forme (34) pour ces nombres, on est amené à poser

$$\boxed{\tanh(2\lambda) = \frac{\kappa}{\omega_0}} \quad (38)$$

ce qui n'est possible que si

$$\boxed{|\kappa| < \omega_0} \quad (39)$$

Nous reviendrons sur cette condition dans un instant.

Une fois ce choix effectué, on obtient bien la forme recherchée :

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + 1)} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (40)$$

Nous obtenons deux modes bosoniques indépendants, chacun de pulsation  $\omega$  plus petite que la pulsation de départ. Nous avons donc bien réussi à diagonaliser complètement le problème et trouvé le spectre de l'hamiltonien  $\hat{H}$ , qui s'écrit  $(n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega$  [cf. figure 6]. Nous détaillerons la structure de l'état fondamental d'énergie  $\hbar\omega$  dans le paragraphe suivant. Les états excités sont obtenus en faisant agir les opérateurs  $b_1^\dagger$  et  $b_2^\dagger$  sur cet état fondamental.

Il sera utile de disposer des expressions suivantes pour  $\omega$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2 \tanh^2(2\lambda)} = \frac{\omega_0}{\cosh(2\lambda)}} \quad (41)$$

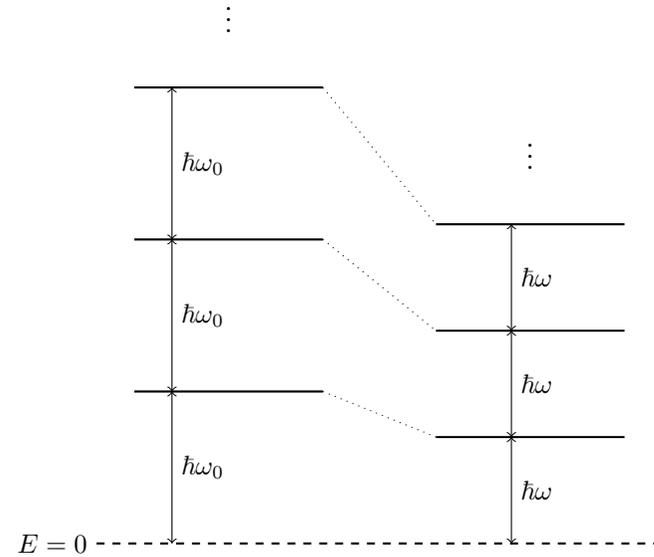


FIGURE 6. Spectre de l'hamiltonien de départ  $\hat{H}_0$  et de l'hamiltonien de paires  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$  donnés en (26-27) et (40).

et pour les coefficients  $u$  et  $v$  :

$$\begin{aligned} u^2 &= \cosh^2 \lambda = \frac{1}{2} [\cosh(2\lambda) + 1] = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} + 1 \right) \\ v^2 &= \sinh^2 \lambda = \frac{1}{2} [\cosh(2\lambda) - 1] = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) \end{aligned} \quad (42)$$

**Condition sur  $|\kappa|$ .** La condition  $|\kappa| < \omega_0$  donnée en (39) traduit l'instabilité susceptible d'apparaître quand on augmente trop le couplage entre les deux modes de départ  $a_1$  et  $a_2$  : quand  $|\kappa| \rightarrow \omega_0$  par valeurs négatives, la fréquence des modes propres  $b_i$  du système tend vers 0. La valeur de  $\omega$  donnée en (40) deviendrait imaginaire pure si  $|\kappa|$  dépassait cette valeur. Le système est en fait instable pour  $|\kappa| > \omega_0$  : partant de l'état  $|0, 0\rangle$ , le nombre de paires dans les modes  $a_i$  augmente exponentiellement avec le temps et le système n'a pas d'état stationnaire.

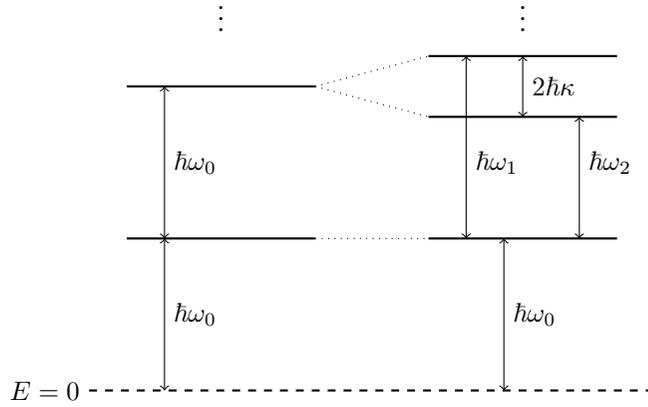


FIGURE 7. Spectre de l'hamiltonien de départ  $\hat{H}_0$  et de l'hamiltonien avec le couplage "usuel"  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}'$  donné en (43). L'état fondamental n'est pas modifié dans ce cas.

**Couplage "usuel" de deux oscillateurs.** Nous avons trouvé ici le spectre  $(n_1 + n_2 + 1)\hbar\omega$  de deux oscillateurs couplés via le terme  $\hat{V} = \hbar\kappa(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2)$ . Ce spectre est similaire au spectre de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$ , à l'homothétie près  $\omega_0 \rightarrow \omega$ ; il présente notamment les mêmes dégénérescences. Le résultat est très différent de celui obtenu pour le couplage plus habituel

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \quad \hat{V}' = \hbar\kappa(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1). \quad (43)$$

Dans ce cas, les opérateurs permettant la diagonalisation sont

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2), \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2) \quad (44)$$

et les fréquences des deux modes issus du couplage ne sont plus dégénérées :

$$\omega_1 = \omega_0 + \kappa, \quad \omega_2 = \omega_0 - \kappa. \quad (45)$$

L'état fondamental du système n'est alors pas modifié et son énergie reste égale à  $\hbar\omega_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega_2$  [cf. figure 7].

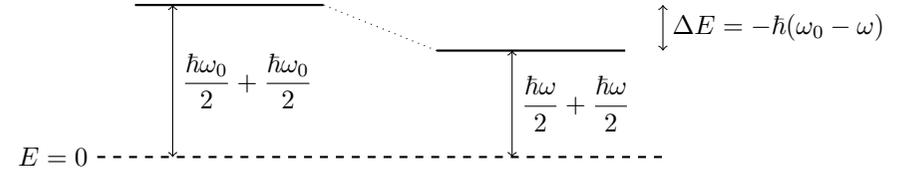


FIGURE 8. Abaissement de l'énergie de l'état fondamental du système à deux modes du fait du couplage  $\hat{V} = \hbar\kappa (a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1 a_2)$ , avec  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ .

### 2-3 État fondamental de l'hamiltonien

L'état fondamental  $|\Psi\rangle$  de l'hamiltonien  $\hat{H}$  est obtenu en plaçant les deux modes propres  $b_1$  et  $b_2$  dans leur état fondamental. Son énergie

$$E_{\text{fond}} = \hbar\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (46)$$

correspond à la somme des énergies de point zéro  $\hbar\omega/2$  des modes  $b_1$  et  $b_2$  [cf. figure 8]. Elle est inférieure à l'énergie  $\hbar\omega_0$  du fondamental de  $\hat{H}_0$  [cf. (28)] :

$$E_{\text{fond}} - E_{\text{fond}}^{(0)} = \hbar(\omega - \omega_0) \leq 0, \quad (47)$$

comme on pouvait s'y attendre compte tenu de la valeur moyenne de  $\hat{H}$  dans l'état non perturbé  $|\Psi_0\rangle$  (l'état propre de  $\hat{H}_0$ ) :

$$\langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{H}_0 | \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0 | \hat{V}' | \Psi_0 \rangle = \hbar\omega_0. \quad (48)$$

En effet, le théorème à la base de la méthode variationnelle permet d'affirmer que l'énergie du fondamental de  $\hat{H}$  est nécessairement inférieure à cette valeur moyenne :

$$E_{\text{fond}} = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \leq \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle. \quad (49)$$

**Lien avec la théorie des perturbations.** En effectuant un développement limité de l'expression générale (46) à l'ordre 2 inclus en  $\kappa$ , on retrouve le résultat (31) obtenu par la théorie des perturbations. Comme nous l'avons indiqué, cette expression générale peut être vue comme une resommation

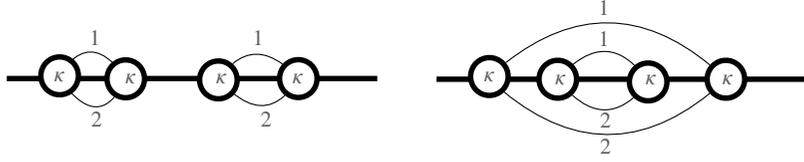


FIGURE 9. Les deux diagrammes contribuant à l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien (26) à l'ordre 4 en  $\kappa/\omega_0$ .

de la série de perturbation à tous les ordres en  $\kappa$ . Par exemple, on trouve à l'ordre 4 en  $\kappa/\omega_0$  :

$$E_{\text{fond}} \approx \omega_0 - \frac{\kappa^2}{2\omega_0} - \frac{\kappa^4}{8\omega_0^3} \quad (50)$$

correspondant pour l'ordre 2 au diagramme de la figure 5 et pour l'ordre 4 aux deux diagrammes de la figure 9.

**Développement de l'état fondamental sur la base de Fock.** L'état fondamental  $|\Psi\rangle$  de l'hamiltonien  $\hat{H}$  peut se décomposer sur la base propre  $|n_1, n_2\rangle$  de  $\hat{H}_0$  sous la forme

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, n_2} c(n_1, n_2) |n_1, n_2\rangle. \quad (51)$$

Les valeurs des coefficients  $c(n_1, n_2)$  se déduisent des relations :

$$b_1|\Psi\rangle = 0 \quad b_2|\Psi\rangle = 0 \quad (52)$$

qui imposent respectivement

$$\frac{c(n_1 + 1, n_2 + 1)}{c(n_1, n_2)} = -\frac{v}{u} \left( \frac{n_2 + 1}{n_1 + 1} \right)^{1/2} \quad (53)$$

et

$$\frac{c(n_1 + 1, n_2 + 1)}{c(n_1, n_2)} = -\frac{v}{u} \left( \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

On en déduit que seuls sont peuplés les états avec  $n_1 = n_2$ , ce qui était attendu compte tenu de la forme du couplage  $\hat{V}$  qui excite les deux modes

$a_1$  et  $a_2$  par paires. Nous réécrivons donc cet état fondamental comme

$$|\Psi\rangle = \sum_n c(n) |n, n\rangle \quad (55)$$

avec la relation de récurrence sur les  $c_n$  :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = -\frac{v}{u} = -\tanh \lambda \quad (56)$$

c'est-à-dire

$$c_n = c_0 (-\tanh \lambda)^n. \quad (57)$$

Après normalisation, l'état fondamental s'écrit donc :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\cosh \lambda} \sum_n (-\tanh \lambda)^n |n, n\rangle \quad (58)$$

Cet état est bien connu en optique quantique sous le nom *d'état comprimé du vide à deux modes* (*Two-mode squeezed vacuum state*). On l'écrit de manière générique sous la forme

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n |n, n\rangle \quad \text{avec} \quad \mathcal{N} = \sum_n \eta^{2n} = \frac{1}{1 - \eta^2}. \quad (59)$$

La loi de probabilité pour observer l'état à  $n$  paires  $|n, n\rangle$  dans une mesure du nombre d'occupation est :

$$\mathcal{P}(n) = \frac{\eta^{2n}}{\mathcal{N}} = (1 - \eta^2) \eta^{2n}. \quad (60)$$

La notion de compression provient du fait qu'il y a une corrélation parfaite entre les occupations des modes  $a_1$  et  $a_2$  :

$$\Delta(n_1 - n_2) = 0 \quad \text{avec} \quad \hat{n}_i = a_i^\dagger a_i. \quad (61)$$

Cette absence de fluctuation de la variable  $n_1 - n_2$  permet de concevoir des mesures avec un bruit bien inférieur à celui attendu pour deux états cohérents indépendants pour les modes 1 et 2, qui conduiraient à  $\Delta^2(n_1 - n_2) = \Delta^2(n_1) + \Delta^2(n_2) = \bar{n}_1 + \bar{n}_2$ .

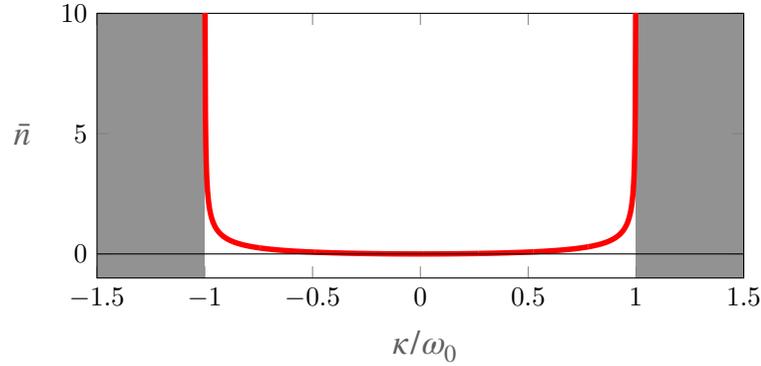


FIGURE 10. Variation du nombre moyen de paires en fonction du rapport  $\kappa/\omega_0$ .

Quand  $|\kappa| \ll \omega_0$ , c'est-à-dire  $|\lambda| \ll 1$ , l'état fondamental (58) est proche de l'état fondamental  $|\Psi_0\rangle = |0, 0\rangle$  de  $\hat{H}_0$ . En revanche, quand  $|\kappa|$  devient comparable à  $\omega_0$ ,  $\lambda$  devient arbitrairement grand et de nombreux états  $|n, n\rangle$  sont significativement peuplés. Plus précisément, on trouve le nombre moyen de paires :

$$\bar{n} = \frac{\sum_n n (\tanh \lambda)^{2n}}{\sum_n (\tanh \lambda)^{2n}} = \sinh^2 \lambda = v^2 \quad (62)$$

Ce nombre moyen est tracé en fonction du rapport  $\kappa/\omega_0 = \tanh(2\lambda)$  en figure 10. La variance de cette distribution est donnée par :

$$\Delta n^2 = \bar{n}(1 + \bar{n}) \quad (63)$$

de sorte qu'on trouve l'écart-type  $\Delta n \approx \bar{n}$  dès que  $\bar{n}$  devient notablement plus grand que 1. On notera que la loi statistique pour  $\mathcal{P}(n)$  trouvée en (60) est formellement identique à celle donnant l'occupation d'un état quantique individuel dans la loi de Bose-Einstein à température non nulle.

### 3 Exemple : le gaz de spin 1 en "dimension zéro"

Avant de revenir au problème à  $N$  corps du gaz de Bose à trois dimensions dans le prochain chapitre, il est intéressant d'examiner une application directe du modèle à deux modes que nous venons de décrire. Nous allons nous intéresser au cas d'une collection d'atomes de spin 1 fortement confinés dans un piège, de sorte que les trois degrés de liberté spatiaux des atomes sont "gelés" : seule la dynamique de spin reste possible, notamment par l'intermédiaire des collisions d'échange de spin :

$$(m = 0) + (m = 0) \rightleftharpoons (m = +1) + (m = -1), \quad (64)$$

où on a introduit le nombre quantique  $m = 0, \pm 1$  caractérisant la projection du spin d'un atome sur un axe donné. Ce processus est formellement équivalent à la conversion paramétrique en optique (WALLS & MILBURN 1988) et on le rencontre également dans des circuits supra-conducteurs (NATION, JOHANSSON et al. 2012). L'état comprimé du vide à deux modes ainsi produit fait partie de ceux fréquemment envisagés pour la métrologie quantique (PEZZÈ, SMERZI et al. 2018).

Dans le cadre des expériences sur les gaz quantiques, ce processus a été proposé par DUAN, SØRENSEN et al. (2000) et PU & MEYSTRE (2000), puis mis en évidence par KLEMPT, TOPIC et al. (2010), GROSS, ZIBOLD et al. (2010) et BOOKJANS, HAMLEY et al. (2011) (voir aussi SADLER, HIGBIE et al. (2006)). Nous allons nous concentrer ici sur l'étude expérimentale et numérique récente réalisée par EVRARD, QU et al. (2021), qui ont exploré différents régimes, depuis l'évolution réversible prédite par l'approche de Bogoliubov jusqu'à un régime chaotique permettant de discuter l'hypothèse selon laquelle un état propre (quasi-)quelconque peut être vu comme une représentation – au sens micro-canonique – du système thermalisé (*Eigenstate thermalization hypothesis*). La modélisation théorique que nous utiliserons est directement inspirée de l'article de MIAS, COOPER et al. (2008).

#### 3-1 Interactions en onde $s$ entre deux atomes de spin 1

Nous considérons ici des atomes bosoniques dont le spin total (électrons+noyau) de l'état fondamental est  $s = 1$ . C'est notamment le cas de plusieurs espèces alcalines très utilisées au laboratoire :  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{39}\text{K}$  et

$^{41}\text{K}$ ,  $^{87}\text{Rb}$ . La valeur 1 du spin est obtenue dans ce cas par couplage entre le spin 1/2 de l'électron externe et le spin 3/2 du noyau.

Lors d'une collision entre deux atomes identiques de spin  $s_1 = s_2 = 1$ , trois canaux sont possibles correspondant aux trois valeurs possibles  $s = 0, 1, 2$  pour le spin de la paire d'atomes  $s = s_1 + s_2$ . On peut vérifier<sup>6</sup> que l'état de spin total  $s = 1$  est obtenu par une combinaison antisymétrique des deux spins  $s_1$  et  $s_2$ . Puisqu'on a affaire à des bosons, l'état total orbital+spin doit être symétrique par échange des deux particules, ce qui veut dire que la fonction d'onde d'espace doit être antisymétrique pour un spin total  $s = 1$ . Comme on s'intéresse ici au régime de très basse température, où seules les collisions en onde  $s$  sont significatives, ce canal  $s = 1$  ne contribue pas à l'interaction entre particules.

Les deux canaux qui restent,  $s = 0$  et  $s = 2$ , correspondent à des états symétriques de spin et les collisions en onde  $s$  y sont autorisées. Ces canaux sont donc caractérisés chacun par une longueur de diffusion,  $a_0$  et  $a_2$ . On peut alors modéliser l'interaction entre atomes par un terme de contact :

$$\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \otimes (g_0 \mathcal{P}_0 + g_2 \mathcal{P}_2) \quad \text{avec} \quad g_i = \frac{4\pi\hbar^2 a_i}{m}, \quad (65)$$

où  $\mathcal{P}_i$  est le projecteur sur le sous-espace de spin total  $s = i$ , avec  $i = 0, 2$ . Notons que la distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{r})$  doit en fait être régularisée sous la forme du pseudo-potentiel comme indiqué en (3). Cette interaction peut s'écrire de manière équivalente

$$\hat{V}_{\text{int.}} = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \otimes (\bar{g}\hat{1} + g_s \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2) (\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_2) \quad (66)$$

où l'on a posé :

$$\bar{g} = \frac{1}{3} (g_0 + 2g_2) \quad g_s = \frac{1}{3} (g_2 - g_0). \quad (67)$$

6. On trouve pour  $m = \pm 1$  que :

$$\sqrt{2}|s = 1, m\rangle = |s_1, m; s_2, 0\rangle - |s_1, 0; s_2, m\rangle$$

et pour  $m = 0$

$$\sqrt{2}|s = 1, 0\rangle = |s_1, +1; s_2, -1\rangle - |s_1, -1; s_2, +1\rangle.$$

Pour démontrer le passage de (65) à (66), il suffit de remarquer que le produit scalaire

$$\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 = \frac{1}{2} (\hat{s}^2 - \hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2) = \frac{1}{2} \hat{s}^2 - 2 \quad (68)$$

est égal à  $-2$  quand il agit sur un état de spin total nul, et à  $+1$  quand il agit sur un état de spin total égal à 2.

Nous allons considérer dans ce qui suit le cas d'atomes de sodium, pour lesquels on trouve pour les longueurs de diffusion  $\bar{a}$  et  $a_s$  associées respectivement à  $\bar{g}$  et  $g_s$  :

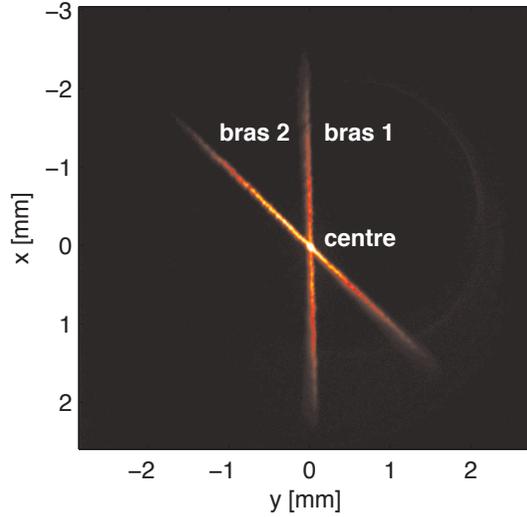
$$\bar{a} = 52.66 a_0 = 2.8 \text{ nm} \quad a_s = 1.88 a_0 = 98 \text{ pm}. \quad (69)$$

La forme de l'interaction en  $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$  rappelle celles des interactions dipolaires magnétiques, mais il est important de souligner que son origine est purement électrostatique, puisqu'elle résulte des interactions de van der Waals. Les interactions magnétiques sont également présentes mais elles sont beaucoup plus faibles, au moins pour les atomes alcalins, et on les négligera dans ce qui suit.

### 3-2 L'approximation du mode unique

Nous considérons maintenant un condensat de  $N$  atomes confinés dans un piège de forte raideur (figure 11); nous notons  $R$  l'extension spatiale du nuage et  $n$  la densité moyenne du gaz. Pour fixer les idées, nous pouvons prendre un piège harmonique isotrope de fréquence  $\omega$ . Nous supposons dans ce qui suit que l'énergie d'interaction, fonction de  $N\bar{g}$  et de  $Ng_s$ , est suffisamment faible pour les atomes s'accumulent essentiellement dans l'état fondamental  $\psi_0(\mathbf{r})$  du piège, la gaussienne d'extension  $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$  (figure 12). La dynamique spatiale est donc gelée et seule la dynamique de spin peut conduire à une évolution du système. C'est l'approximation du mode unique (*single mode approximation, SMA*); en d'autres termes, on a réalisé un gaz spineur de "dimension spatiale zéro".

L'hamiltonien régissant la dynamique de spin provenant du terme d'interaction (66) s'obtient en moyennant l'hamiltonien de départ sur la distri-



**FIGURE 11.** Piège dipolaire obtenu à l'intersection de deux faisceaux laser désaccordés sur le rouge de la raie de résonance atomique. Les atomes (sodium) sont visibles car ils sont excités ici par des faisceaux additionnels créant une mélasse optique. Ce type de piège assure un confinement avec des fréquences voisines selon les trois axes propres du piège. Figure extraite de la thèse de David Jacob.

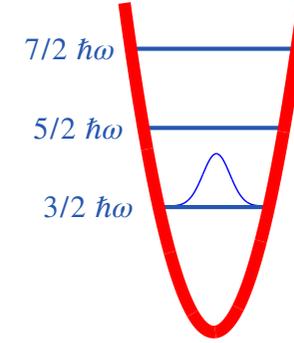
bution en densité  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$  :

$$\hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} = \frac{U_s}{2N} \sum_{i,j \neq i} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \frac{U_s}{2N} \hat{\mathbf{S}}^2 + \dots \quad (70)$$

où  $\hat{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{s}}_i$  est l'opérateur spin total, où  $\dots$  représente un terme additif constant, et où on a posé :

$$U_s = N g_s \int |\psi_0(\mathbf{r})|^4 d^3r. \quad (71)$$

Pour la suite, il sera utile d'exprimer cet hamiltonien d'interaction en fonction des opérateurs création  $a_m^\dagger$  et annihilation  $a_m$  d'un atome dans l'état orbital  $\psi_0$  et dans l'état de spin  $m = -1, 0, +1$ , avec un axe de quantification préalablement choisi. Nous introduisons aussi l'opérateur nombre



**FIGURE 12.** Approximation du mode spatial unique : on suppose ici que les interactions et la température sont suffisamment faibles pour que les atomes occupent essentiellement l'état fondamental du piège harmonique qui les confine. Dans ces conditions, seule la dynamique liée au degré de liberté de spin est pertinente.

d'occupation d'un état  $m$  donné :  $\hat{N}_m = a_m^\dagger a_m$ . Le résultat s'écrit après un calcul quelque peu fastidieux (LAW, PU et al. 1998) :

$$\hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} = \frac{U_s}{2N} \left[ (\hat{N}_{+1} - \hat{N}_{-1})^2 + (2\hat{N}_0 - 1) (\hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}) \right] + \frac{U_s}{N} \left[ a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger a_0 a_0 + \text{H.c.} \right], \quad (72)$$

toujours à une constante additive près.

L'expression (72) est instructive. La première ligne ne dépend que des nombres d'occupation  $\hat{N}_m = a_m^\dagger a_m$  et n'induit donc pas de dynamique de spin. Cette dynamique provient de la deuxième ligne qui décrit la collision d'échange de spins :

$$\boxed{(m=0) + (m=0) \rightleftharpoons (m=+1) + (m=-1)} \quad (73)$$

A partir d'une paire d'atomes initialement dans l'état  $m=0$ , une collision élastique peut créer une paire d'atomes dans les états  $m=+1$  et  $m=-1$ , et inversement. On reconnaît là un ingrédient essentiel du formalisme de Bogoliubov, que nous allons approfondir au prochain paragraphe.

**Remarque.** La grande différence entre  $\bar{g}$  et  $g_s$  pour l'atome de sodium (facteur  $\sim 30$  comme indiqué en (69)) permet de relaxer quelque peu les contraintes sur l'état de départ pour l'approximation du mode unique. Même si le produit  $N\bar{g}$  est tel que le condensat initial est décrit plutôt à l'approximation de Thomas-Fermi et a une extension  $R \gg a_{\text{ho}}$ , l'approximation du mode unique sera valable si

$$\xi_s \gg R \quad \text{avec} \quad \xi_s = \frac{1}{\sqrt{8\pi n a_s}}. \quad (74)$$

$\xi_s$  est appelée *longueur de cicatrisation associée au spin*. De manière générale, pour un condensat scalaire de densité  $n$  et de longueur de diffusion  $a$ , la longueur de cicatrisation  $\xi = 1/\sqrt{8\pi n a}$  représente la plus courte échelle de longueur sur laquelle le fluide peut réagir à une perturbation extérieure (obstacle, impureté, ...). Pour un gaz spineur, la condition (74) entraîne qu'il serait trop coûteux en énergie de former des domaines de spin au sein du domaine de taille  $R$ .

### 3-3 Effet Zeeman et hamiltonien de Bogoliubov

Dans ce qui suit, nous allons supposer que le gaz spineur est plongé dans un champ magnétique  $B$  d'axe  $z$  fixe, que nous prenons comme axe de quantification. Nous supposons de plus que les  $N$  atomes sont préparés initialement dans l'état  $m = 0$ . Sous l'effet des collisions élastiques (73), les états  $m = \pm 1$  vont être peuplés, mais sous la contrainte  $N_{+1} = N_{-1}$ .

Intéressons-nous plus particulièrement au régime où l'état  $m = 0$  est peu dépeuplé, c'est-à-dire que  $N_{\pm 1} \ll N_0 \approx N$ . En traitant  $\hat{N}_0$  comme un nombre égal à  $N$ , on peut alors simplifier l'expression de l'hamiltonien d'interaction (72) pour arriver à :

$$\hat{V}_{\text{int.}}^{\text{SMA}} \approx U_s \left( \hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1} + a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger + a_{+1} a_{-1} \right) \quad (75)$$

Intéressons-nous maintenant à l'énergie magnétique du gaz (figure 13) :

- À l'ordre 1 en champ magnétique, les deux états  $m = \pm 1$  sont déplacés par des quantités opposées,  $\pm \mu B$ . Une paire d'atomes  $\{m = +1, m = -1\}$  a donc, à cet ordre en champ magnétique, la même énergie que la paire de départ  $\{m = 0, m = 0\}$  : l'effet Zeeman du premier ordre n'a aucune conséquence sur la dynamique du système et peut être oublié.



**FIGURE 13.** Effet Zeeman pour un atome de spin 1. À gauche, uniquement l'effet Zeeman linéaire avec  $\Delta E = \mu B$ ; à droite, l'effet Zeeman quadratique, caractérisé par l'énergie  $q \propto B^2$ , a été ajouté.

- À l'ordre 2 en champ magnétique, les états  $m = \pm 1$  sont déplacés d'une même quantité<sup>7</sup>  $q > 0$  proportionnelle à  $B^2$  par rapport à l'état  $m = 0$ . Ce déplacement affecte la création de paires selon le processus (73) puisque l'énergie du membre de droite diffère de celle du membre de gauche par la quantité  $2q$ .

Pour les champs magnétiques considérés ici, on peut se limiter à l'ordre 2 en  $B$  et écrire la contribution de l'effet Zeeman sous la forme

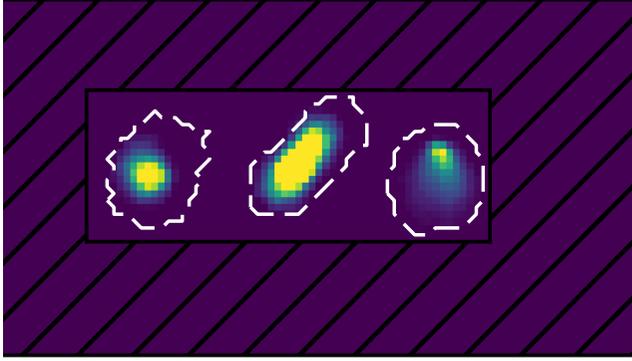
$$V_{\text{Zeem.}} = q \left( \hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1} \right), \quad (76)$$

ce qui donne l'hamiltonien total :

$$\hat{H} = (q + U_s) \left( a_{+1}^\dagger a_{+1} + a_{-1}^\dagger a_{-1} \right) + U_s \left( a_{+1}^\dagger a_{-1}^\dagger + a_{+1} a_{-1} \right) \quad (77)$$

C'est exactement la forme de départ pour la méthode de Bogoliubov. On déduit donc de l'analyse faite à la section précédente que dans cette approximation du mode  $m = 0$  faiblement dépeuplé, le spectre du système à  $N$  corps est composé de niveaux équidistants séparés par l'énergie

$$\hbar\omega = \left[ (q + U_s)^2 - U_s^2 \right]^{1/2} = \sqrt{q(q + 2U_s)} \quad (78)$$



**FIGURE 14.** Mesure des nombres d'occupation des trois sous-niveaux Zeeman  $m = -1, 0, +1$ . Une expérience de Stern et Gerlach suivie d'une phase de mélasse optique permet de compter les atomes avec une précision de l'ordre d'un atome, en analysant la lumière de fluorescence collectée dans les trois taches. Figure extraite de la thèse de Bertrand Evrard.

### 3-4 Réponse du gaz à un saut de champ magnétique

Pour tester les prédictions de l'approche de Bogoliubov, EVRARD, QU et al. (2021) sont partis d'un condensat de sodium de  $N \sim 5000$  atomes dans l'état  $m = 0$ . Le condensat est placé initialement dans un grand champ magnétique ( $B \sim 1$  G, conduisant à  $q/h \sim 280$  Hz) et il est confiné dans un piège tel que  $U_s/h = 17$  Hz. Dans ces conditions,  $q \gg U_s$  et le nombre de paires dans les états  $m = \pm 1$  est notablement inférieur à 1. L'expérience, qui mesure la population de chaque état de spin avec une précision de l'ordre d'un atome (figure 14), confirme cette prédiction. Le champ magnétique est ensuite soudainement abaissé à une valeur beaucoup plus faible, correspondant à  $q = 0.3$  Hz (donc  $q \ll U_s$ ), et on s'intéresse à l'évolution du système.

Sur le plan théorique, comme l'hamiltonien de Bogoliubov est quadratique vis-à-vis des opérateurs  $a_m$  et  $a_m^\dagger$ , le plus simple est de se placer en point de vue de Heisenberg pour étudier l'évolution des opérateurs. On

7. Pour l'atome de sodium, l'effet Zeeman quadratique est de 277 Hz/G<sup>2</sup>.

trouve pour la paire d'opérateurs  $a_1, a_{-1}^\dagger$  :

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = [a_1, \hat{H}] = (q + U_s)a_1 + U_s a_{-1}^\dagger \quad (79)$$

$$i\hbar \frac{da_{-1}^\dagger}{dt} = [a_{-1}^\dagger, \hat{H}] = -(q + U_s)a_{-1}^\dagger - U_s a_1 \quad (80)$$

ou encore

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} q + U_s & U_s \\ -U_s & -(q + U_s) \end{pmatrix} \quad (81)$$

et des équations couplées similaires pour la paire  $a_{-1}, a_1^\dagger$ . Les valeurs propres de la matrice  $[M]$  sont  $\pm\hbar\omega$  et la résolution de ce système différentiel donne le résultat :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} C - i(q + U_s)S/\hbar\omega & -iU_s S/\hbar\omega \\ iU_s S/\hbar\omega & C + i(q + U_s)S/\hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{-1}^\dagger \end{pmatrix} (0) \quad (82)$$

où on a posé  $C = \cos(\omega t)$  et  $S = \sin(\omega t)$ . Partant du vide (c'est-à-dire tous les atomes dans l'état  $m = 0$ ) à l'instant  $t = 0$ , on en déduit le nombre moyen de paires  $(+1, -1)$  à l'instant  $t$  :

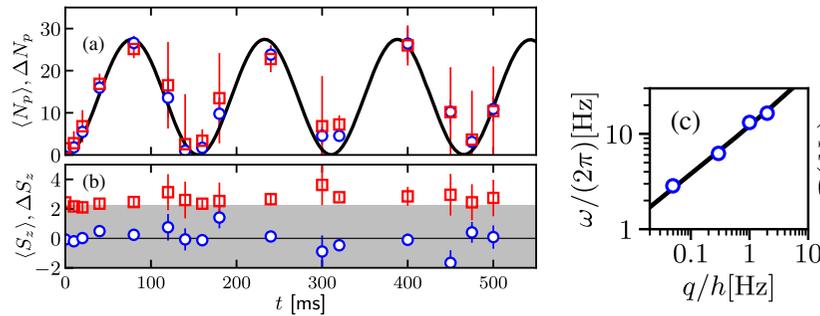
$$N_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=\pm 1} \langle 0 | a_m^\dagger(t) a_m(t) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=\pm 1} \|a_m(t)|0\rangle\|^2 \quad (83)$$

ou encore

$$\bar{N}_p(t) = \left( \frac{U_s}{\hbar\omega} \right)^2 \sin^2(\omega t) \quad (84)$$

Notons qu'il est également possible d'utiliser le point de vue de Schrödinger et de calculer le vecteur d'état du système  $|\Psi(t)\rangle$ . On peut montrer [voir par exemple MIAS, COOPER et al. (2008)] que cet état est à chaque instant un état comprimé du vide à deux modes [cf. (58)], caractérisé par la valeur moyenne  $\bar{N}_p(t)$  donnée en (84).

L'expérience confirme la prédiction de cette évolution réversible et oscillante d'un système à  $N$  corps (figure 15, gauche), et permet de vérifier que les nombres d'atomes dans  $m = \pm 1$  restent égaux entre eux au cours du temps, aux incertitudes de mesures près. La dépendance de la fréquence  $\omega$  avec le champ magnétique (caractérisé par la valeur du paramètre  $q$ ) est également en accord avec la prédiction (78) de la théorie de Bogoliubov (figure 15, droite).

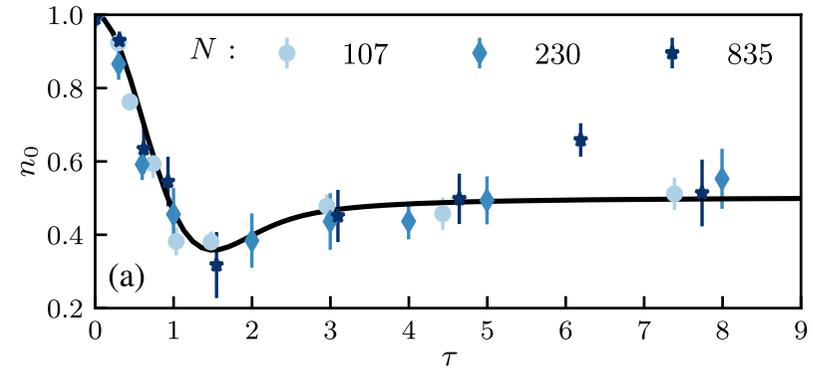


**FIGURE 15.** Gauche, haut : Valeur moyenne et écart-type du nombre de paires créées dans une assemblée de spin 1, sous l'effet des collisions d'échange de spin (73). La ligne continue est la prédiction (84) obtenue à partir de l'approche de Bogoliubov. Gauche, bas : la magnétisation  $S_z = N_{+1} - N_{-1}$  reste nulle lors de l'évolution, aux incertitudes de mesure près. Droite : variation de la fréquence  $\omega$  des oscillations avec le paramètre  $q$  caractérisant le champ magnétique. La ligne continue correspond à la prédiction (78). Figures extraites de EVRARD, QU et al. (2021).

**Déplétion de l'état  $m = 0$ .** La méthode de Bogoliubov repose ici sur l'hypothèse que la population de l'état  $m = 0$  reste voisine du nombre total d'atomes. Il est intéressant de regarder ce qui se passe quand cette hypothèse n'est plus valable. Dans le cas du problème à  $N$  corps, c'est le problème de la déplétion quantique, qui va nous occuper dans le prochain chapitre.

Pour le cas du spin 1 à l'approximation du mode unique, l'hypothèse de faible déplétion de l'état  $m = 0$  est vérifiée si l'amplitude des oscillations de  $N_p(t)$  écrite en (84) est petite devant  $N$ , ce qui impose  $q \gg U_s/N$ . Rappelons qu'il faut par ailleurs  $q \lesssim U_s$  pour que le nombre de paires soit supérieur à l'unité et que l'on puisse détecter un signal.

Quand on prend une valeur finale de  $q$  très petite devant  $U_s/N$ , on quitte le régime de Bogoliubov et la dynamique du système qui suit le changement soudain de champ magnétique n'est plus une dynamique réversible. Un cas simple à modéliser concerne le cas  $q = 0$ , pour lequel l'hamiltonien est simplement (toujours dans l'approximation du mode spatial unique)  $\hat{H} = \frac{U_s}{2N} \hat{S}^2$  [cf. (70)]. Le spectre de cet hamiltonien à  $N$  corps n'est



**FIGURE 16.** Evolution "universelle" obtenue dans le régime  $q \ll U_s/N$ , pour lequel la population de l'état  $m = 0$  devient fortement déplétée. Dans ce régime, la méthode de Bogoliubov ne s'applique plus. La ligne continue correspond à la prédiction théorique (85). Figure extraite de EVRARD, QU et al. (2021).

alors plus linéaire comme dans le régime de Bogoliubov, mais quadratique avec des niveaux d'énergie en  $(U_s/2N)S(S+1)$ . L'évolution devient alors irréversible et caractérisée par une fonction universelle du temps  $t$  :

$$N_0(t) = N [1 - \tau D(\tau)] \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{U_s t}{\hbar} \quad (85)$$

où  $D(\tau)$  est la fonction de Dawson (figure 16).

Un dernier point étudié par EVRARD, QU et al. (2021) porte sur l'ajout d'un terme supplémentaire à l'hamiltonien (77) qui permet d'atteindre un régime chaotique. Il est alors possible de tester numériquement si la dynamique conduit à une thermalisation de l'assemblée de spins, comme cela est prédit par la conjecture connue sous le nom de *Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)*. Nous ne décrivons pas ces résultats ici car ils s'éloignent du thème général de la méthode de Bogoliubov et nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'article de EVRARD, QU et al. (2021) et les références qu'il contient.

### Appendice : le formalisme de la seconde quantification

En physique non relativiste, le nombre de particules est conservé et il est en principe possible de mener l'analyse de Bogoliubov dans le formalisme des fonctions d'onde. Néanmoins, les calculs deviennent démesurés, du fait de la simple écriture des  $N!$  termes qui résultent de la symétrisation d'une fonction d'onde à  $N$  corps.

Il est très préférable d'utiliser le formalisme de la seconde quantification dont nous rappelons ici les grandes lignes pour des bosons. On se donne une base  $= \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots\}$  de l'espace des états à une particule, noté  $\mathcal{E}^{(1)}$ , par exemple la base des ondes planes caractérisées par leur vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Une base de l'espace des états à  $N$  particules, noté  $\mathcal{E}^{(N)}$ , est obtenue en considérant tous les états

$$|n_\alpha, n_\beta, \dots\rangle \quad \sum_{\alpha} n_{\alpha} = N \quad (86)$$

L'entier  $n_{\alpha} \geq 0$  désigne le nombre de particules dans l'état  $\alpha$ .

On travaille dans l'espace de Fock, somme directe des espaces de Hilbert à nombre de particules donné :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \oplus \mathcal{E}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}^{(N)} \oplus \dots \quad (87)$$

L'espace  $\mathcal{E}^{(0)}$  est le vide de particules ; c'est un espace de dimension 1 correspondant à l'état noté  $|0\rangle$ .

On introduit l'opérateur création d'une particule dans un de ces états

$$\begin{aligned} a_{\mu}^{\dagger} : \mathcal{E}^{(N)} &\longrightarrow \mathcal{E}^{(N+1)} \\ a_{\mu}^{\dagger} |n_{\alpha}, n_{\beta}, \dots, n_{\mu}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{\mu} + 1} |n_{\alpha}, n_{\beta}, \dots, n_{\mu} + 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (88)$$

et l'opérateur destruction associé

$$\begin{aligned} a_{\mu} : \mathcal{E}^{(N)} &\longrightarrow \mathcal{E}^{(N-1)} \\ a_{\mu} |n_{\alpha}, n_{\beta}, \dots, n_{\mu}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{\mu}} |n_{\alpha}, n_{\beta}, \dots, n_{\mu} - 1, \dots\rangle \quad \text{si } n_{\mu} \neq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } n_{\mu} = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

L'algèbre ainsi obtenue est formellement identique à celle d'un oscillateur harmonique. En particulier, les préfacteurs  $\sqrt{n_{\mu} + 1}$  et  $\sqrt{n_{\mu}}$  permettent une

simplification considérable dans l'écriture des opérateurs. Ils entraînent par ailleurs la valeur des commutateurs :

$$[a_{\mu}, a_{\nu}] = 0 \quad [a_{\mu}^{\dagger}, a_{\nu}^{\dagger}] = 0 \quad [a_{\nu}, a_{\mu}^{\dagger}] = \delta_{\mu\nu}. \quad (90)$$

Dans ce cours, nous utilisons la base des ondes planes  $\mathbf{k}$  pour écrire les opérateurs création et annihilation qui deviennent donc  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}$ .



## Chapitre III

# L'énergie de Lee-Huang-Yang et la déplétion quantique

Le chapitre précédent a été consacré à la mise en place du formalisme de Bogoliubov pour un gaz de Bose. Le potentiel d'interaction entre les  $N$  atomes est choisi de la forme

$$\hat{V} = \sum_{i < j} V(|\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j|) \quad (1)$$

et le potentiel binaire  $V(r)$ , que l'on suppose à symétrie sphérique pour simplifier les notations, a pour transformée de Fourier

$$\tilde{V}_k = \int V(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (2)$$

$V(r)$  est supposé régulier et suffisamment faible pour que le développement de Born converge. Partant de l'hamiltonien à  $N$  corps écrit en seconde quantification,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{q}} \tilde{V}_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}''-\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}'} \quad (3)$$

avec  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ , nous avons fait une approximation quadratique consistant (i) à traiter le condensat en  $\mathbf{k} = 0$  comme un champ classique et (ii) ne garder que les termes de degré au plus 2 dans un développement en puissances des opérateurs création et destruction  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  et  $a_{\mathbf{k}}$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ . Après cette approximation, l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} n N \tilde{V}_0 + \hat{H}'' \quad (4)$$

avec

$$\hat{H}'' = \sum_{\substack{\text{paires} \\ \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}}} (\epsilon_{\mathbf{k}} + n \tilde{V}_{\mathbf{k}}) (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}) + n \tilde{V}_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}), \quad (5)$$

où  $n = N/L^3$  désigne la densité spatiale du gaz.

L'hamiltonien  $\hat{H}''$  est constitué d'une somme d'hamiltoniens indépendants, portant chacun sur une paire  $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ . Nous avons montré que chacun de ces hamiltoniens pouvait être diagonalisé par une transformation canonique

$$b_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \quad b_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \quad (6)$$

avec

$$u_{\mathbf{k}} = \cosh \lambda_{\mathbf{k}} \quad v_{\mathbf{k}} = \sinh \lambda_{\mathbf{k}} \quad \tanh(2\lambda_{\mathbf{k}}) = \frac{n \tilde{V}_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}} + \tilde{V}_{\mathbf{k}}}. \quad (7)$$

L'hamiltonien  $\hat{H}''$  s'écrit alors en fonction des opérateurs  $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}, b_{\mathbf{k}}$  :

$$\hat{H}'' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[ \hbar \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{0,\mathbf{k}}) \right] \quad (8)$$

avec

$$\hbar \omega_{\mathbf{k}} = \left[ (\epsilon_{\mathbf{k}} + n \tilde{V}_{\mathbf{k}})^2 - (n \tilde{V}_{\mathbf{k}})^2 \right]^{1/2} = (\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2n \tilde{V}_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}})^{1/2} \quad (9)$$

$$\hbar \omega_{0,\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} + n \tilde{V}_{\mathbf{k}}. \quad (10)$$

Nous nous sommes donc ramenés à une collection de modes indépendants de fréquence  $\omega_k$ . On note immédiatement un effet des termes de création et destruction de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  dans l'hamiltonien  $\hat{H}''$  écrit en (5) : il abaisse l'énergie du fondamental pour chaque paire de la quantité  $\hbar\omega_k - \hbar\omega_{0,k} < 0$ . L'autre résultat important du cours précédent, qui va nous servir pour évaluer la *déplétion quantique*, porte sur la structure de cet état fondamental, et en particulier le nombre moyen de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  présentes dans cet état fondamental :

$$\bar{n}_k = v_k^2 = \frac{\omega_{0,k} - \omega_k}{2\omega_k}. \quad (11)$$

On constate immédiatement que ce nombre moyen de paires peut devenir grand quand  $\omega_k \rightarrow 0$ , c'est-à-dire d'après (9) quand l'énergie cinétique  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$  est petite devant  $n\tilde{V}_k$ .

Dans ce chapitre, nous allons exploiter cet ensemble de résultats pour étudier l'état fondamental du gaz de Bose. Dans un premier temps, nous allons continuer à travailler avec un potentiel  $V(\mathbf{r})$  pour lequel le développement de Born est valable. Nous allons discuter successivement le spectre d'excitation du système, l'énergie  $E_0$  du fondamental et la déplétion quantique, c'est-à-dire la fraction d'atomes  $n'/n$  en dehors du condensat  $\mathbf{k} = 0$ . En ce qui concerne la déplétion quantique, nous allons établir le résultat suivant :

$$\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \quad (12)$$

Rappelons que cette fraction doit être petite devant 1 pour que le développement permettant de passer de l'hamiltonien complet (3) à l'hamiltonien approché (4) soit justifiée. En ce qui concerne l'énergie de l'état fondamental, nous allons montrer qu'elle s'écrit :

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2}gn^2 \left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + \dots \right] \quad \text{avec} \quad g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (13)$$

Le premier terme est simplement l'énergie de champ moyen déjà rencontrée au chapitre précédent. Le second terme, qui est petit devant le premier du fait de la condition  $n'/n \ll 1$ , est la correction calculée pour la première fois par Lee, Huang et Yang (LEE, HUANG et al. 1957) qui s'écrit également,

en notant  $L^3$  le volume occupé par le gaz :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2}gn^2 \times \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (gn)^{5/2} \quad (14)$$

Il est important de noter que l'énergie  $E_0$  ne fait intervenir le potentiel  $V(\mathbf{r})$  que par l'intermédiaire de la longueur de diffusion  $a$  (ou du coefficient de couplage  $g$  qui lui est proportionnel).

Une fois ces résultats établis, nous aborderons un autre type d'interaction, le pseudo-potentiel  $\hat{V}_{\text{pp}}$ , qui est de portée nulle. Les résultats obtenus dans le cadre de l'approximation de Born et indiqués ci-dessus resteront formellement valables, mais nous soulignerons quelques difficultés propres à  $\hat{V}_{\text{pp}}$ . Signalons également la publication récente de CARLEN, HOLZMANN et al. (2021) qui développe une approche alternative rigoureuse au gaz de Bose pour le cas d'un potentiel purement répulsif, à la fois pour le cas des basses et des hautes densités, et qui présente des comparaisons détaillées avec des calculs Monte Carlo. Pour finir, nous décrivons un certain nombre d'expériences récentes qui ont permis de mesurer précisément les différentes quantités physiques que nous venons de mentionner.

## 1 Remarques préliminaires

### 1-1 Préliminaire 1 : le développement de Born

Comme au chapitre précédent, nous considérons dans cette partie un potentiel d'interaction à deux corps régulier de portée  $b$ . Nous supposons que l'interaction de deux atomes sous l'effet de ce potentiel peut être traitée par le développement de Born, la longueur de diffusion s'écrivant comme

1. Le terme suivant dans le développement du crochet est (WU 1959) :

$$\left[ 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + 8 \left( \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) na^3 \ln(na^3) + \dots \right] \quad (15)$$

et ne dépend donc lui aussi que de la longueur de diffusion  $a$ . Le terme suivant représenté par  $\dots$  est proportionnel à  $n$  ; il fait intervenir la portée effective  $r_e$  ainsi qu'un paramètre à trois corps calculé par TAN (2008d).

un développement en puissances de  $V$  :

$$a = a^{(1)} + a^{(2)} + \dots, \quad g = g^{(1)} + g^{(2)} + \dots \quad (16)$$

avec  $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$ .

Rappelons brièvement la nature de cette approximation et son critère de validité à basse énergie. Lors d'une collision binaire, l'amplitude de diffusion de la particule relative de  $\mathbf{k}_i$  vers  $\mathbf{k}_f$  est donnée par l'élément de matrice de  $\hat{T}(E)$  entre ces deux états, avec  $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m_r$  et  $E = \hbar^2 k_i^2/2m_r$  ( $\hat{p}$  et  $m_r = m/2$  représentent l'impulsion et la masse de la particule relative) :

$$\hat{T}(E) = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} + \dots \quad (17)$$

L'approximation de Born consiste à ne garder que le premier terme de ce développement :

$$\langle \mathbf{k}_f | \hat{T}(E) | \mathbf{k}_i \rangle \approx \langle \mathbf{k}_f | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle = \frac{\tilde{V}_{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}}{L^3}. \quad (18)$$

Nous nous intéressons au régime des collisions de basse énergie (collisions en onde s). En prenant la limite  $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| \rightarrow 0$ , on retrouve le résultat déjà utilisé au chapitre précédent :

$$g^{(1)} \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a^{(1)}}{m} = \tilde{V}_0. \quad (19)$$

Une condition nécessaire pour que cette approximation soit valable est que le terme suivant dans le développement de Born soit petit devant le terme conservé. L'élément de matrice du terme suivant se calcule aisément en introduisant une relation de fermeture dans l'espace des moments :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_f | \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle &= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \frac{\langle \mathbf{k}_f | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + i0_+} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 L^3} \int \frac{\tilde{V}_{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}} \tilde{V}_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_i}}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r} + i0_+} d^3k. \end{aligned} \quad (20)$$

Prenons la limite  $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| \rightarrow 0$  dans cette équation, en utilisant  $m_r =$

$m/2$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_f | \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle &\approx -\frac{m}{(2\pi)^3 \hbar^2 L^3} \int \frac{\tilde{V}_k^2}{k^2} d^3k \\ &= -\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2 L^3} \int_0^\infty \tilde{V}_k^2 dk, \end{aligned} \quad (21)$$

cette intégrale convergeant dès que  $|\tilde{V}_k|$  décroît plus vite que  $1/\sqrt{k}$  à l'infini. Comme  $|\tilde{V}_k|$  prend des valeurs significatives pour des valeurs de  $k$  allant jusqu'à  $\sim 1/b$ , la valeur correspondante de l'intégrale est, à un coefficient numérique près dépendant de la forme précise du potentiel :

$$\langle \mathbf{k}_f | \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i0_+} \hat{V} | \mathbf{k}_i \rangle \sim -\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2 L^3} \frac{\tilde{V}_0^2}{b}. \quad (22)$$

La contribution de ce terme (toujours négatif) à la longueur de diffusion  $a$  est petite devant la contribution dominante si

$$\frac{m}{2\pi^2 \hbar^2} \frac{\tilde{V}_0^2}{b} \ll \tilde{V}_0 \quad \text{ou encore} \quad a^{(1)} \ll b. \quad (23)$$

C'est le critère recherché pour que l'approximation de Born à basse énergie (19) soit valable.

L'analyse ci-dessus permet de donner la première correction à l'approximation de Born, qui nous sera utile dans la suite :

$$g^{(2)} \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a^{(2)}}{m} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{|\tilde{V}_k|^2}{2\epsilon_k} d^3k \quad (24)$$

avec comme précédemment  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/2m_r$ , cette correction  $\sim a^{(1)} \times (a^{(1)}/b)$  étant toujours négative.

## 1-2 Préliminaire 2 : les différents secteurs pour $k$

Les différentes quantités physiques mentionnées en introduction, comme l'énergie de l'état fondamental ou la déplétion quantique, font intervenir des intégrales sur le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Il est donc important d'identifier dès maintenant les comportements des deux termes principaux

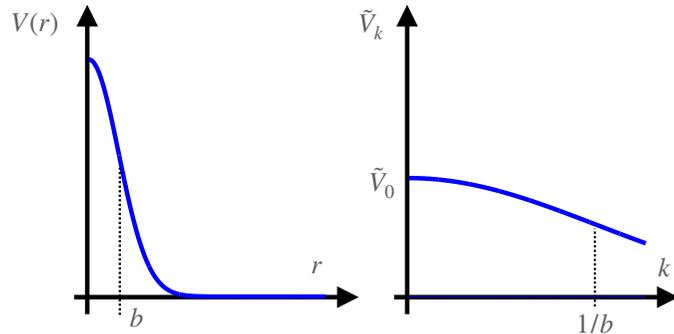


FIGURE 1. Un potentiel  $V(r)$  de portée  $b$  et sa transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$  de portée  $1/b$ .

qui interviendront dans toutes ces intégrales,  $n\tilde{V}_k$  et  $\epsilon_k$ , pour les comparer entre eux.

Nous avons fait l'hypothèse que le potentiel  $V(r)$  est régulier de portée  $b$ . Nous supposons dans ce qui suit que sa transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$  est à peu près constante et égale à  $\tilde{V}_0$  tant que  $k \ll 1/b$ , puis décroît et tend vers 0 quand  $k$  devient nettement plus grand que  $b$ . Un exemple de variation pour  $V(r)$  et  $\tilde{V}_k$  est donné en figure 1 dans le cas d'un potentiel gaussien.

Dans l'expression (9) de la fréquence du mode associé à la paire  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ , nous voyons apparaître la somme

$$\epsilon_k + 2n\tilde{V}_k \quad (25)$$

avec  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ ; il est alors utile de déterminer lequel de ces deux termes est prépondérant :

- Quand  $k \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , alors que  $\tilde{V}_k$  tend vers la valeur non nulle  $\tilde{V}_0$ . Le terme dominant est  $n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$ .
- Quand  $k \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_k$  diverge alors que  $\tilde{V}_k \rightarrow 0$ . C'est alors  $\epsilon_k$  qui domine.

Il nous faut maintenant évaluer le point à partir duquel  $\epsilon_k$  devient dominant par rapport à  $n\tilde{V}_k$ . Pour cela, commençons par définir la valeur  $k_0$

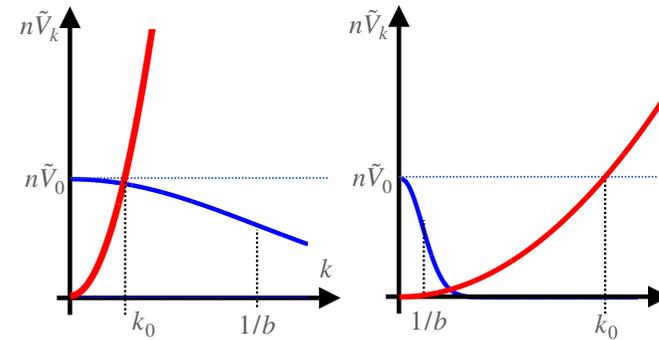


FIGURE 2. Les deux situations possibles pour trouver l'égalité entre l'énergie cinétique à une particule  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$  (en rouge) et l'énergie d'interaction  $n\tilde{V}_k$  (en bleu).

pour laquelle  $\epsilon_k$  est égale à  $n\tilde{V}_0$  :

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = n\tilde{V}_0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = \frac{\sqrt{2mn\tilde{V}_0}}{\hbar}. \quad (26)$$

La question est de savoir si  $\tilde{V}_k$  est encore voisin de  $\tilde{V}_0$  pour  $k = k_0$ , ou s'il a déjà fortement décri. On sera dans le premier cas si  $k_0 \ll 1/b$  et dans le cas opposé si  $k_0 \gg 1/b$ . Ces deux cas limites sont représentés en figure 2.

En reprenant le lien (19) entre longueur de diffusion et  $\tilde{V}_0$ , la définition de  $k_0$  s'écrit

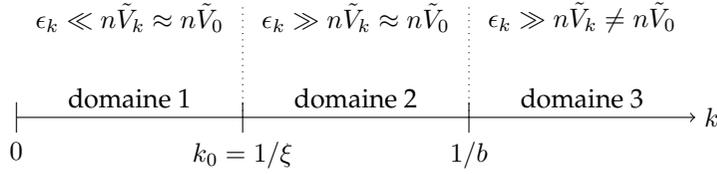
$$k_0 = \sqrt{8\pi n a} \equiv \frac{1}{\xi} \quad (27)$$

où  $\xi$  est appelée *longueur de cicatrisation (healing length)*. La condition  $k_0 \ll 1/b$  peut alors s'écrire :

$$k_0 \ll 1/b \quad \Leftrightarrow \quad 8\pi n a b^2 \ll 1. \quad (28)$$

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que la condition (28) est réalisée et qu'on est donc dans le cas du diagramme de gauche de la figure 2. Cette hypothèse peut être vue comme une condition de faible densité. Plus précisément, on peut écrire  $nab^2$  sous la forme

$$nab^2 = nb^3 \times \frac{a}{b}. \quad (29)$$



**FIGURE 3.** Les trois domaines pertinents pour le nombre d'onde  $k$  quand la condition de faible densité (28) est remplie.

Nous avons expliqué dans le premier chapitre que nous considérerons ici des gaz dilués au sens de  $nb^3 \ll 1$  et la validité du développement de Born requiert par ailleurs que  $a/b$  soit petit devant 1.

Dans le régime représenté sur le diagramme de gauche de la figure 2, nous pouvons identifier trois domaines de valeurs de  $k$  distincts (voir figure 3) :

- Domaine 1,  $k \ll k_0 = 1/\xi$  : le terme  $n\tilde{V}_k$  domine l'énergie cinétique  $\epsilon_k$  et on peut par ailleurs prendre  $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0$ .
- Domaine 2,  $k_0 \ll k \ll 1/b$  : l'énergie cinétique  $\epsilon_k$  est dominante et  $\tilde{V}_k$  reste proche de sa valeur à l'origine  $\tilde{V}_0$ .
- Domaine 3,  $1/b \ll k$  : l'énergie cinétique  $\epsilon_k$  est dominante et  $\tilde{V}_k$  tend vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$  (ce domaine sera absent pour le pseudo-potentiel).

**Remarque.** Même si les gaz quantiques correspondent au cas de figure que nous venons de discuter, il est intéressant d'envisager le cas opposé représenté sur le diagramme de droite de la figure 2, obtenu pour une situation de haute densité,  $8\pi nab^3 \gg 1$ . Pour bien préciser les paramètres dans ce cas, il est préférable de se donner une forme spécifique de potentiel, par exemple le potentiel de Yukawa [voir par exemple CEPERLEY, CHESTER et al. (1978) et CAMPANA, D'AURIA et al. (1979)]

$$\tilde{V}_k = \frac{\tilde{V}_0}{1 + k^2 b^2}, \quad V(r) = V_0 \frac{e^{-r/b}}{r/b}, \quad \tilde{V}_0 = 4\pi b^3 V_0. \quad (30)$$

On pourrait s'inquiéter de la validité de l'approche de Bogoliubov dans ce régime de haute densité, mais il n'y a en fait pas de problème. En effet, on

peut montrer que la déplétion quantique s'écrit dans ce cas :

$$\text{Haute densité : } \frac{n'}{n} \sim \frac{1}{(nab^2)^{1/4}} \times \frac{a}{b}. \quad (31)$$

et elle est donc d'autant plus faible que la densité est grande ! Plus précisément, le premier terme du produit intervenant dans le membre de droite est inférieur à 1 par définition de la situation de haute densité, et le second terme est petit devant 1 du fait du critère de validité de l'approximation de Born. Notons que l'on peut prendre la limite d'une portée  $b$  infinie, c'est-à-dire un potentiel de Coulomb. Ce problème a été étudié initialement par FOLDY (1961) et GIRARDEAU (1962). La phase condensée de Bose-Einstein est alors en compétition avec la formation d'un cristal de Wigner, mais on peut montrer dans la limite haute densité considérée ici que la phase condensée de Bose-Einstein conduit à une énergie plus basse (CEPERLEY, CHESTER et al. 1978; HALINEN, APAJA et al. 2000).

### 1-3 Illustration : le spectre d'excitation

Une fois l'hamiltonien de Bogoliubov mis sous la forme

$$\hat{H}' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \text{constante}, \quad \hbar\omega_{\mathbf{k}} = \left( \epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2n\tilde{V}_{\mathbf{k}}\epsilon_{\mathbf{k}} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

la quantité physique la plus simple à étudier est son spectre d'excitation, c'est-à-dire l'énergie et l'impulsion qu'il faut apporter au système pour le faire passer de son état fondamental à un état excité.

Les excitations élémentaires du système sont obtenues en faisant agir un des opérateurs  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$  sur l'état fondamental du système. Une telle opération confère au fluide l'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$  et l'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$ , puisque  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$  est combinaison linéaire de  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  (qui amène  $\hbar\mathbf{k}$ ) et de  $a_{-\mathbf{k}}$  (qui enlève  $-\hbar\mathbf{k}$ ). Nous allons maintenant discuter les différents régimes possibles pour cette excitation élémentaire, en nous appuyant sur les différents domaines de valeurs de  $k$  que nous venons d'identifier.

- **Domaine 1.** Dans ce domaine, on a  $n\tilde{V}_{\mathbf{k}} \approx n\tilde{V}_0 \gg \epsilon_{\mathbf{k}}$  et on trouve

$$\omega_{\mathbf{k}} \approx ck \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{n\tilde{V}_0/m}. \quad (33)$$

On retrouve le spectre de phonons bien connu, qui apparaît également dans une théorie de Bogoliubov menée avec des champs classiques [cf. cours 2015-16]. Rappelons que ce spectre linéaire est un élément clé de la superfluidité du gaz; il permet en effet à une impureté localisée de se propager dans le gaz sans dissiper d'énergie, pourvu que sa vitesse soit suffisamment basse.

— **Domaine 2.** Dans ce domaine, on a  $\epsilon_k \gg n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$  et on trouve

$$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + n\tilde{V}_0. \quad (34)$$

Ce résultat s'interprète simplement à partir des contributions de Hartree et de Fock calculées au cours précédent. Il correspond à l'énergie qu'il faut fournir pour faire passer une particule du condensat, donc depuis l'état d'impulsion nulle et avec une énergie d'interaction avec ses voisins égale à  $n\tilde{V}_0$  [uniquement le terme de Hartree, puisque le terme de Fock (échange) est nul dans ce cas], à un état excité d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et une énergie d'interaction  $2n\tilde{V}_0$  [Hartree+Fock]. Cette énergie à fournir est donc  $\epsilon_k + 2n\tilde{V}_0 - n\tilde{V}_0$ , comme indiqué en (34).

— **Domaine 3.** Dans ce domaine, on a  $\epsilon_k \gg n\tilde{V}_k \neq n\tilde{V}_0$  et on trouve

$$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + n\tilde{V}_k \quad (35)$$

Le résultat s'interprète là aussi à partir des contributions de Hartree et de Fock. L'énergie initiale de la particule quand elle fait partie du condensat est  $n\tilde{V}_0$  et l'énergie finale est  $\epsilon_k + n(\tilde{V}_0 + \tilde{V}_k)$ . Les termes de Hartree initiaux et finaux se compensent, pour ne laisser que l'énergie cinétique et le terme de Fock.

Nous verrons dans la suite de ce chapitre et dans le prochain qu'il est possible d'ajouter des termes négligés dans l'approximation de Bogoliubov et de resommer ainsi la série de Born décrivant des collisions à deux corps. Cette procédure, discutée initialement par BELIAEV (1958b), revient à prendre en compte par exemple des processus virtuels comme

$$(\mathbf{k}) + (0) \longleftrightarrow (\mathbf{k} - \mathbf{q}) + (\mathbf{q}) \quad (36)$$

qui correspond à l'application de l'opérateur  $a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_0$  et de son conjugué. L'effet de cette resommation est de remplacer  $\tilde{V}_0$  par un terme proportionnel à l'amplitude de diffusion à basse énergie  $f(k=0) = -a$ , plus

précisément par le couplage  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ . Les résultats (33) et (34) deviennent alors respectivement

$$\text{Domaine 1 :} \quad \omega_k \approx ck \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{ng/m} \quad (37)$$

$$\text{Domaine 2 :} \quad \hbar\omega_k \approx \epsilon_k + ng. \quad (38)$$

## 2 Énergie LHY et déplétion quantique

### 2-1 L'énergie de l'état fondamental

Dans ce paragraphe, nous allons évaluer l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien approché  $\hat{H}'$  donné en (4). Notre but sera de faire apparaître le développement de Born (16) dans l'expression de cette énergie. En particulier, nous souhaitons aller à l'ordre 2 inclus en  $V$  pour le terme dominant, représentant l'énergie de champ moyen.

L'état fondamental est obtenu en plaçant chaque mode décrit par les opérateurs  $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$  dans son état fondamental, de sorte que l'énergie recherchée s'écrit :

$$E_{\text{fond}} = \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar\omega_k - \hbar\omega_{0,\mathbf{k}}. \quad (39)$$

En utilisant les valeurs (9-10) de  $\omega_k$  et  $\omega_{0,\mathbf{k}}$ , puis en remplaçant la somme discrète par une intégrale, on obtient :

$$\frac{E_{\text{fond}}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0 + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left[ \left( \epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k \right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k \right] d^3k. \quad (40)$$

Il est important de s'assurer de la convergence à l'infini de cette intégrale qui intervient dans cette expression. Aux grands  $k$ , comme expliqué en §1-2,  $n\tilde{V}_k$  tend vers 0 alors que  $\epsilon_k$  croît. On peut donc effectuer un déve-

loppement limité<sup>2</sup> de la racine carrée contribuant à l'intégrale

$$\begin{aligned} \left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2} &= \epsilon_k \left(1 + \frac{2n\tilde{V}_k}{\epsilon_k}\right)^{1/2} \\ &\approx \epsilon_k + n\tilde{V}_k - \frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k} + \frac{n^3\tilde{V}_k^3}{2\epsilon_k^2} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Ici, le terme dominant de l'intégrande est

$$-\frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k}, \quad (43)$$

c'est-à-dire le même terme que celui apparaissant dans  $a^{(2)}$ , le deuxième ordre du développement de Born (24) de la longueur de diffusion. Le critère de convergence est donc toujours une décroissance de  $|\tilde{V}_k|^2$  à l'infini plus rapide que  $1/k$ , que nous supposons acquise ici.

À ce stade, le terme dominant de  $E_{\text{fond}}$  donné en (40) est la première contribution du membre de droite,  $\frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0$ , avec  $\tilde{V}_0 = g^{(1)}$ . Comme annoncé en introduction de ce paragraphe, nous souhaitons exprimer ce terme en fonction de  $g$  avec une précision meilleure que  $g^{(1)}$ , et aller jusqu'à l'ordre 2 en  $V$ . Pour cela, nous pouvons réécrire ce terme dominant sous la forme :

$$\frac{1}{2}n^2\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}n^2 \left(g^{(1)} + g^{(2)}\right) - \frac{1}{2}n^2g^{(2)} \quad (44)$$

puis de réinjecter le deuxième terme  $-\frac{1}{2}n^2g^{(2)}$  dans l'intégrale sur  $k$  en utilisant l'expression (24) de  $g^{(2)}$ . On arrive alors à :

$$E_{\text{fond}} = E_{\text{chp.moy.}} + E_{\text{LHY}} \quad (45)$$

avec

$$\frac{E_{\text{chp.moy.}}}{L^3} = \frac{1}{2}n^2 \left(g^{(1)} + g^{(2)}\right) \approx \frac{1}{2}gn^2 \quad (46)$$

et

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left[ \left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_k + \frac{n^2\tilde{V}_k^2}{2\epsilon_k} \right] d^3k. \quad (47)$$

2. Nous utilisons le développement limité :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4). \quad (41)$$

## 2-2 Calcul de l'énergie $E_{\text{LHY}}$

Un point important de l'expression (47) de l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  porte sur le comportement aux grands  $k$  de l'intégrande. Alors que le terme dominant de l'intégrande apparaissant en (40) faisait intervenir  $\tilde{V}_k^2/\epsilon_k$  [voir (43)], ce terme dominant est exactement compensé par la contribution de  $g^{(2)}$ . L'intégrande de  $E_{\text{LHY}}$  tend maintenant vers 0 beaucoup plus vite aux grands  $k$ , avec le terme dominant

$$\text{Terme dominant pour } \epsilon_k \gg \tilde{V}_k : \quad \frac{n^3\tilde{V}_k^3}{2\epsilon_k^2}. \quad (48)$$

Même si  $\tilde{V}_k$  ne décroît que très lentement à l'infini, la convergence de l'intégrale est maintenant assurée par la présence de  $\epsilon_k^2 \propto k^4$  au dénominateur.

Il est donc intéressant d'approfondir les valeurs de  $k$  qui contribuent de manière significative à cette intégrale. Reprenons pour cela la figure 3 sur laquelle on a distingué trois secteurs :

- La zone 1 des faibles  $k$  où  $\epsilon_k \ll n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$ .
- La zone 2 des  $k$  intermédiaires où  $\epsilon_k \gg n\tilde{V}_k \approx n\tilde{V}_0$ .
- La zone 3 des grands  $k$  où  $\epsilon_k$  est toujours dominant et où  $\tilde{V}_k$  diffère significativement de  $\tilde{V}_0$ .

Compte tenu de la décroissance rapide de l'intégrande intervenant dans  $E_{\text{LHY}}$  [cf. (48)], la zone 3 a une contribution négligeable. En nous limitant à la contribution des zones 1 et 2, nous pouvons donc remplacer  $\tilde{V}_k$  dans  $\tilde{V}_0$  dans cette intégrale :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left[ \left(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_0\epsilon_k\right)^{1/2} - \epsilon_k - n\tilde{V}_0 + \frac{n^2\tilde{V}_0^2}{2\epsilon_k} \right] d^3k. \quad (49)$$

Pour terminer ce calcul, notons que l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  est une petite correction par rapport au terme de champ moyen. Nous pouvons y remplacer systématiquement  $a^{(1)}$  par  $a$ , ou de manière équivalente  $g^{(1)} = \tilde{V}_0$  par  $g$ . De cette manière, nous obtenons une expression en fonction de  $a$  ou  $g$  qui correspond à un développement systématique en puissances de  $V$ , à l'ordre 2 inclus. Insistons sur le fait que cela n'est possible que grâce à la décroissance rapide de l'intégrande de (47). Cela n'aurait pas été le cas si on avait cherché à calculer explicitement l'intégrale (40) : la forme complète de la

dépendance en  $k$  de  $\tilde{V}_k$  aurait alors contribué. Fort heureusement, cette contribution se réintègre en totalité dans le terme d'ordre 2 du développement de Born,  $a^{(2)}$ .

Après le changement de variable  $x = k(\hbar^2/2mn\tilde{V}_0)^{1/2}$  [ou encore  $x = k\xi$  avec  $\xi = 1/\sqrt{8\pi na}$ ] dans l'intégrale (49), on obtient

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{\hbar^2}{m} (na)^{5/2} \mathcal{I} \quad (50)$$

où on a posé

$$\mathcal{I} = 16\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ x^2 + 1 - (x^2 + 2x)^{1/2} - \frac{1}{2x} \right] dx. \quad (51)$$

Après un calcul explicite de cette intégrale, on arrive à :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{L^3} = \frac{1}{2} gn^2 \times \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}, \quad (52)$$

ce qui est le résultat annoncé en (13). Comme indiqué en introduction, l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  est petite devant l'énergie de champ moyen dès que la condition de validité "basse densité" de l'approche de Bogoliubov,  $\sqrt{na^3} \ll 1$ , est satisfaite.

Nous avons donc vu apparaître ici le développement de Born pour la longueur de diffusion, avec les contributions d'ordre 1 et 2 à prendre en compte pour le terme dominant de champ moyen, la seule contribution d'ordre 1 étant suffisante pour le terme LHY. On peut chercher à aller plus loin<sup>3</sup> et inclure tous les termes de ce développement pour exprimer le résultat final uniquement en fonction de  $a = \sum_{j=1}^{\infty} a^{(j)}$ . Nous ne ferons pas ici cette resommation pour un potentiel  $V(\mathbf{r})$  arbitraire car elle est très technique [voir par exemple BELIAEV (1958b), HUGENHOLTZ & PINES (1959), GAVORET & NOZIERES (1964) et NOZIÈRES & PINES (1990)]. Qui plus est, le caractère convergent des séries que l'on resomme n'est pas facile à établir, surtout en présence d'états liés dans le potentiel  $V(r)$  qu'il s'agit d'ignorer pour ne traiter que le cas d'un gaz d'atomes libres. Ainsi LIEB, SEIRINGER et al. (2005) écrivent à propos de ces méthodes<sup>4</sup> : *They all rely on some special assumptions about the ground state that have never been proved, or on the selection of special terms from a perturbation series which likely diverges.*

3. Cette possibilité était mentionnée par Bogoliubov dans son article initial (BOGOLIUBOV 1947), et il remerciait Landau pour cette "remarque importante".

4. On pourra également consulter la discussion en pages 463-464 de GAVORET (1963).

## 2-3 La déplétion quantique

La dernière étape de notre traitement réside dans la validation de l'approximation à la base de la méthode de Bogoliubov. Est-il correct de supposer que le nombre de particules  $N'$  en dehors de l'état  $\mathbf{k} = 0$  est petit devant le nombre total  $N$  ?

Pour évaluer  $N'$ , nous pouvons utiliser directement le résultat du modèle à deux modes développé au cours précédent. Le nombre moyen de paires  $\{+\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$  dans l'état fondamental du système est donnée par  $v_k^2$ , où le coefficient  $v_k$  est rappelé en (11). En sommant la contribution de toutes les paires, on trouve donc le nombre d'atomes  $N'$  recherché :

$$N' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_k^2 = \frac{1}{2} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \left[ \frac{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}{(\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k)^{1/2}} - 1 \right] d^3k. \quad (53)$$

Comme lors du calcul de l'énergie du fondamental, il importe bien sûr de vérifier la convergence de cette intégrale :

- Au voisinage de l'origine, grâce au jacobien en  $d^3k = 4\pi k^2 dk$ , il n'y a pas de problème de divergence bien que le contenu de la parenthèse diverge comme  $1/k$ .
- Aux grandes valeurs de  $k$ , le terme dominant de l'intégrande est<sup>5</sup> :

$$\frac{n_0^2 \tilde{V}_k^2}{2 \epsilon_k^2}. \quad (54)$$

Ce comportement asymptotique est le même que celui trouvé ci-dessus pour l'énergie  $E_{\text{LHY}}$  dans le cadre du développement de Born [voir (48)] et la conclusion est identique : même si  $\tilde{V}_k$  ne décroît que très lentement à l'infini, l'intégrale sera convergente grâce au facteur  $\epsilon_k^2 \propto k^4$  qui apparaît au dénominateur.

La procédure est donc similaire à celle utilisée pour calculer  $E_{\text{LHY}}$ . Parmi les trois zones de valeurs de  $k$  identifiées en figure 3, seules les zones 1 et 2 contribuent de manière significatives à l'intégrale (53). Dans

5. On utilise le développement limité  $(1 + 2u)^{-1/2} = 1 - u + \frac{3}{2}u^2 + \dots$  et  $(1 + u)(1 + 2u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \dots$  avec  $u = n\tilde{V}_k/\epsilon_k$ .

ces zones, on peut faire l'approximation  $\tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0 \approx g$  et on arrive à l'expression pour la densité non condensée  $n' = N/L^3$  :

$$n' = (na)^{3/2} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} - x \right) x \, dx, \quad (55)$$

où l'on a posé  $x = k\xi$ . L'intégrale figurant dans cette expression se calcule analytiquement et le résultat s'écrit

$$\frac{n'}{n} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}. \quad (56)$$

Nous voyons apparaître ici l'infiniment petit  $\sqrt{na^3}$  annoncé en introduction. Le résultat (56) ne fait intervenir que la longueur de diffusion et sa portée dépasse le cas du potentiel régulier décrit par l'approximation de Born; elle s'étend au cas d'un potentiel quelconque, en particulier le pseudo-potentiel, comme nous le vérifierons au prochain paragraphe.

Pour faire le lien avec la condition de faible densité établie en § 1-2 [cf. (28)], il est intéressant de réécrire ce résultat sous la forme :

$$\frac{n'}{n} \sim \sqrt{na^2} \frac{a}{b} \quad (57)$$

qui est le produit de deux termes petits devant 1 : la petitesse du premier terme  $\sqrt{na^2}$  provient de la condition (28) et celle du second terme  $a/b$  découle du critère de validité de l'approximation de Born.

### 3 Hamiltonien de Bogoliubov pour $\hat{V}_{\text{pp}}$

Après avoir étudié en détail l'effet du couplage créé par un potentiel régulier  $V(r)$ , dans la limite  $|a| \ll b$  permettant d'utiliser le développement de Born, nous passons au cas du pseudo-potentiel, de portée  $b = 0$ , mais de longueur de diffusion  $a$  arbitraire. Les résultats (12) et (13) pour la déplétion quantique et l'énergie de l'état fondamental seront inchangés, mais la démarche à suivre présente quelques subtilités spécifiques que nous allons discuter.

#### 3-1 Potentiel de contact et pseudo-potentiel $\hat{V}_{\text{pp}}$

Nous avons étudié en détail dans le cours de l'an dernier comment obtenir à trois dimensions un tel potentiel de portée nulle en physique quantique. Le choix le plus simple semble être le potentiel de contact

$$V(\mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k : \tilde{V}_k = g. \quad (58)$$

Mais ce potentiel conduit à une divergence de l'amplitude de diffusion et n'est donc pas utilisable tel quel. Ce comportement singulier s'observe par exemple sur le développement de Born : le premier ordre est régulier et donne

$$a_1 = \frac{mg}{4\pi\hbar^2}, \quad (59)$$

mais le deuxième ordre  $a_2$  donné en (24) fait apparaître l'intégrale  $\int (1/k^2) d^3k$  qui est divergente.

Le pseudo-potentiel  $\hat{V}_{\text{pp}}$  permet de résoudre ce problème de divergence tout en gardant une portée nulle. On définit son action<sup>6</sup> sur une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  par :

$$\hat{V}_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial}{\partial r} [r \psi(\mathbf{r})] \right|_{r=0} \quad (60)$$

Cette expression permet de donner un sens au potentiel quand il agit sur des fonctions régulières en  $r = 0$  et aussi sur des fonctions divergeant comme  $1/r$ . Plus précisément, on trouve que  $\hat{V}_{\text{pp}}$  "efface" tout terme divergeant comme  $1/r$  :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} + \psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \psi_{\text{reg}}(0) \delta(\mathbf{r}) \quad (61)$$

où  $\psi_{\text{reg}}(\mathbf{r})$  est régulière en  $r = 0$ . L'action de  $\hat{V}_{\text{pp}}$  sur des fonctions régulières (comme les ondes planes  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ) est donc identique à celle du potentiel de contact (58), mais  $\hat{V}_{\text{pp}}$  a également une action bien définie sur les ondes sphériques qui jouent un rôle essentiel en théorie de la diffusion :

$$\hat{V}_{\text{pp}} \left[ \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \right] = \hat{V}_{\text{pp}} \left[ \frac{1}{r} + \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - 1}{r} \right] = ikg \delta(\mathbf{r}). \quad (62)$$

6. Voir OLSHANII & PRICOUPEENKO (2001) pour une généralisation de cette définition.

On peut donc résoudre complètement le problème d'une collision à deux corps interagissant via ce pseudo-potentiel et on trouve en particulier que la longueur de diffusion  $a$  est toujours reliée à la constante de couplage  $g$  par la relation  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ .

### 3-2 Les subtilités du pseudo-potentiel

Quand on manipule le pseudo-potentiel, il est important de garder à l'esprit plusieurs subtilités dans son action. Un exemple est fourni par l'action de  $\hat{V}_{pp}$  sur une somme infinie de termes. Considérons l'identité :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3k \quad (63)$$

et appliquons  $\hat{V}_{pp}$  sur les deux membres :

— Sur le membre de gauche, l'action de  $\hat{V}_{pp}$  est par définition :

$$\hat{V}_{pp} \left[ \frac{1}{r} \right] = 0. \quad (64)$$

— Sur le membre de droite, si on s'autorise à intervertir l'action de  $\hat{V}_{pp}$  et l'intégrale sur  $\mathbf{k}$  (ce qui est en fait incorrect), on trouve

$$\begin{aligned} \hat{V}_{pp} \left[ \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3k \right] &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\hat{V}_{pp} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}]}{k^2} d^3k \\ &= \frac{g \delta(\mathbf{r})}{2\pi^2} \int \frac{1}{k^2} d^3k = \frac{g \delta(\mathbf{r})}{2\pi^2} \int 4\pi dk \end{aligned} \quad (65)$$

qui est une intégrale divergente en  $k = +\infty$  !

Il convient donc d'être vigilant dès que l'on veut calculer l'action de  $\hat{V}_{pp}$  sur une fonction que l'on développe en Fourier, comme en (63). Ce point apparaît quand on considère l'action de  $\hat{V}_{pp}$  en seconde quantification

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{V}_{pp} [\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] d^3r d^3r' \quad (66)$$

où  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  est l'opérateur champ qui détruit une particule au point  $\mathbf{r}$ . Le développement de cet opérateur sur la base des ondes planes s'écrit :

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}} \quad (67)$$

Si on insère ce développement dans (66) et que l'on permute l'action de  $\hat{V}_{pp}$  et la sommation sur  $\mathbf{k}$ , on arrive à

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{g}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}. \quad (68)$$

C'est exactement la forme qu'on aurait déduite de l'expression générale

$$\frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \tilde{V}_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}}. \quad (69)$$

en prenant  $\tilde{V}_{\mathbf{q}} = g$  pour tout moment  $\mathbf{q}$ , ce qui correspond en fait au potentiel de contact naïf  $g \delta(\mathbf{r})$  donné en (58). En passant de (66) à (68), on a omis la subtile différence entre  $\hat{V}_{pp}$  et un pur potentiel de contact, ce qui ouvre la voie à des divergences.

Pour éliminer ces divergences, deux stratégies sont possibles. On peut s'interdire l'intervention de l'action de  $\hat{V}_{pp}$  avec toute somme infinie sur  $\mathbf{k}$ , et à travailler uniquement avec des opérateurs du type (66) (LEE, HUANG et al. 1957). L'autre approche, qui est validée par un traitement utilisant le groupe de renormalisation (BRAATEN, KUSUNOKI et al. 2008), consiste à mener les calculs avec l'expression "ondes planes" de  $\hat{V}_{pp}$  [c'est-à-dire l'expression (68)] tout en guettant l'apparition de termes divergents de la forme

$$\frac{g}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{k^2} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int 4\pi dk. \quad (70)$$

Ces termes "signeront" le résultat de l'application de  $\hat{V}_{pp}$  sur une fonction proportionnelle à  $1/r$ , qui donne en fait un résultat nul, et ils devront donc simplement être soustraits du résultat final :

$$\boxed{\frac{g}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{k^2} \longrightarrow 0} \quad (71)$$

De façon plus générale, rappelons que le pseudo-potentiel vient changer le domaine de travail : pour le problème à deux corps interagissant par un potentiel régulier, l'espace des fonctions d'onde  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est composé des fonctions continues des deux variables  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ . Quand on utilise le pseudo-potentiel pour décrire l'interaction, le domaine de l'hamiltonien

est modifié. Il s'agit de l'ensemble des fonctions satisfaisant la condition aux limites de Bethe–Peierls, c'est-à-dire se comportant comme

$$r \rightarrow 0 : \quad \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \Phi(\mathbf{R}) \quad (72)$$

avec

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (73)$$

Cette condition aux limites de Bethe–Peierls joue un rôle important dans le choix de fonctions d'essai si on souhaite aborder le problème par la méthode variationnelle.

### 3-3 Méthode de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel

Une fois établie l'expression de l'opérateur  $\hat{\mathcal{V}}$  décrivant l'interaction entre particules, la démarche de Bogoliubov se déroule de manière identique à ce que nous avons décrit pour un potentiel  $V(r)$  régulier. On suppose que la majorité des particules sont dans l'état condensé  $\mathbf{k} = 0$  et on traite les opérateurs  $a_0$  et  $a_0^\dagger$  comme des nombres classiques, en négligeant leur commutateur. On arrive alors à l'hamiltonien approché :

$$\hat{H}' = \frac{1}{2}gnN + \hat{H}'' \quad (74)$$

et

$$\hat{H}'' = \sum_{\substack{\text{paires} \\ \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}}} [\epsilon_k + gn] \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}} \right) + gn \left( a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \quad (75)$$

Le terme dominant de  $\hat{H}$  est l'énergie constante  $\frac{1}{2}gnN$  : c'est l'énergie de champ moyen calculée en supposant toutes les particules occupant le même état  $\mathbf{k} = 0$ .

La diagonalisation de  $\hat{H}''$  se fait avec la même transformation canonique,  $b_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}^\dagger$  avec les coefficients  $(u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}})$  donnés par

$$u_{\mathbf{k}} = \cosh \lambda_{\mathbf{k}} \quad v_{\mathbf{k}} = \sinh \lambda_{\mathbf{k}}, \quad (76)$$

la variable auxiliaire  $\lambda_{\mathbf{k}}$  étant définie par

$$\sinh(2\lambda_{\mathbf{k}}) = \frac{gn}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \quad \cosh(2\lambda_{\mathbf{k}}) = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} + gn}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}} \quad (77)$$

c'est-à-dire

$$\tanh(2\lambda_{\mathbf{k}}) = \frac{gn}{gn + \epsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{1 + k^2\xi^2} \quad (78)$$

où la longueur de cicatrisation  $\xi$  est donnée par

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8\pi an}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mgn}}. \quad (79)$$

L'hamiltonien  $\hat{H}$  s'écrit en fonction des  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$  :

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + E_0 \quad \text{avec} \quad \hbar\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + 2gn\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (80)$$

la fréquence  $\omega_{\mathbf{k}}$  et l'énergie  $gn$  pouvant également se mettre sous la forme :

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}} e^{2\lambda_{\mathbf{k}}} \quad gn = \frac{1}{2}\epsilon_{\mathbf{k}} (e^{4\lambda_{\mathbf{k}}} - 1). \quad (81)$$

L'énergie de l'état fondamental se déduit en principe du résultat général précédent :

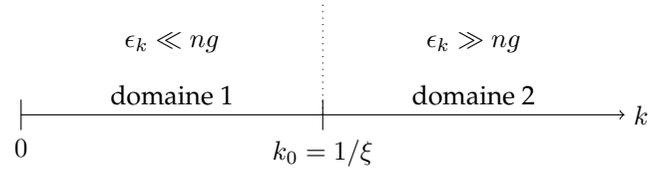
$$\Delta E = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left( \frac{1}{2}\hbar\omega_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\hbar\omega_{0,\mathbf{k}} \right) \quad (82)$$

ce qui conduit à :

$$E_{\text{fond}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}gnN + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hbar\omega_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - gn). \quad (83)$$

Nous avons mis un point d'interrogation sur ce dernier résultat, car nous verrons qu'il présente en fait une divergence du type (71), qu'il s'agira d'effacer avant de donner le résultat correct à cet ordre du calcul.

Du fait de la portée nulle de ce potentiel, il n'y a plus que deux domaines à considérer pour  $k$  au lieu de trois (cf. figure 4) :


 FIGURE 4. Les deux domaines de valeurs de  $k$  pour le pseudo-potentiel.

- La région des faibles  $k$ , pour lesquels  $\epsilon_k \ll gn$  c'est-à-dire  $k\xi \ll 1$ . Il s'agit du régime phononique

$$\omega_k \approx ck \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{m\xi}, \quad u_k \approx v_k \approx \frac{1}{2^{3/4} \sqrt{k\xi}} \quad (84)$$

- Le régime de particules presque libres,  $\epsilon_k \gg gn$ , c'est-à-dire  $k\xi \gg 1$ , pour lequel

$$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + gn \quad u_k \approx 1 + \frac{1}{8k^4\xi^4}, \quad v_k \approx \frac{1}{2k^2\xi^2} \quad (85)$$

Le calcul de la déplétion quantique est inchangé par rapport au chapitre précédent. En effet, les états  $k$  contribuant à la déplétion sont essentiellement tels que  $k \lesssim 1/\xi$  et leur contribution n'est pas affectée par la substitution  $\tilde{V}_k \rightarrow \tilde{V}_0$ . On trouve donc :

$$\frac{n'}{n} = \frac{1}{N} \sum_{k \neq 0} v_k^2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \quad (86)$$

Notons que la condition de validité de l'approche de Bogoliubov,  $\sqrt{na^3} \ll 1$ , assure d'emblée la hiérarchie de trois échelles de longueur dans le problème :

$$a \ll d \equiv n^{-1/3} \ll \xi. \quad (87)$$

La distance moyenne entre particules  $d$  doit être grande devant la longueur de diffusion  $a$ , mais petite devant la longueur de cicatrisation  $\xi$  puisque

$$\frac{d}{\xi} = n^{-1/3} \sqrt{8\pi a n} = \sqrt{8\pi} (na^3)^{1/6} \ll 1. \quad (88)$$

### 3-4 L'énergie de l'état fondamental

Revenons maintenant à l'expression (83) de l'énergie du fondamental qui se met sous la forme

$$E_{\text{fond}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} gnN + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[ (\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k)^{1/2} - \epsilon_k - gn \right]. \quad (89)$$

Aux grandes valeurs de  $k$ , les termes dominants de l'argument de la somme sont :

$$-\frac{g^2 n^2}{2\epsilon_k} + \frac{g^3 n^3}{2\epsilon_k^2} \quad (90)$$

Le premier terme  $\propto \sum_{k \neq 0} 1/k^2$  conduit à la divergence caractéristique que nous avons signalée en §3-2, elle-même liée au fait qu'en passant sur la base des ondes planes, nous avons identifié  $\hat{V}_{pp}$  à un pur potentiel de contact [cf. (68)]. Rappelons que ce terme traduit une inversion abusive de l'action de  $\hat{V}_{pp}$  et du développement en série de Fourier d'une fonction du type  $1/r$ . Comme expliqué précédemment, ce type de terme doit être simplement retiré du résultat final puisque  $\hat{V}_{pp}(1/r)$  est en fait nul :

$$g \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0. \quad (91)$$

Une fois cette soustraction effectuée, nous trouvons donc l'expression pour le déplacement d'énergie du fondamental sous l'effet du pseudo-potentiel :

$$E_{\text{fond}} = \frac{1}{2} gnN + \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left[ (\epsilon_k^2 + 2gn\epsilon_k)^{1/2} - \epsilon_k - gn + \frac{g^2 n^2}{2\epsilon_k} \right]. \quad (92)$$

Aux grandes valeurs de  $k$ , le terme dominant dans l'argument de cette somme est maintenant

$$\frac{g^3 n^3}{2\epsilon_k^2} \propto \frac{1}{k^4} \quad (93)$$

ce qui conduit à une intégrale tri-dimensionnelle sur  $k$  convergente.

En fait, le deuxième membre de l'expression (92) est identique au terme (49) obtenu pour un potentiel régulier et le résultat du calcul  $E_{LHY}$ , donné en (52), est inchangé. Une fois ajouté le premier terme  $\frac{1}{2} gnN$  de (92), on aboutit là encore au résultat (13) annoncé en introduction.

La similitude entre les résultats des calculs menés avec un potentiel régulier ou avec le pseudo-potentiel ne doit malgré tout pas masquer une subtilité importante de  $\hat{V}_{pp}$  :

— Calcul pour  $V(r)$  régulier : L'énergie  $E''$  écrite en (40) est toujours négative. Pour faire émerger le développement de Born de  $g$ , on a ajouté au terme dominant  $\frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 = \frac{1}{2}nNg^{(1)}$  la correction à l'ordre 2  $\frac{1}{2}nNg^{(2)}$ , contribution que l'on a simultanément soustraite à  $E''$ . Cela a conduit à une valeur positive pour  $E_{LHY}$  (rappelons que la correction  $g^{(2)}$  est toujours négative) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 &\rightarrow \frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \underbrace{E''}_{<0} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}nN\tilde{V}_0 + \frac{1}{2}nNg^{(2)}}_{\frac{1}{2}gnN} + \underbrace{E'' - \frac{1}{2}nNg^{(2)}}_{E_{LHY} > 0} \end{aligned} \quad (94)$$

— Calcul pour  $\hat{V}_{pp}$  : Partant de  $\hat{H}' = \frac{1}{2}gnN + \hat{H}''$ , on est arrivé à l'énergie :

$$\frac{1}{2}gnN \rightarrow \frac{1}{2}gnN + \underbrace{E_{LHY}}_{>0}. \quad (95)$$

La prise en compte de  $\hat{H}''$  pour le pseudo-potentiel augmente donc l'énergie du fondamental au lieu de la diminuer, ce qui semble constituer une violation du théorème variationnel. L'explication de ce paradoxe tient au changement du domaine de l'hamiltonien quand on passe de  $\frac{1}{2}gnN$  à  $\frac{1}{2}gnN + \hat{H}''$ . Comme on ne travaille plus dans le même espace de Hilbert, le théorème en question ne s'applique plus et cette élévation d'énergie peut se produire. Nous renvoyons le lecteur vers le cours 2020-21 (chapitre 3), où ce point est discuté plus en détail avec les références bibliographiques correspondantes.

## 4 Mesures de la déplétion quantique

Nous disposons maintenant du résultat de la méthode de Bogoliubov, à la fois pour un potentiel régulier pour lequel le développement

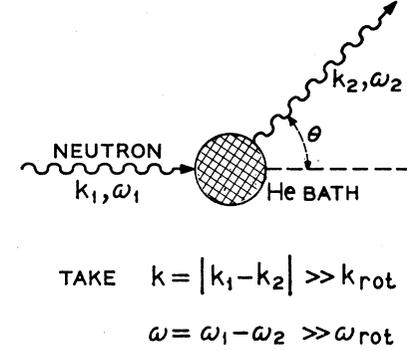


FIGURE 5. Diffusion inélastique de neutrons par de l'hélium liquide. On mesure sur les neutrons diffusés l'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et l'énergie  $\hbar\omega$  transférées au liquide. Figure extraite de HOHENBERG & PLATZMAN (1966).

de Born converge, et pour le pseudo-potentiel. Dans la limite basse densité  $na^3 \ll 1$ , la déplétion quantique  $n'/n$  et l'énergie de LHY prennent la même valeur dans les deux cas, et elles sont données en (12) et en (13). Dans ce paragraphe, nous allons discuter quelques mesures de la déplétion quantique ainsi que des expériences qui lui sont reliées, comme l'observation de paires d'excitations corrélées. Nous décrirons les mesures de  $E_{LHY}$  dans le chapitre suivant.

### 4-1 Le cas de l'hélium liquide

Les mesures de la déplétion quantique, c'est-à-dire la fraction d'atomes en dehors de la composante d'impulsion nulle, ont été menées avec une précision remarquable sur l'hélium liquide. Le protocole qui s'est avéré le plus robuste utilise la diffusion inélastique de neutrons; il donne accès au facteur de structure dynamique  $S(\mathbf{k}, \omega)$ , où  $\hbar\mathbf{k}$  et  $\hbar\omega$  sont l'impulsion et l'énergie déposées par un neutron dans le fluide [voir la figure 5, tirée de la proposition initiale de HOHENBERG & PLATZMAN (1966)].

Pour accéder à la déplétion quantique, les neutrons doivent être suffisamment rapides pour que le nombre d'onde  $k$  soit plus grand que  $1/d$ ,

où  $d$  est la distance moyenne entre atomes au sein du liquide. De cette manière, on ne sonde pas les propriétés collectives du fluide, mais les propriétés des atomes individuels, en particulier leur distribution en impulsion  $n(p)$ .

On se place plus précisément dans le régime de l'approximation soudaine (*impulse approximation*), où le temps de diffusion "neutron-atome" est suffisamment bref pour que l'on puisse en première approximation négliger l'interaction de l'atome avec ses voisins pendant ce temps. On a alors simplement

$$\mathbf{p}_{\text{at}}^{\text{fin}} = \mathbf{p}_{\text{at}}^{\text{ini}} + \hbar \mathbf{k}, \quad \frac{(\mathbf{p}_{\text{at}}^{\text{fin}})^2}{2m_{\text{at}}} = \frac{(\mathbf{p}_{\text{at}}^{\text{ini}})^2}{2m_{\text{at}}} + \hbar\omega, \quad (96)$$

dont on déduit

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{at}}} + \frac{\mathbf{p}_{\text{at}}^{\text{ini}} \cdot \mathbf{k}}{m_{\text{at}}}, \quad (97)$$

c'est-à-dire la somme de l'énergie de recul  $\hbar\omega_{\text{rec}} \equiv \hbar^2 k^2 / 2m_{\text{at}}$  et d'un terme décrivant l'effet Doppler lié au mouvement initial de l'atome. Le signal obtenu en mesurant l'impulsion et l'énergie des neutrons diffusés s'écrit donc

$$I(\mathbf{k}, \omega) \propto \int d^3p n(p) \delta \left[ \hbar(\omega - \omega_{\text{rec}}) - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m_{\text{at}}} \right] \quad (98)$$

où on a noté  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{at}}^{\text{ini}}$ .

Après passage en coordonnées sphériques et intégration angulaire, on arrive à

$$I(\mathbf{k}, \omega) \propto J(Y) \propto \int_{|Y|}^{+\infty} p n(p) dp \quad (99)$$

où la variable  $Y$  est définie par

$$Y = \frac{\omega - \omega_{\text{rec}}}{k}. \quad (100)$$

Une difficulté expérimentale sérieuse vient du fait que le signal  $J(Y)$  obtenu après intégration sur  $p n(p)$  masque en grande partie l'effet recherché, à savoir la présence d'un pic très étroit en  $p = 0$ . Nous avons reporté sur la figure 6 un exemple tiré de SOKOL (1995) qui montre à gauche deux prédictions théoriques très différentes pour le même système, l'hélium superfluide à basse température. L'une des courbes, obtenue avec une approche

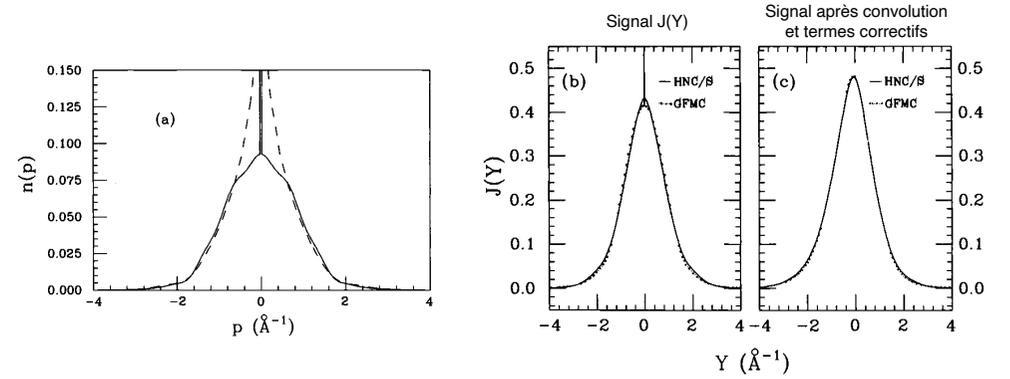
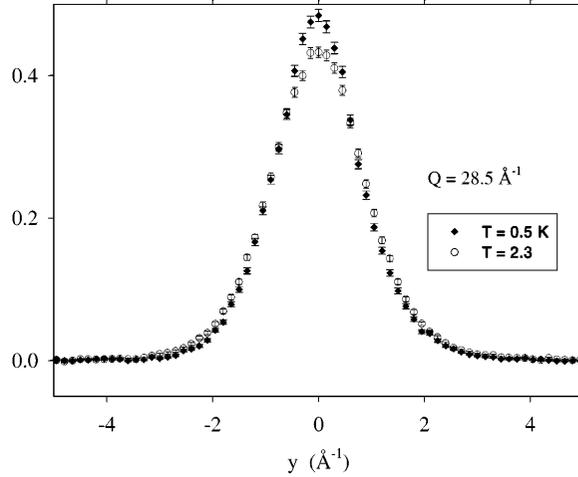


FIGURE 6. Signal attendu (à droite) pour deux distributions  $n(p)$  très différentes (à gauche). Voir le texte pour plus de détails. Figure extraite de SOKOL (1995).

Monte Carlo quantique, montre le pic étroit en  $p = 0$  correspondant à un condensat; l'autre courbe qui résulte d'une approche variationnelle est régulière en  $p = 0$ . La fonction  $J(Y)$  donnée en (99), montrée sur le panneau du milieu permet encore de différencier les deux prédictions. En revanche, après convolution par la résolution expérimentale et la prise en compte des effets correctifs liés à l'interaction de l'atome diffusant avec ses voisins, les prédictions pour les deux distributions  $n(p)$  deviennent quasi indiscernables (panneau de droite de la figure 6).

On peut néanmoins analyser finement les courbes  $J(Y)$  mesurées expérimentalement pour en déduire la fraction condensée. Les résultats récents de GLYDE, AZUAH et al. (2000) et GLYDE, DIALLO et al. (2011) (voir figure 7) conduisent dans la limite  $T \rightarrow 0$  à une fraction condensée  $n_0/n = 7.25$  (0.75)% à la pression de vapeur saturante. On est donc très loin de la limite d'applicabilité de la méthode de Bogoliubov, qui requiert une fraction condensée  $n_0/n$  voisine de 100%, puisque  $n'/n$  est l'infiniment petit du problème.

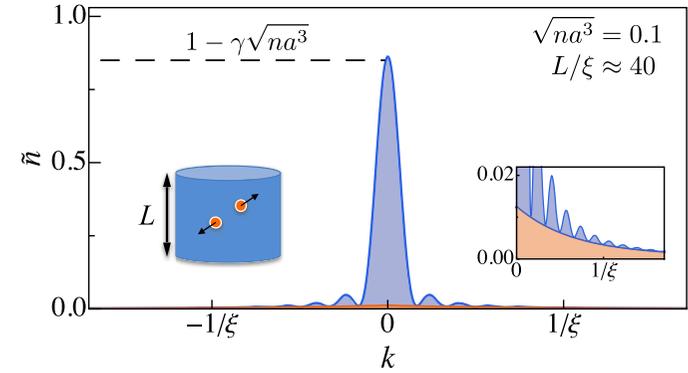


**FIGURE 7.** Distributions  $J(Y)$  mesurées dans le cas superfluide ( $T = 0.5$  K) et dans le cas normal ( $T = 2.3$  K). La différence au centre s'explique par la présence d'une fraction condensée dans le cas superfluide. Figure extraite de GLYDE, AZUAH et al. (2000).

## 4-2 Mesure sur un gaz atomique

La mesure quantitative de la déplétion quantique avec des atomes froids "souffre" d'un problème inverse de l'hélium liquide. Les densités atomiques  $y$  sont faibles, inférieures à  $10^{15}$  atomes/cm<sup>3</sup>. Avec une longueur de diffusion typique  $a$  de l'ordre de quelques nanomètres, on arrive à  $na^3$  de l'ordre de  $10^{-5}$  : la fraction non condensée est alors inférieure au %. Pour l'augmenter et pouvoir la mesurer avec une bonne précision, il faut avoir recours soit à une augmentation locale de la densité utilisant par exemple un réseau optique comme XU, LIU et al. (2006), soit à une augmentation de  $a$  grâce à une résonance de diffusion. C'est cette deuxième stratégie que nous allons décrire ici.

Nous nous intéressons à la mesure faite par le groupe de Cambridge (LOPES, EIGEN et al. 2017a) sur un gaz d'atomes de potassium (isotope <sup>39</sup>K) pour lequel une résonance de Fano-Feshbach (champ magnétique  $\sim 400$  G) permet d'augmenter la longueur de diffusion  $a$  jusqu'à une cen-



**FIGURE 8.** Distribution en impulsion pour l'état fondamental d'un gaz de Bose confiné dans une boîte de longueur  $L = 50$   $\mu\text{m}$  et de diamètre  $60$   $\mu\text{m}$ . Pour un gaz sans interaction, on attend un condensat parfait avec une distribution limitée simplement par la relation de Heisenberg (zone colorée en bleu). Pour un gaz en interaction, des ailes supplémentaires de part et d'autre de l'impulsion  $k = 0$  apparaissent dues à la déplétion quantique (en orange). Figure extraite de LOPES, EIGEN et al. (2017a).

taine de nanomètres sans que les pertes d'atomes par collision inélastique ne deviennent gênantes. Le gaz est confiné dans un potentiel en forme de boîte cylindrique (cf. figure 8). On sonde le gaz par *spectroscopie de Bragg* en l'éclairant par deux faisceaux lumineux de fréquences et vecteurs d'onde  $\omega_1, \mathbf{k}_1$  et  $\omega_2, \mathbf{k}_2$ . Par un processus absorption – émission stimulée, on transfère au gaz l'impulsion  $\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)$  et l'énergie  $\hbar\omega = \hbar(\omega_2 - \omega_1)$ .

Le gaz est préparé dans l'état d'équilibre correspondant à une interaction entre atomes caractérisée par la longueur de diffusion  $a$ . Juste avant la mesure par spectroscopie de Bragg, la longueur de diffusion est soudainement amenée à 0, de sorte qu'on obtient un gaz sans interaction, mais avec la distribution en impulsion correspondant à  $a$ . Comme dans le cas de la diffusion de neutrons par l'hélium liquide, les atomes qui sont affectés par la spectroscopie de Bragg sont ceux pour lesquels les conservations de l'impulsion et de l'énergie sont possibles, c'est-à-dire ceux d'impulsion

initiale  $\mathbf{p}_i$  et finale  $\mathbf{p}_f$  telles que

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \hbar\mathbf{q} \quad \frac{p_f^2}{2m} = \frac{p_i^2}{2m} + \hbar\omega, \quad (101)$$

ou encore, en éliminant  $\mathbf{p}_f$  :

$$\frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}}{m} + \frac{\hbar q^2}{2m} = \hbar\omega. \quad (102)$$

En pratique, le moment transféré  $\hbar\mathbf{q}$  est aligné avec l'axe du cylindre et on choisit  $\omega = \hbar q^2/2m$ , de sorte que le transfert se fera pour des atomes de vitesse initiale nulle le long de cet axe. Les atomes non transférés peuvent avoir trois origines :

- Ce sont les atomes correspondant à la déplétion quantique recherchée.
- Ce sont des atomes dont l'impulsion non nulle provient de la taille finie de la boîte selon la direction  $z$  : l'inégalité de Heisenberg impose en effet que la distribution d'impulsion selon  $z$  de l'état fondamental à une particule n'est pas un  $\delta(z)$ , mais plutôt une fonction en puissance d'un sinus cardinal.
- Ce sont des atomes correspondant à une excitation thermique. Ces derniers jouent un rôle faible, compte tenu de la température extrêmement basse du gaz (voir l'inset de la figure 9).

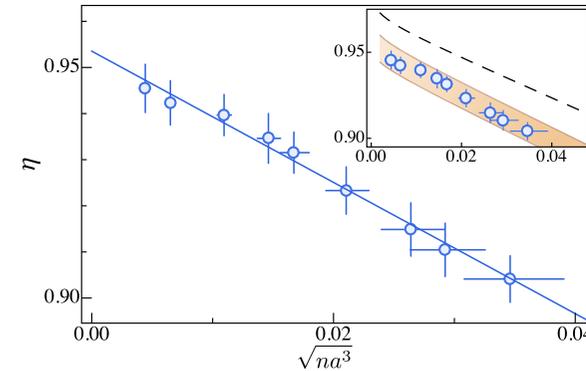
Après déconvolution des différents effets, LOPES, EIGEN et al. (2017a) sont arrivés au résultat montré en figure 9, donnant la fraction diffractée  $\eta$  en fonction de la longueur de diffusion. Ces données sont bien ajustées par la fonction

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \gamma\sqrt{na^3}\right) \quad (103)$$

avec  $\gamma = 1.5$  (2) en accord avec la prédiction  $8/(3\sqrt{\pi}) = 1.505$ . Une analyse poussée des effets systématiques dans cette expérience permet de conclure à une confirmation quantitative de la prédiction (56), avec une erreur statistique de 15 % et une erreur systématique de 20 %.

### 4-3 Paires d'atomes dans le vide de Bogoliubov

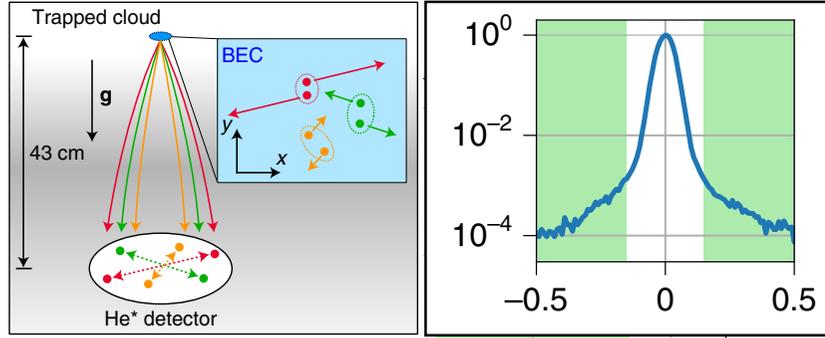
Une prédiction importante de l'approche de Bogoliubov est la corrélation entre particules d'impulsions opposées. Cette corrélation trouve son



**FIGURE 9.** Fraction maximale diffractée par une impulsion de Bragg de fréquence  $\omega = \hbar q^2/2m$ . L'ajustement linéaire correspond à  $\eta_0 = 0.954$  (5) et  $\gamma = 1.5$  (2). L'inset montre le résultat de simulations numériques, faites à  $T = 0$  (ligne tiretée) et pour  $T$  entre 3.5 et 5 nK, zone colorée en orange. Figure extraite de LOPES, EIGEN et al. (2017a).

origine dans la forme même du couplage intervenant dans  $\hat{H}'$ , en  $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ . Comme nous l'avons signalé dans notre analyse du système à deux modes, ces corrélations apparaissent dans une mesure simultanée des nombres d'occupation  $n_1$  et  $n_2$  des deux modes en question : ces deux nombres sont en principe toujours égaux,  $n_1 - n_2 = 0$ , même si la somme  $n_1 + n_2$  peut avoir une distribution large.

TENART, HERCÉ et al. (2021) ont récemment réussi à mesurer directement la corrélation entre ces paires  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  [voir aussi CAYLA, BUTERA et al. (2020)]. L'expérience est menée avec des atomes d'hélium placés dans un état électronique métastable. Les atomes sont détectés après temps de vol grâce à une galette de micro-canaux avec une efficacité de 53 %. Cette galette est placée dans l'enceinte à vide, 45 cm sous le condensat (temps de vol de 300 ms). L'impact d'un atome métastable génère une impulsion électronique qui se propage à la surface de la galette ; la mesure très précise des instants d'arrivée de cette impulsion sur la périphérie de la galette donne accès aux coordonnées  $x, y$  et à l'instant  $t$  de l'impact de l'atome, ce qui permet ensuite de remonter aux trois composantes de la vitesse initiale de l'atome.



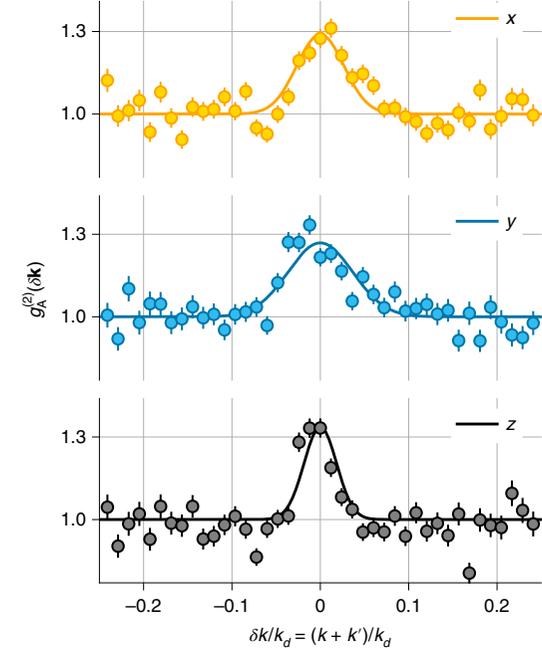
**FIGURE 10.** Gauche : expérience de temps de vol menée sur un condensat de Bose-Einstein d'atomes d'hélium métastable. Pour chaque réalisation de l'expérience, on en déduit les vitesses  $v_j$  des atomes. Droite : zone  $\Omega$  (colorée en vert) sélectionnée pour l'analyse des données. Figure extraite de TENART, HERCÉ et al. (2021).

Pour chaque réalisation de l'expérience, on sélectionne les détections en dehors du pic correspondant au condensat lui-même (zone verte  $\Omega$  de la figure 10, droite). Il y a environ 100 atomes et 0.5 paires corrélées dans cette zone. L'expérience est reproduite 2000 fois pour obtenir une moyenne significative pour la fonction de corrélation

$$g^{(2)}(\delta\mathbf{k}) = \frac{\int_{\Omega} \langle n(\mathbf{k})n(\delta\mathbf{k} - \mathbf{k}) \rangle d^3k}{\int_{\Omega} \langle n(\mathbf{k}) \rangle \langle n(\delta\mathbf{k} - \mathbf{k}) \rangle d^3k}, \quad (104)$$

où  $\langle \dots \rangle$  signifie une moyenne sur les différentes réalisations de l'expérience. Avec cette définition, les paires  $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$  recherchées doivent apparaître comme un pic en  $\delta\mathbf{k} = 0$ . Notons que pour augmenter la déplétion quantique, TENART, HERCÉ et al. (2021) ont placé les atomes dans un réseau optique, qui a pour effet de concentrer les atomes aux minima du potentiel et donc d'accroître la densité effective  $n$  intervenant dans  $\sqrt{na^3}$ .

Un exemple de résultat est montré sur la figure 11. Le pic de corrélation en  $\delta\mathbf{k} = 0$  apparaît clairement. Cette figure a été obtenue à très basse température, pour une fraction condensée de 84%. TENART, HERCÉ et al. (2021) ont étudié la dépendance de la hauteur de ce pic avec la température et montré qu'il devient quasiment indétectable quand on s'approche de la température critique de condensation. Ils ont également vé-



**FIGURE 11.** Fonction de corrélation  $g^{(2)}(\delta\mathbf{k})$  mesurée selon les trois directions de l'espace, mettant clairement en évidence les corrélations entre paires d'impulsions opposées. Figure extraite de TENART, HERCÉ et al. (2021).

rifié que sa hauteur variait comme  $1/\rho_{\Omega}$ , où la densité  $\rho_{\Omega}$  est définie par  $\rho_{\Omega} = \int_{\Omega} \langle n(\mathbf{k}) \rangle d^3k$ ; c'est la dépendance attendue si l'on suppose une corrélation parfaite entre  $n(\mathbf{k})$  et  $n(-\mathbf{k})$ .



## Chapitre IV

# L'état fondamental du gaz de Bose : LHY, spectre d'excitation et gouttelettes quantiques

Nous continuons dans ce chapitre l'étude du gaz de Bose dilué en nous intéressant à la fois à l'énergie de son état fondamental et à son spectre d'excitation. Grâce à l'approche de Bogoliubov, nous connaissons l'expression de l'énergie  $E_0$  du fondamental pour un gaz de densité  $n = N/L^3$  :

$$\frac{E_0}{L^3} = \frac{1}{2}gn^2 \left[ 1 + \alpha \sqrt{na^3} + \dots \right] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \approx 4.8, \quad (1)$$

où  $a$  est la longueur de diffusion caractérisant les interactions en onde  $s$  et  $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$ . Le terme dominant  $gn^2/2$  représente le terme de champ moyen et le terme suivant est la correction de LEE, HUANG et al. (1957) décrivant (à l'ordre le plus bas) l'effet des fluctuations quantiques.

L'expression (1) résulte d'une approximation quadratique de l'hamiltonien vis-à-vis des opérateurs  $a_{\mathbf{k}}$  et  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  avec  $\mathbf{k} \neq 0$ , détruisant et créant une particule dans un état d'impulsion non nulle. Cette approximation quadratique est valable quand la déplétion quantique  $n'/n = (N - N_0)/N$  donnant la fraction d'atomes en dehors de l'état  $\mathbf{k} = 0$  est faible. L'approche de Bogoliubov permet d'estimer cette déplétion :

$$\frac{n'}{n} \approx \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3}, \quad (2)$$

ce qui fait apparaître le paramètre  $\sqrt{na^3}$ . La condition d'auto-cohérence de

l'approche de Bogoliubov s'écrit donc

$$\sqrt{na^3} \ll 1. \quad (3)$$

Le spectre d'excitation se déduit de l'expression de l'hamiltonien après les transformations canoniques de Bogoliubov, qui introduisent des nouveaux opérateurs bosoniques  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$  :

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (4)$$

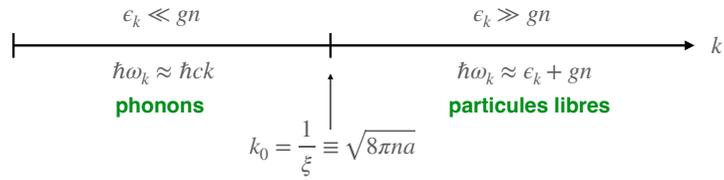
avec pour l'approche pseudo-potentiel :

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}} = [\epsilon_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} + 2gn)]^{1/2}, \quad \epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (5)$$

L'action de  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$  sur le vide de Bogoliubov crée donc une quasi-particule d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et d'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ . La dépendance en  $k$  de  $\omega_{\mathbf{k}}$  permet d'emblée d'identifier la valeur caractéristique  $k_0$  (cf. figure 1)

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = gn \quad \Rightarrow \quad k_0 = \frac{1}{\xi} = \sqrt{8\pi na}. \quad (6)$$

Pour  $k \ll k_0$ , on trouve le régime phononique  $\omega_{\mathbf{k}} \approx ck$ , avec la vitesse du son  $c = \hbar k_0 / \sqrt{2}m$ . Pour  $k \gg k_0$ , on trouve le régime de particule libre



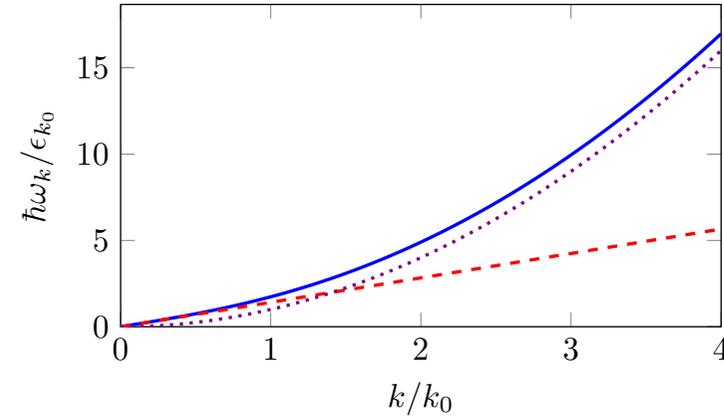
**FIGURE 1.** Les deux régimes de valeurs de  $k$  pour le pseudo-potential dans le cadre de l'approche de Bogoliubov. Une autre valeur caractéristique de  $k$ , de l'ordre de  $1/a \gg k_0$ , apparaîtra plus loin. Par ailleurs, pour un potentiel de portée finie  $b$ , l'échelle  $k \sim 1/b$  peut également jouer un rôle important (cf. cours 3).

$\hbar\omega_k \approx \epsilon_k + gn$ . Rappelons l'origine du déplacement d'énergie  $gn$  dans ce régime : il doit être compris comme la différence  $gn = 2gn - gn$ . Le premier terme  $2gn$  représente l'énergie d'interaction totale (terme direct + terme d'échange) de la particule excitée d'impulsion  $\hbar k$  avec le condensat de densité  $n$ ; le second terme correspond à l'énergie initiale  $gn$  de la particule quand elle fait partie du condensat (terme direct).

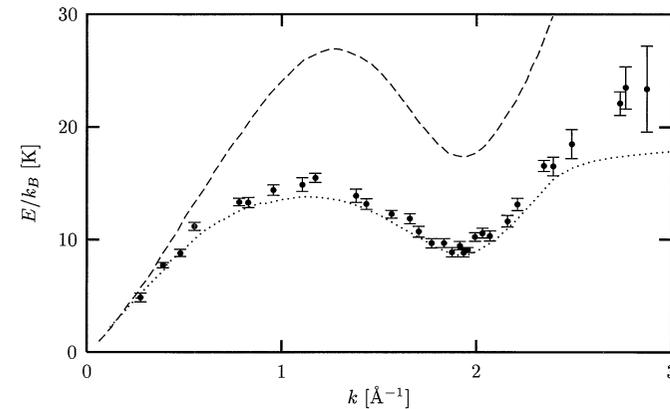
Cette relation de dispersion, tracée en figure 2, est obtenue en supposant un fluide de faible densité [cf. (3)] et ne permet donc pas de décrire les systèmes en interaction forte comme l'hélium liquide : en particulier, elle ne contient pas sa fameuse structure en *roton-maxon* reportée sur la figure 3. En revanche, elle est en principe bien adaptée à la description des condensats de Bose-Einstein gazeux, tout du moins tant que l'on ne s'approche pas trop près d'une résonance de diffusion.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par décrire les mesures expérimentales de l'énergie LHY faites sur des gaz atomiques dilués. Nous passerons ensuite aux mesures du spectre d'excitation : nous présenterons d'abord les résultats désormais classiques de STEINHAEUER, OZERI et al. (2002) qui sont très bien décrits par (5). Ces mesures ont été faites à la fois dans le régime phononique et dans le régime de particule libre, mais en gardant toujours  $ka \ll 1$ . Nous nous intéresserons ensuite à des expériences plus récentes menées à Boulder (PAPP, PINO et al. 2008) et à Cambridge (LOPES, EIGEN et al. 2017b), qui ont étendu la plage de mesure à la zone  $ka \sim 1$ , ce qui a conduit à des déviations notables par rapport à (5).

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée au cas d'un mélange



**FIGURE 2.** Relation de dispersion de Bogoliubov (5) en trait plein bleu avec  $k_0 = 1/\xi = \sqrt{8\pi na}$  et  $\epsilon_{k_0} = \hbar^2 k_0^2 / 2m$ . La droite rouge tiretée correspond au régime de phonons. La courbe pointillée violette donne la relation de dispersion d'une particule libre  $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ .



**FIGURE 3.** Spectre d'excitation pour l'hélium superfluide; la courbe pointillée représente les données expérimentales de DONNELLY, DONNELLY et al. (1981) et les points avec barre d'erreur les résultats du calcul Monte Carlo quantique de MORONI, GALLI et al. (1998). La ligne tiretée est une borne supérieure obtenue à partir de l'approche de Feynman. Figure extraite de PITAEVSKII & STRINGARI (2016).

de deux gaz quantiques notés 1 et 2. Selon les valeurs des trois paramètres d'interaction  $g_{ij}$  avec  $i, j = 1, 2$ , ce mélange peut être miscible ou immiscible dans le cadre de la théorie de champ moyen. En particulier, l'immiscibilité se produit quand la relation de dispersion du mélange homogène, qui généralise (5), fait apparaître des fréquences  $\omega$  complexes, conduisant à des divergences exponentielles d'une petite perturbation initiale. Nous verrons alors, suivant la proposition de PETROV (2015), comment il est possible d'utiliser des effets LHY, donc au-delà du champ moyen, pour stabiliser malgré tout ce mélange sous forme de gouttelettes quantiques.

## 1 Mesures de l'énergie LHY

### 1-1 Le problème des pertes à trois corps

La mesure quantitative de l'énergie LHY n'est pas aisée dans la mesure où elle n'est par définition (au moins pour un gaz à une seule composante) qu'une petite correction par rapport à l'énergie de champ moyen. On pourrait songer à accroître expérimentalement sa contribution relative en augmentant momentanément la longueur de diffusion  $a$  grâce à une résonance de Feshbach, quitte à renoncer à l'approche de Bogoliubov pour décrire précisément le système. On pourrait alors tirer parti du fait que  $E_{\text{LHY}}$  croît comme  $a^{5/2}$  [cf. (1)] alors que l'énergie de champ moyen ne croît que comme  $a$ .

Néanmoins, cette augmentation de  $a$  ne peut pas se faire en pratique jusqu'à des valeurs arbitrairement grandes. On est en effet limité par les pertes par recombinaison à trois corps, dont le taux varie comme  $L_3 \sim \hbar a^4/m$ , à un facteur multiplicatif près, au voisinage d'une résonance de diffusion (FEDICHEV, REYNOLDS et al. 1996). Dans ce processus, deux des atomes forment une molécule de taille  $\sim a$  et d'énergie  $\sim -\hbar^2/ma^2$ , le troisième corps emportant l'énergie libérée lors de la formation du dimère faiblement lié. Ce dimère peut ensuite relaxer vers un état moléculaire plus fortement lié et il s'échappe alors du piège confinant les particules. Pour qu'une mesure de l'énergie LHY soit fiable, il faut que l'augmentation de  $a$  ne soit faite que pendant une durée  $\tau$  assez courte, telle que  $L_3 n^2 \tau \ll 1$ , assurant ainsi que la densité varie peu pendant la mesure. Mais la du-

rée  $\tau$  doit par ailleurs être au moins égale au temps que met le système pour atteindre son équilibre pour la nouvelle valeur de  $a$ , typiquement  $\hbar/\mu$ . Comme ordre de grandeur, on peut prendre ici la valeur du potentiel chimique donné par la théorie de champ moyen,  $\mu = gn$ . La conjonction de ces deux inégalités entraîne :

$$\frac{\hbar}{\mu} < \tau < \frac{1}{L_3 n^2} \quad \Rightarrow \quad na^3 \ll 1. \quad (7)$$

À température nulle<sup>1</sup>, l'étude d'un gaz de Bose à l'équilibre ne peut se faire que pour de faibles valeurs de  $na^3$  (pour une revue, voir CHEVY & SALOMON (2016)). Nous allons détailler dans ce qui suit quelques pistes qui ont été explorées pour mettre en évidence cette énergie LHY.

### 1-2 Mode de respiration

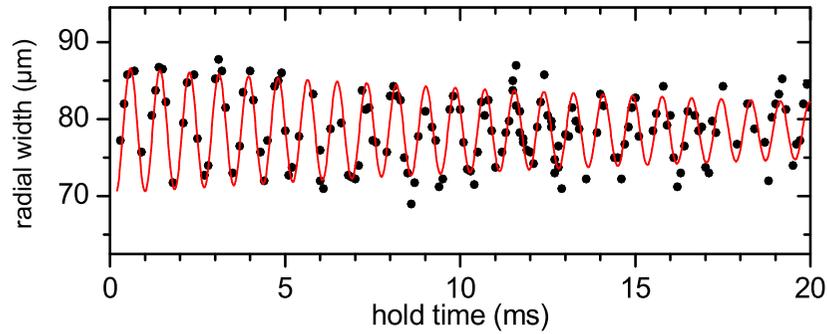
Cette approche tire parti d'un résultat théorique important établi par PITAEVSKII & ROSCH (1997). Considérons un condensat décrit par la théorie de champ moyen, confiné dans un piège harmonique isotrope à deux dimensions dans le plan  $xy$ , (i) sous forme de disque ou (ii) sous forme d'un cigare très allongé d'axe  $z$ . Dans ces deux cas, le mode de respiration dans le plan  $xy$  a toujours pour fréquence  $\omega_{\text{resp.}} = 2\omega$ , où  $\omega$  est la fréquence du piège. Ce résultat se prouve relativement simplement en étudiant l'évolution de  $\langle r^2 \rangle(t)$  à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii à 2D :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + gN|\psi|^2 \psi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \psi \quad (8)$$

quelle que soit la valeur du produit  $Ng$  ( $\psi$  est normalisée à l'unité). Il a été vérifié expérimentalement pour la première fois par CHEVY, BRETIN et al. (2001).

Toute déviation de  $\omega_{\text{resp.}}$  par rapport à la fréquence  $2\omega$  signale donc une contribution au-delà du champ moyen à l'énergie du gaz. C'est le principe de l'expérience de ALTMAYER, RIEDL et al. (2007), menée sur un gaz de  ${}^6\text{Li}$ , l'isotope fermionique du lithium. Les auteurs se sont placés au voisinage d'une résonance de Feshbach (834 G), du côté  $a > 0$  de la résonance. En

1. Nous verrons dans un prochain chapitre que cette condition peut être assouplie à température plus élevée, dans le régime non dégénéré, et qu'elle devient  $n\lambda^3 \ll 1$ .

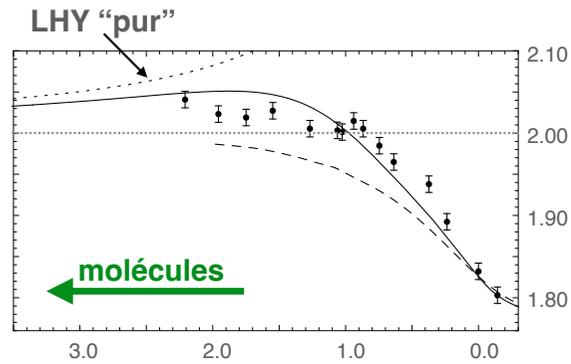
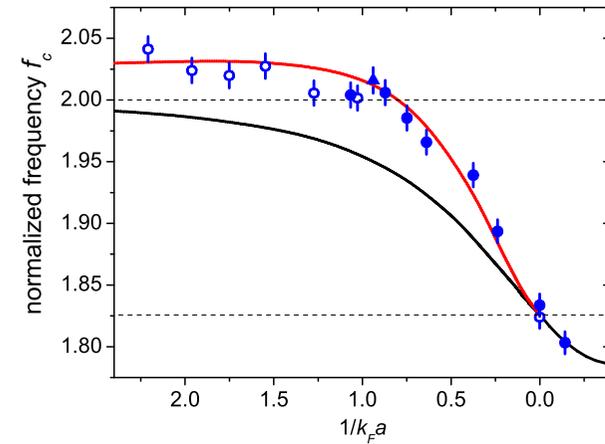


**FIGURE 4.** Evolution de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle(t)}$  (mode de respiration) pour un gaz de  ${}^6\text{Li}$  (fermions) au voisinage d'une résonance de Feshbach. On s'est placé ici sur le côté  $a > 0$  de la résonance de sorte que les atomes de  ${}^6\text{Li}$  sont présents essentiellement sous forme de molécules bosoniques de  ${}^6\text{Li}_2$ . La fréquence (ici 1185 Hz) est mesurée avec une précision  $\sim 10^{-3}$ . Figure extraite de ALTMAYER, RIEDL et al. (2007).

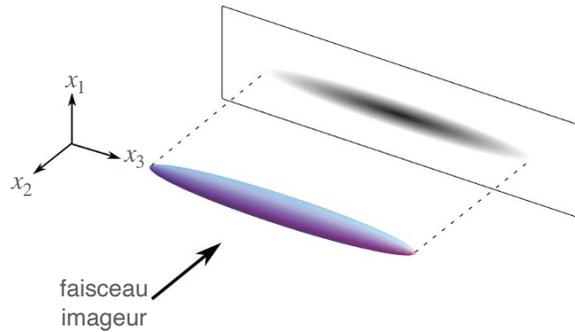
première approximation, le gaz dans son état d'équilibre est alors essentiellement formé de dimères  ${}^6\text{Li}_2$ , des molécules bosoniques qui forment un condensat de Bose-Einstein. Ce gaz est confiné dans un piège hybride : le confinement harmonique dans le plan  $xy$  est assuré par un faisceau laser de longueur d'onde 1030 nm et de waist  $54 \mu\text{m}$ . On ajuste la fréquence  $\omega/2\pi$  entre 290 et 590 Hz en variant la puissance de ce laser. Le confinement le long de l'axe  $z$  est assuré par un piège magnétique, de fréquence  $\omega_z/2\pi = 22.4 \text{ Hz}$ .

L'excitation du mode de respiration est faite en réduisant pendant un court intervalle de temps la puissance du laser de confinement. On laisse ensuite le gaz osciller dans le piège pendant une durée ajustable avant de mesurer son rayon. Un exemple d'oscillation est représenté sur la figure 4.

Cette expérience est répétée pour différentes valeurs de la longueur de diffusion  $a$  et le rapport  $\omega_{\text{resp}}/\omega$  est tracé en fonction de  $1/a$  en figure 5. Dans le régime condensat moléculaire ( $k_F a \lesssim 1$ ), ce rapport est notablement au dessus de 2, et la déviation par rapport à 2 est en bon accord avec un calcul numérique basé sur une approche Monte Carlo quantique (figure 5, haut). Notons que les données expérimentales ont été (légèrement) corrigées pour prendre en compte la non-isotropie du piège ( $\sim 7\%$ ) ainsi que



**FIGURE 5.** Haut : Variation de  $f_c = \omega_{\text{resp}}/\omega$  en fonction de  $1/k_F a$  avec  $k_F = (24m^3\omega^2\omega_z N/\hbar^3)^{1/6}$ . Les disques ouverts (resp. pleins) ont été obtenus avec  $\omega/2\pi = 290 \text{ Hz}$  (resp.  $590 \text{ Hz}$ ). La courbe noire est la prédiction de la théorie de champ moyen et elle est compatible avec une limite  $\omega_{\text{resp}} = 2\omega$  dans la limite  $k_F a \ll 1$ , correspondant à un condensat moléculaire en faible interaction. La courbe rouge est un calcul Monte Carlo quantique, prenant en compte les corrections de type LHY. Figure extraite de ALTMAYER, RIEDL et al. (2007). Bas : mêmes données expérimentales, avec en tireté la contribution des seuls effets LHY. La courbe continue est déduite de l'équation d'état mesurée par NASCIMBÈNE, NAVON et al. (2010). Figure adaptée de la thèse de S. Nascimbene.



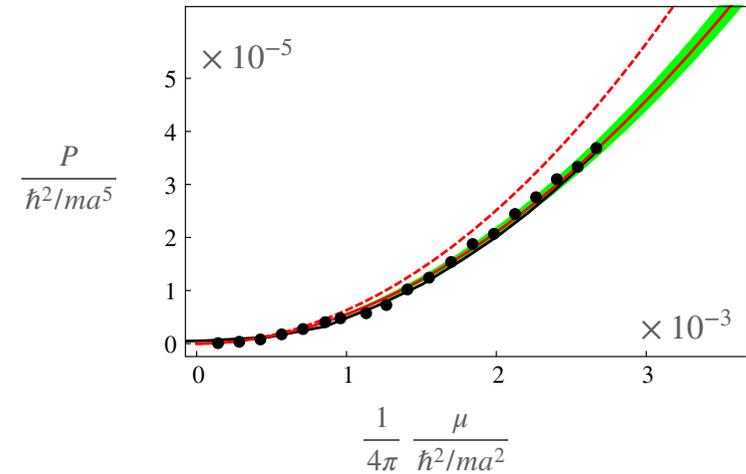
**FIGURE 6.** Principe de la mesure de l'équation d'état  $P(\mu)$  à partir de l'image d'un gaz confiné dans un piège harmonique. En utilisant l'approximation de densité locale, la pression  $P$  s'obtient à partir de  $\int n(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$  (cf. chapitre 1).

son anharmonicité.

Le fait que l'on travaille ici au voisinage d'une résonance de Feshbach complique bien sûr l'attribution aux seuls effets LHY de la valeur non nulle de  $\omega_{\text{resp}} - 2\omega$ . Nous avons reporté en figure 5 (bas) une analyse faite par S. Nascimbène à partir des prédictions théoriques de STRINGARI (2004). Elle montre que pour les valeurs de  $1/k_F a$  explorées ici, qui restent relativement faibles, on est encore loin de la prédiction pour un "simple" condensat de bosons.

### 1-3 Détermination de l'équation d'état

Nous avons décrit au chapitre 1 le principe de la mesure de l'équation d'état d'un gaz confiné dans un piège harmonique à partir de son profil de densité intégré selon deux directions de l'espace (NASCIMBÈNE, NAVON et al. 2010) [voir figure 6]. Dans le chapitre 1, nous nous étions intéressés à la limite de basse densité dans l'espace des phases et nous avons décrit comment on pouvait extraire de ces expériences certains coefficients du développement du viriel. Le même type d'expérience permet d'étudier l'équation d'état à très basse température, dans le régime fortement dégénéré.



**FIGURE 7.** Equation d'état pour un gaz de Bose de  ${}^7\text{Li}$  : mesure de la pression  $P$  en fonction du potentiel chimique  $\mu$ . Lignes rouges continue et tiretée : prédiction analytique incluant ou non la correction LHY. Ligne noire : résultats numériques obtenus par une méthode Monte Carlo quantique. La région colorée en vert délimite la zone d'incertitude liée à la détermination de  $a$ . Figure extraite de NAVON, PIATECKI et al. (2011).

NAVON, PIATECKI et al. (2011) ont utilisé un gaz de  $\sim 60\,000$  atomes de  ${}^7\text{Li}$  (isotope bosonique du lithium) qu'ils ont préparé à une valeur "standard" pour la longueur de diffusion,  $a \sim 10$  nm. Ils ont ensuite modifié le champ magnétique pour se rapprocher d'une résonance de Fano-Feshbach ( $B = 738$  G) et mesurer la pression du gaz pour différentes valeurs de  $a$ , allant de 30 à 100 nm. Ces mesures sont faites à très basse température de sorte que la seule variable thermodynamique pertinente en point de vue grand-canonique est le potentiel chimique  $\mu$ , que l'on peut mesurer en unité de l'échelle d'énergie  $\hbar^2/ma^2$ .

Les résultats pour la pression, mesurée en unités de  $P_a = \hbar^2/ma^5$ , sont montrés en figure 7. La prédiction de la théorie de champ moyen est  $P = gn^2/2$  et  $\mu = gn$  [avec comme toujours  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ], et elle correspond donc à la loi quadratique  $P = \mu^2/2g$ . Cette prédiction, indiquée par la ligne tiretée rouge, n'est clairement pas en accord avec les résultats

expérimentaux pour les plus grandes valeurs de  $\mu$ .

La prise en compte des fluctuations quantiques se fait en utilisant le résultat LHY donné en (1) et les relations thermodynamiques prises ici à entropie nulle (état fondamental) :

$$P = - \left( \frac{\partial E}{\partial L^3} \right)_{S,N} = \frac{1}{2} g n^2 \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \sqrt{na^3} + \dots \right) \quad (9)$$

$$\mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,L^3} = g n \left( 1 + \frac{5}{2} \alpha \sqrt{na^3} + \dots \right) \quad (10)$$

dont on déduit par élimination de  $na^3$  :

$$P = \frac{\mu^2}{2g} \left( 1 - \alpha \sqrt{\mu a^3 / g} \right) \quad (11)$$

Cette prédiction LHY, indiquée en trait continu rouge sur la figure 7, est en excellent accord avec les données, tout comme les résultats Monte Carlo (ligne continue noire) obtenus en supposant une température  $T \lesssim T_c/4$ , où  $T_c$  est la température de condensation du gaz parfait.

#### 1-4 Distribution en impulsion et énergie cinétique

Pour terminer cette partie consacrée à l'énergie du fondamental du gaz de Bose, nous allons revenir sur la distribution en impulsion déduite de l'approximation de Bogoliubov et discuter l'énergie cinétique totale qui en découle.

Pour cette analyse, nous quittons momentanément l'approche pseudo-potentiel pour revenir à un potentiel d'interaction régulier  $V(r)$  de transformée de Fourier  $\tilde{V}_k$ . Dans le calcul de la déplétion quantique du chapitre précédent, nous avons fait apparaître la population  $\bar{n}_k$  de chaque état d'impulsion  $\hbar \mathbf{k}$  :

$$\bar{n}_k = |v_k|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\epsilon_k + n\tilde{V}_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + 2n\tilde{V}_k\epsilon_k}} - 1 \right], \quad (12)$$

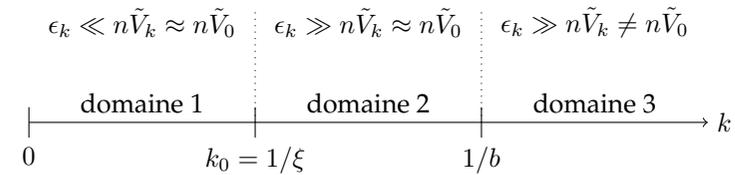


FIGURE 8. Les trois domaines pertinents pour le nombre d'onde  $k$ .

dont nous déduisons l'énergie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \bar{n}_k. \quad (13)$$

La population  $\bar{n}_k$  représente la distribution en impulsion du gaz, telle qu'on peut la mesurer dans une expérience de temps de vol, si on coupe brusquement le potentiel d'interaction au début de l'expansion balistique.

Pour un potentiel régulier, nous avons expliqué au chapitre précédent que l'on peut distinguer trois domaines pour  $k$ , que nous rappelons en figure 8 :

- Le domaine phononique,  $k \ll \xi^{-1}$ , qui conduit à  $\bar{n}_k \propto 1/k\xi$ . Ces états sont donc fortement peuplés sans que cela ne conduise à une divergence de la déplétion quantique ou de l'énergie cinétique du fait du jacobien en  $k^2 dk$  qui apparaît dans les intégrations à 3D.
- Le domaine intermédiaire  $\xi^{-1} \ll k \ll b^{-1}$ , dans laquelle le terme d'énergie cinétique  $\epsilon_k$  domine le terme d'interaction  $\tilde{V}_k$ , mais où l'on peut encore remplacer  $\tilde{V}_k$  par sa valeur à l'origine  $\tilde{V}_0$ . On obtient alors une loi de puissance pour la distribution en impulsion :

$$\bar{n}_k \approx \frac{n^2 \tilde{V}_0^2}{4\epsilon_k^2} = \frac{C/L^3}{k^4} \quad \text{avec} \quad C \equiv (4\pi na)^2 nN. \quad (14)$$

Cette loi en  $k^{-4}$  est une caractéristique importante des gaz en interaction. Nous la retrouverons lorsque nous étudierons le formalisme du contact de Tan.

- Le domaine de très grande impulsion,  $b^{-1} \ll k$ . La décroissance de  $\tilde{V}_k$  devient alors significative et la distribution en impulsion décroît plus

vite que dans le domaine intermédiaire :

$$\bar{n}_k \propto \frac{\tilde{V}_k^2}{k^4}. \quad (15)$$

Cette zone de très grande impulsion est absente pour le pseudo-potentiel, puisque ce dernier revient à prendre  $\tilde{V}_k$  constant égal à  $g$  pour toutes valeurs de  $k$ .

La décroissance plus rapide que  $k^{-4}$  de  $\bar{n}_k$  est essentielle pour assurer que l'énergie cinétique du gaz prend une valeur finie. En effet, à trois dimensions, une distribution en impulsion variant comme  $C/k^4$  jusqu'à l'infini conduit à une divergence de l'intégrale

$$\int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{C}{k^4} d^3k = \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{C}{k^4} 4\pi k^2 dk. \quad (16)$$

Une telle divergence, qui conduit donc à une énergie cinétique infinie, se produira si l'on modélise  $V(\mathbf{r})$  un potentiel de contact puisqu'on aura alors  $\tilde{V}_k = \tilde{V}_0$  pour tout  $k$ . Comme l'énergie totale  $E_{\text{LHY}}$  est quant à elle finie, cela entraîne que la divergence positive de l'énergie cinétique doit être compensée par une divergence négative de l'énergie d'interaction. Ce dernier point se vérifie aisément ; écrivons le potentiel d'interaction intervenant dans l'hamiltonien de Bogoliubov sous la forme

$$\hat{V} = gn \left( \hat{N}' + \hat{O} \right) \quad (17)$$

où  $\hat{N}' = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$  est l'opérateur nombre de particules en dehors de  $\mathbf{k} = 0$  et

$$\hat{O} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + \text{H.c.} \quad (18)$$

La divergence provient de la contribution de  $\langle \hat{O} \rangle$  qui s'écrit dans le vide de Bogoliubov :

$$\langle \hat{O} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle + \text{c.c.} = -\sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}. \quad (19)$$

L'argument de la somme se comporte en effet comme  $k^{-2}$  aux grands  $\mathbf{k}$ , de sorte que l'intégrale tri-dimensionnelle sur  $k$  (avec son jacobien en  $4\pi k^2 dk$ ) diverge. Nous reviendrons sur ces deux divergences de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle lors de notre étude du contact.

## 2 Le spectre d'excitation d'un condensat

### 2-1 Resommation du développement de Born

La diagonalisation de l'hamiltonien de Bogoliubov menée aux chapitres précédents nous a conduit à l'expression de la relation de dispersion pour les excitations élémentaires du gaz. Nous avons traité deux cas différents : pour un potentiel régulier à l'approximation de Born, nous avons trouvé

$$\text{Pot. régulier (Born) : } \quad \hbar\omega_k = \left[ \epsilon_k \left( \epsilon_k + 2n\tilde{V}_k \right) \right]^{1/2} \quad (20)$$

et pour le pseudo-potentiel :

$$\text{Pseudo-pot. : } \quad \hbar\omega_k = [\epsilon_k (\epsilon_k + 2ng)]^{1/2} \quad \text{avec } g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (21)$$

Intéressons-nous à la première de ces deux relations, concernant le cas d'un potentiel régulier. On voit qu'elle fait intervenir la transformée de Fourier du potentiel  $\tilde{V}_k$ . Si nous nous limitons à des moments  $k$  petits devant  $1/b$ , où  $b$  est la portée du potentiel, on peut utiliser

$$k \ll \frac{1}{b} : \quad \tilde{V}_k \approx \tilde{V}_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a^{(1)}}{m} \quad (22)$$

où  $a^{(1)}$  est la longueur de diffusion, à l'ordre 1 du développement de Born. Rappelons qu'il n'est légitime de se limiter à ce premier ordre que si la longueur de diffusion  $a$  est très petite devant la portée  $b$ , soit  $\frac{1}{b} \ll \frac{1}{a}$ . En fait, comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent, il est possible d'aller plus loin dans le développement de Born et de resommer toute sa série (BELIAEV 1958a ; BELIAEV 1958b). Cela impose d'aller au-delà de l'hamiltonien de Bogoliubov : pour étudier l'interaction entre un atome d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et un atome du condensat d'impulsion nulle, il faut prendre en compte le passage par un état virtuel où les deux atomes ont pour impulsion  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  avec  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  :

$$\mathbf{k}, N-1:0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, N-2:0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{k}, N-1:0 \quad (23)$$

ce qui n'est possible que par l'action de termes comme  $a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}} a_0$  pour la première flèche et  $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_0^\dagger a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2}$  pour la seconde. Ces termes, qui ne

contiennent qu'un opérateur  $a_0$  ou  $a_0^\dagger$ , ont été négligés quand on a restreint l'hamiltonien à  $N$  corps à son approximation quadratique.

Une fois cette resommation effectuée, on arrive alors à une expression formellement identique à celle obtenue dans le cas du pseudo-potential en (21). La contrainte  $a \ll b$  n'a plus de raison d'être si tous les termes du développement de Born sont pris en compte (à condition que ce développement converge, bien sûr) et on arrive pour le potentiel régulier au même résultat que celui obtenu pour le pseudo-potential :

$$k \ll \frac{1}{a}, \frac{1}{b} : \quad \hbar\omega_k = [\epsilon_k (\epsilon_k + 2ng)]^{1/2}. \quad (24)$$

## 2-2 Mesure du spectre de Bogoliubov

Nous décrivons ici brièvement la mesure quantitative du spectre de Bogoliubov faite par STEINHAUER, OZERI et al. (2002) [voir aussi cours 2016]. Cette expérience repose sur la spectroscopie de Bragg, que nous avons déjà décrite au chapitre précédent. Rappelons que cette technique expérimentale consiste à étudier la réponse linéaire du fluide à une sonde qui peut transférer un quantum d'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$  et d'énergie  $\hbar\omega$ . Pour les gaz d'atomes froids, cette sonde est généralement<sup>2</sup> formée par une paire de faisceaux lumineux de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , les atomes gagnant l'impulsion  $\hbar\mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  et l'énergie  $\hbar\omega = \hbar(\omega_1 - \omega_2)$  dans un processus "absorption – émission stimulée".

STEINHAUER, OZERI et al. (2002) ont travaillé avec un condensat de rubidium 87, et une paire de faisceaux lumineux dont l'angle varie entre 3 et 130 degrés, ce qui correspond à  $q$  entre 0.4 et 15  $\mu\text{m}^{-1}$ . La longueur de cicatrisation est  $\xi \approx 0.25 \mu\text{m}$ , de sorte que  $q\xi$  varie entre 0.1 (régime phononique) et 4 (régime de particules libres). Un exemple typique de résultat est montré en figure 9 pour  $q = 2.8 \mu\text{m}^{-1}$ . Cette image prise après un temps de vol montre clairement la (faible) fraction des atomes excités par le pulse lumineux, à la droite du condensat.

Si l'on suppose que le signal observé correspond à la création d'une seule excitation élémentaire pour chaque processus de Bragg élémentaire (nous reviendrons sur cette hypothèse plus loin), la courbe de résonance

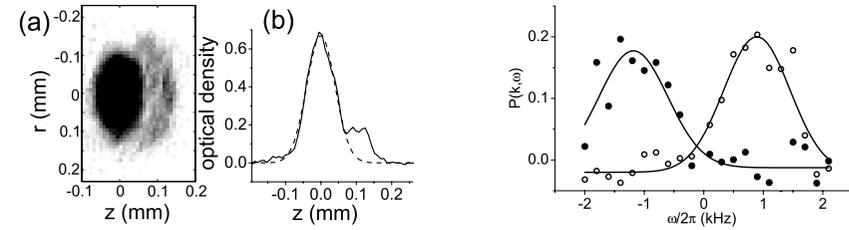


FIGURE 9. Gauche : Image d'un nuage atomique après un pulse de Bragg. Le nuage diffracté se déplace dans le sens des  $x > 0$ . Droite : courbe de résonance. Les deux types de symboles correspondent à des nuages diffractés se déplaçant dans le sens  $x > 0$  ou  $x < 0$ . Figure extraite de STEINHAUER, OZERI et al. (2002).

de ces processus donne directement accès à la relation de dispersion recherchée  $\omega_q$ . Les résultats sont regroupés en figure 10. L'accord avec la prédiction de Bogoliubov (24) est remarquable, aussi bien dans le régime phononique que dans celui des particules libres.

On peut s'interroger sur l'effet des termes LHY, donc au-delà du champ moyen, sur ce spectre d'excitation.

- Dans le cas phononique, ces effets vont modifier la vitesse du son dans le condensat. Partons de la relation générale

$$c = \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{\partial P}{\partial n} \right)_S}, \quad (25)$$

où la dérivée est prise à entropie constante, c'est-à-dire pour l'état fondamental dans le cas qui nous intéresse ici. La pression  $P$  a été donnée en (9) et on en déduit :

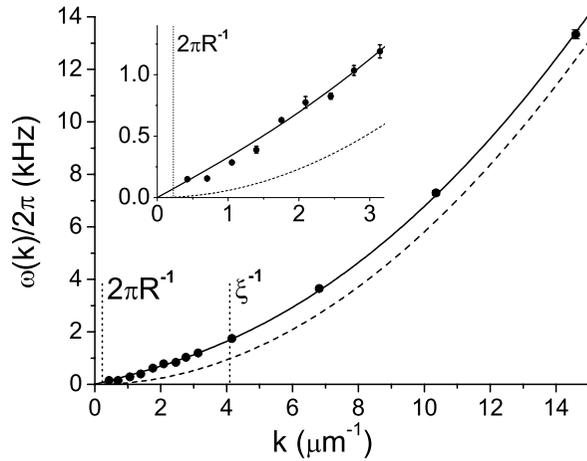
$$c = \sqrt{\frac{gn}{m} \left[ 1 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} + \dots \right]}. \quad (26)$$

Ce résultat coïncide avec celui trouvé par Beliaev par la méthode des fonctions de Green [voir aussi MOHLING & SIRLIN (1960)].

- Dans le régime de particules libres  $k\xi \gg 1$  (mais  $ka \ll 1$ ), MOHLING & SIRLIN (1960) écrivent la relation de dispersion d'une excitation sous la forme

$$\xi^{-1} \ll k \ll a^{-1} : \quad \hbar\omega(k) \approx \epsilon_k + 2gn - \mu, \quad (27)$$

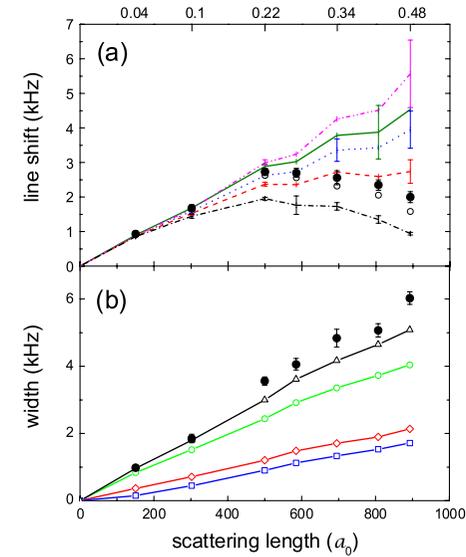
2. voir malgré tout GUARRERA, WÜRTZ et al. (2011) pour un autre type de sonde.



**FIGURE 10.** Spectre d'excitation mesuré par spectroscopie de Bragg. La courbe continue montre la prédiction (24) pour le spectre de Bogoliubov. Figure extraite de STEINHAEUER, OZERI *et al.* (2002).

où  $\mu$  est le potentiel chimique du condensat donné en (10). L'interprétation physique de (27) est en ligne avec celle proposée plus haut dans ce régime : cette relation représente la différence entre l'énergie de la particule dans son état final,  $\epsilon_k + 2gn$ , non modifiée par les termes au-delà du champ moyen à cet ordre du calcul<sup>3</sup>, et l'énergie à fournir pour extraire une particule du condensat, c'est-à-dire le potentiel chimique  $\mu$ .

Pour chacun de ces deux régimes, phononique et particule libre, il semble difficile de détecter les effets au-delà du champ moyen dans un gaz de Bose en interaction faible, compte tenu de la précision des mesures.



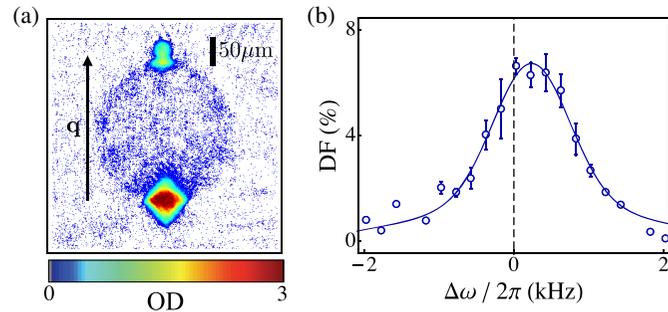
**FIGURE 11.** Haut : spectroscopie de Bragg d'un condensat de  $^{85}\text{Rb}$ , où l'on représente la fréquence de résonance  $\omega_{\text{res}}/2\pi$  mesurée après soustraction de la fréquence "à une particule"  $\epsilon_q/h$ . Les symboles ouverts correspondent aux mesures directes et les symboles fermés sont les données corrigées, une fois la contribution de la partie thermique du nuage prise en compte. Les lignes correspondent à différentes modélisations théoriques. Bas : largeur de la résonance de Bragg donnant accès, au moins qualitativement, à la durée de vie des excitations. Figure extraite de PAPP, PINO *et al.* (2008).

### 2-3 Expériences de Boulder et Cambridge : $q \gtrsim 1/a$

En utilisant respectivement du rubidium 85 et du potassium 39, PAPP, PINO *et al.* (2008) et LOPES, EIGEN *et al.* (2017b) ont étendu la mesure de la réponse d'un condensat par spectroscopie de Bragg à des valeurs beaucoup plus grandes de  $qa$ , en profitant de l'existence d'une résonance de Feshbach pour ces espèces atomiques.

Les résultats de PAPP, PINO *et al.* (2008) sont montrés en figure 11. La fi-

3. Cela peut se comprendre qualitativement en notant que c'est le domaine  $k \lesssim 1/\xi$  qui contribue essentiellement à l'intégrale donnant l'énergie LHY.



**FIGURE 12.** Gauche : image d'un nuage d'atomes de  $^{39}\text{K}$  après spectroscopie de Bragg. Le nuage en bas de la figure correspond au condensat initial. Le nuage plus petit en haut de la figure correspond aux atomes diffractés, ayant gagné l'impulsion  $\hbar q$ . Droite : exemple d'une courbe de résonance permettant de déterminer  $\omega_{\text{res}}(q)$ . La ligne tiretée donne la position de la résonance "nue" :  $\hbar\omega = \epsilon_q$ . Figure extraite de LOPES, EIGEN et al. (2017b).

gure du haut montre l'écart  $\hbar\omega_q - \epsilon_q$  en fonction de la longueur de diffusion  $a$ . Dans le régime  $q\xi \gg 1$ , le spectre de Bogoliubov (24) prédit  $\hbar\omega_q - \epsilon_q \approx gn$ , c'est-à-dire une variation linéaire de cet écart avec  $a$ , ce qui ne correspond pas aux observations.

Ce type d'expérience a été repris sur une plus grande plage de valeurs de  $qa$  par LOPES, EIGEN et al. (2017b). Dans cette expérience, trois valeurs de  $q$  ont été utilisées, correspondant à trois orientations relatives possibles des vecteurs  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Un exemple de résonance est montré en figure 12. Les résultats pour différentes valeurs de  $a$  et de  $q$  sont regroupés<sup>4</sup> en figure 13. La quantité tracée est

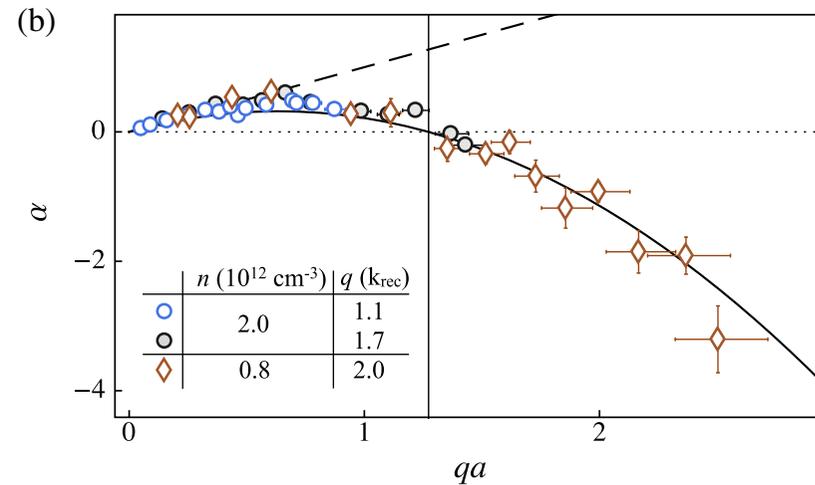
$$\alpha = qa \frac{\hbar\omega_{\text{res}}(q) - \epsilon_q}{gn} \quad (28)$$

et les résultats expérimentaux sont remarquablement bien ajustés par la loi :

$$\alpha = qa \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right), \quad (29)$$

qui conduit à une annulation de  $\alpha$  en  $qa = 4/\pi \approx 1.3$ . En ce point, la

4. Pour cette série de données, la valeur maximale du petit paramètre  $\sqrt{na^3}$  est de l'ordre de 0.05.



**FIGURE 13.** Positions des résonances  $\omega_{\text{res}}(q)$  en fonction de  $qa$  pour trois valeurs de  $q$  différentes, avec  $\alpha$  définie en (28). La courbe en trait plein représente la prédiction (29) basée sur la formule de Feynman (cf. § 2-5). La droite tiretée représente la prédiction pour une excitation élémentaire de Bogoliubov  $\alpha = qa$ . Figure extraite de LOPES, EIGEN et al. (2017b).

fréquence de résonance pour le processus de Bragg est égale à la fréquence à un atome,  $\epsilon_q/h$ .

Nous allons expliquer la raison d'être de ce choix de la loi quadratique (29) en § 2-5, mais remarquons tout de suite qu'elle n'est pas compatible avec le spectre d'excitation à une particule de Bogoliubov (24), qui prédit  $\hbar\omega_q = \epsilon_q + gn$ , et donc la loi linéaire  $\alpha = qa$  tracée en ligne droite tiretée sur la figure 13.

## 2-4 Retour vers l'approche de Beliaev

Une première piste pour expliquer les résultats expérimentaux de Boulder et Cambridge est fournie par l'approche de Beliaev, qui a récemment été généralisée à une valeur arbitraire de  $na^3$  par HOFMANN & ZWARGER (2017) en utilisant la technique OPE (*Operator Product Expansion*). Nous al-

lons donner ici quelques éléments pour explorer cette piste, pour conclure qu'elle ne peut à elle seule expliquer les résultats expérimentaux.

Dans son article déjà cité plus haut, BELIAEV (1958b) explique comment prendre en compte à tous les ordres en  $V$  l'interaction entre l'excitation élémentaire d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et un atome du condensat d'impulsion nulle. Cette resommation du développement de Born fait apparaître notamment l'amplitude de diffusion  $f(k_r)$  entre les deux partenaires, avec l'impulsion relative  $k_r = k/2$ . En supposant que  $a$  est grand devant la portée effective, on a [cf. cours 2021] :

$$f(k_r) \approx \frac{-a}{1 + ik_r a}. \quad (30)$$

À basse énergie,  $k \ll 1/a$  et on trouve  $f(k_r) \approx -a$ , ce qui conduit au spectre de Bogoliubov donné en (24). En revanche, quand  $k_r$  devient comparable à  $1/a$ , les corrections liées au dénominateur de (30) deviennent significatives. Beliaev montre que le spectre d'excitation est relié à la partie réelle de  $f(k_r)$  qui est modifiée comme :

$$\mathcal{R}e[f(0)] = -a \quad \longrightarrow \quad \mathcal{R}e[f(k_r)] = \frac{-a}{1 + (ka/2)^2}. \quad (31)$$

Plus précisément, le bilan d'énergie déjà mentionné dans le régime<sup>5</sup>  $k\xi \gg 1$  devient :

$$\hbar\omega_k = (\epsilon_k + 2gn) - gn \quad \longrightarrow \quad \hbar\omega_k = \left( \epsilon_k + \frac{2gn}{1 + (ka/2)^2} \right) - gn \quad (32)$$

Cette prédiction constitue une déviation significative par rapport à la relation de dispersion de Bogoliubov (24). En particulier, on voit que la différence  $\hbar\omega_k - \epsilon_k$  peut désormais s'annuler et changer de signe. Toutefois, le point d'annulation ne correspond pas à ce qui a été mesuré à Cambridge : selon (32), il devrait se produire pour  $ka = 2$ , alors qu'on le trouve expérimentalement autour de  $ka = 1.3$ . Le même type de désaccord se produit quand on cherche à ajuster les données de l'expérience de Boulder avec la loi (32) (HOFMANN & ZWERGER 2017).

5. Nous ne donnerons pas ici l'expression générale trouvée par BELIAEV (1958b) [cf. eq. (4.7) de cet article]. RONEN (2009) a étudié en détail comment adapter ce résultat général au cas d'un potentiel d'interaction van der Waals entre atomes [voir aussi HOFMANN & ZWERGER (2017)].

**Durée de vie des excitations.** L'analyse de Beliaev permet également de calculer la durée de vie  $\tau$  d'une excitation élémentaire à partir de la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion (30). Cette durée de vie correspond à un processus dans lequel une excitation se désintègre en deux excitations de plus basse énergie. Dans le régime de particules libres, cela peut correspondre simplement au processus de collision élastique entre la particule d'impulsion  $\hbar\mathbf{k}$  et un atome du condensat

$$(\hbar\mathbf{k}) + (\mathbf{0}) \longrightarrow (\hbar\mathbf{k}_1) + (\hbar\mathbf{k}_2) \quad (33)$$

avec  $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| < |\mathbf{k}|$ . Le résultat de ces collisions en onde  $s$  est clairement visible sur la figure 12 et il conduit à la durée de vie (MOHLING & SIRLIN 1960; HOFMANN & ZWERGER 2017) :

$$1/\xi \ll k \lesssim 1/a : \quad \tau^{-1} \sim n(8\pi a^2) \frac{\hbar k_r}{m} = \frac{gn}{\hbar} ka. \quad (34)$$

On note que pour avoir une mesure de la résonance avec une précision au moins égale à  $gn$  (nécessaire pour discriminer entre  $\hbar\omega_k$  et  $\epsilon_k$ ), le temps de mesure doit être au moins égal à  $\hbar/gn$ , ce qui est comparable à la durée de vie  $\tau$  d'une excitation quand  $ka \sim 1$ . Une description précise du processus de mesure de Bragg dans le régime de haute énergie devrait donc prendre en compte cette durée de vie finie.

## 2-5 La formule de Feynman

FEYNMAN (1954) a développé une approche puissante pour étudier le spectre d'excitation qui nous intéresse ici. Cette approche fournit le centre de gravité de la raie d'absorption :

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega} \quad (35)$$

en le mettant sous la forme

$$\hbar\bar{\omega}(\mathbf{q}) = \frac{\epsilon_{\mathbf{q}}}{S(\mathbf{q})} \quad (36)$$

avec comme toujours  $\epsilon_q = \hbar^2 q^2 / 2m$  et le *facteur de structure statique*  $S(q)$  donné par :

$$S(q) = 1 + n \int [g_2(r) - 1] e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (37)$$

La fonction de corrélation spatiale  $g_2(r)$  donne la densité de probabilité pour trouver deux particules séparées de la distance  $r$  au sein du fluide. Elle se calcule à partir de :

$$g_2(r) = \frac{1}{n^2} \langle \hat{\Psi}^\dagger(0) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(0) \rangle. \quad (38)$$

Cette fonction caractérise les fluctuations de densité du fluide, en particulier un éventuel groupement ou dégroupement de particules, et elle est normalisée de sorte qu'elle tend vers 1 quand  $r \rightarrow \infty$ .

La démonstration de la formule de Feynman pour le problème qui nous intéresse est détaillée dans l'appendice de ce chapitre. Nous en indiquons ici les ingrédients principaux. Nous considérons un fluide quantique à  $N$  particules que l'on soumet à une perturbation dépendant du temps de manière monochromatique :

$$\hat{V}(t) = \hat{V}^{(+)} e^{-i\omega t} + \text{H.c.} \quad (39)$$

où l'opérateur  $\hat{V}^{(+)}$  transfère l'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$  à une des particules du fluide :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j}. \quad (40)$$

À l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, on peut utiliser la règle d'or de Fermi pour évaluer la probabilité par unité de temps  $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$  pour que le fluide absorbe un quantum d'impulsion  $\hbar\mathbf{q}$  et d'énergie  $\hbar\omega$ . Le calcul du numérateur de (35) donne alors le résultat exact

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = 2\pi\kappa^2 N \frac{\hbar q^2}{2m}, \quad (41)$$

qui ne fait donc pas intervenir la force des interactions présentes dans le

système<sup>6</sup>. Le dénominateur s'écrit quant à lui :

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}) = 2\pi\kappa^2 N S(q) \quad (42)$$

d'où l'expression (36) pour  $\bar{\omega}(\mathbf{q})$ .

La détermination du facteur de structure  $S(q)$  nécessite la connaissance de la fonction  $g_2(r)$ , qui a été calculée par LEE, HUANG et al. (1957) dans le cadre de l'approche de Bogoliubov. Ce calcul est lui aussi détaillé en appendice et nous nous contenterons ici de donner le comportement de  $g_2(r)$  au voisinage de  $r = a$ , puisque c'est la valeur de  $S(q)$  pour  $q \sim 1/a$  qui nous intéresse *in fine*. LEE, HUANG et al. (1957) trouvent au voisinage de 0 :

$$r \ll \xi : \quad g_2(r) = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(a/\xi). \quad (43)$$

Quand on développe le carré pour former la quantité  $g_2(r) - 1$ , on trouve les termes dominants  $-2a/r$  et  $a^2/r^2$  dont les transformées de Fourier sont respectivement proportionnelles à  $-1/q^2$  et à  $1/q$ . On arrive alors au facteur de structure (cf. appendice) :

$$q\xi \gg 1 : \quad S(q) \approx 1 - \frac{1}{q^2\xi^2} + \frac{2\pi^2 na^2}{q} = 1 - \frac{1}{q^2\xi^2} \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right) \quad (44)$$

Il ne reste plus qu'à injecter ce résultat dans la formule de Feynman (36) pour en déduire le centre de gravité de la raie :

$$q\xi \gg 1 : \quad \hbar\bar{\omega}(q) \approx \epsilon_q \left[1 + \frac{1}{q^2\xi^2} \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right)\right]. \quad (45)$$

Ce résultat est celui tracé en trait continu sur la figure 13 donnant les résultats de l'expérience de LOPES, EIGEN et al. (2017b) :

$$\alpha = qa \frac{\hbar\bar{\omega}(q) - \epsilon_q}{gn} = qa \left(1 - \frac{\pi}{4} qa\right). \quad (46)$$

et il semble en excellent accord avec les données expérimentales.

6. Ce résultat est connu sous le nom de *règle de somme f* (en anglais *f-sum rule*) ou encore *relation de Thomas-Reiche-Kuhn*. Cette terminologie provient de la physique atomique et elle concerne la somme algébrique des forces d'oscillateurs (notées *f*) des transitions électroniques – absorption ou émission de photon – dans un atome.

## 2-6 Problème résolu ?

À première vue, l'accord entre les données expérimentales et la prédiction (45) issue de la formule de Feynman semble résoudre le problème de l'interprétation des données expérimentales de Boulder et Cambridge. Mais nous allons voir que la situation n'est pas si claire.

Une première question qui se pose est d'accorder cette prédiction avec le spectre (32) prédit par l'approche de Beliaev. Dans la mesure où le spectre (32) porte sur la relation de dispersion d'une excitation élémentaire alors que le résultat de Feynman concerne le centre de gravité de la raie, l'écart entre les deux prédictions est possible mais il mérite d'être explicité. Pour cela, le plus simple est de revenir à l'opérateur  $\hat{V}^{(+)}$  qui décrit l'excitation du système lors de la diffraction de Bragg. Cet opérateur est donné en (40) et il s'écrit en seconde quantification :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \quad (47)$$

Quand on réécrit les opérateurs  $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger$  en fonction des opérateurs  $a_0 \approx a_0^\dagger \approx \sqrt{N_0}$  et des opérateurs  $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$  pour  $\mathbf{k} \neq 0$ , on voit apparaître au même ordre en  $\hbar\kappa$  :

- Un terme dominant, proportionnel à  $\sqrt{N_0}$ , correspondant à la création d'une seule excitation d'impulsion  $\mathbf{q}$  avec l'énergie  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ .
- Un second terme correspondant à la création d'une paire d'excitations  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , d'impulsion totale  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}$ .

Cette structure en simple et double excitation est décrite en détail par GRIFFIN (1993). Pour le problème qui nous intéresse ici, nous en déduisons la forme de  $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$  :

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega) = \Gamma^{(1)}(\mathbf{q}, \omega) + \Gamma^{(2)}(\mathbf{q}, \omega), \quad (48)$$

où  $\Gamma^{(1)}$  est un pic étroit, centré sur la fréquence  $\omega_{\mathbf{q}}$  d'une excitation élémentaire et  $\Gamma^{(2)}$  correspond à un piédestal beaucoup plus large. Une représentation (schématique !) de ce spectre est donnée en figure 14, la formule de Feynman correspondant au centre de gravité de la somme de ces deux composantes.

Il reste maintenant à comprendre pourquoi les expériences de Boulder et Cambridge seraient sensibles plutôt au centre de gravité de cette raie à

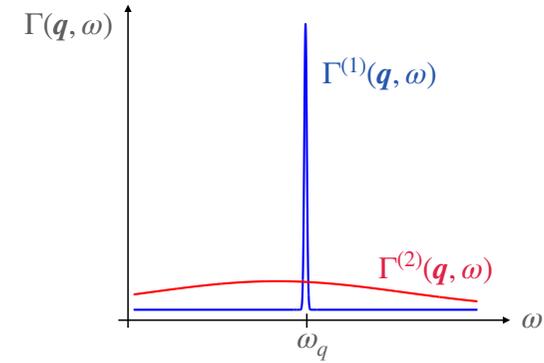


FIGURE 14. Allure générique du spectre à deux composantes attendu dans une analyse du processus de diffraction de Bragg abordé par la règle d'or de Fermi.

double structure, plutôt qu'au pic central. À notre connaissance, cette question est ouverte<sup>7</sup>. Le problème de l'interprétation des résultats expérimentaux est rendu encore plus complexe par le fait que cette séparation entre processus à simple et double excitation n'est pas forcément pertinente au plan pratique : nous avons vu en effet que sur la durée de l'expérience, une excitation élémentaire avait une probabilité tout à fait significative de se désintégrer en deux excitations de plus faible énergie...

## 3 Mélanges et gouttelettes quantiques

### 3-1 Position du problème

Dans les expériences que nous venons de décrire, l'énergie LHY était une petite correction à l'énergie dominante de champ moyen et elle n'intervenait que très peu dans la forme d'équilibre du gaz dans son état fondamental. Cela est dû bien sûr au critère de validité  $na^3 \ll 1$  du calcul LHY. Comme nous l'avons expliqué plus haut [cf. (7)], ce critère est incontournable quand on prend en compte la nécessité d'atteindre l'équilibre en

<sup>7</sup> Je remercie Johannes Hoffmann, Raphael Lopes et Willi Zwerger pour des nombreux échanges sur ce sujet.

un temps suffisamment court pour que les pertes à trois corps soient négligeables. En dépit de cette contrainte, nous souhaitons aborder ici la question suivante : existe-il des situations où l'énergie LHY, malgré la petitesse de  $na^3$ , joue un rôle déterminant dans l'équilibre et dans la dynamique du gaz ?

Puisque la contribution LHY ne peut pas être amenée à une valeur "standard" de l'énergie de champ moyen  $gn$ , l'autre option pour que les deux termes soient comparables est d'abaisser l'énergie de champ moyen. C'est l'idée mise en avant par PETROV (2015), et basée sur un mélange de deux fluides. Le principe est de partir d'une situation où l'énergie de champ moyen pour chacun des fluides pris séparément est positive (répulsion intra-espèce), alors que l'énergie de champ moyen décrivant l'interaction entre les deux fluides est négative (attraction intra-espèce). On peut alors aboutir à un régime où la somme des énergies de champ moyen est quasi-nulle : l'énergie LHY devient déterminante pour calculer la forme d'équilibre du fluide. Nous allons voir que cet équilibre correspond à un état "liquide", avec une densité indépendante du nombre de particules. On parle donc de *gouttelettes quantiques*.

Une autre méthode pour abaisser l'énergie de champ moyen au niveau de l'énergie LHY est apparue quasi-simultanément à la proposition de PETROV (2015). Elle revient à ajouter un terme supplémentaire aux énergies de champ moyen et LHY décrivant les interactions en onde  $s$ , ce terme provenant de l'interaction dipôle-dipôle magnétique. Cette approche a été poursuivie expérimentalement par les groupes de Stuttgart (FERRIER-BARBUT, KADAU et al. 2016; SCHMITT, WENZEL et al. 2016) et d'Innsbruck (CHOMAZ, BAIER et al. 2016). Ces études ont ensuite débouché sur l'observation d'états supersolides dans ces deux groupes (BÖTTCHER, SCHMIDT et al. 2019; CHOMAZ, PETTER et al. 2019) ainsi qu'à Florence (TANZI, LUCIONI et al. 2019). Nous renvoyons les lecteurs intéressés vers les articles de revue récents de FERRIER-BARBUT (2019) et BÖTTCHER, SCHMIDT et al. (2021).

### 3-2 Stabilité d'un mélange binaire (chp. moyen)

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à la proposition de PETROV (2015), qui est basée sur un mélange binaire de deux fluides quantiques.

Pour commencer, nous allons discuter la stabilité d'un tel mélange au niveau de l'énergie de champ moyen. Nous notons 1 et 2 les deux composantes du mélange, qui peuvent correspondre à deux espèces atomiques différentes de masse  $m_1$  et  $m_2$ , ou bien à la même espèce atomique mais avec deux états internes différents. Nous notons  $g_{11}$  et  $g_{22}$  les paramètres d'interaction de champ moyen intra-espèces et  $g_{12}$  le couplage inter-espèce. Nous prendrons pour simplifier  $m_1 = m_2$ .

Nous supposerons que les couplages  $g_{11}$  et  $g_{22}$  sont positifs, c'est-à-dire que chaque composante prise séparément est stable. En revanche, nous ne faisons aucune hypothèse à ce stade sur  $g_{12}$ . Nous verrons plus loin que la situation favorable correspond au cas où  $g_{12}$  est négatif et approximativement égal à  $-(g_{11}g_{22})^{1/2}$ .

Nous allons nous intéresser à la stabilité du mélange selon deux critères :

- Il ne doit pas y avoir de démixtion, c'est-à-dire que l'énergie du mélange doit être plus basse que l'énergie du système avec des phases séparées.
- Le système doit être stable, c'est-à-dire qu'il ne doit pas s'effondrer sur lui-même.

Commençons par évaluer l'énergie de la phase avec démixtion, où l'espèce  $i$  occupe un volume  $V_i$ , avec  $V_1 + V_2 = V$  où  $V$  est le volume total accessible. On a

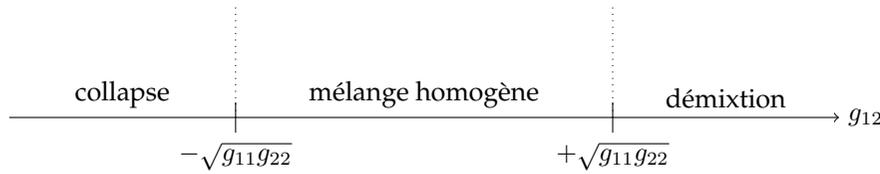
$$E_{\text{demix}} = g_{11} \frac{N_1^2}{2V_1} + g_{22} \frac{N_2^2}{2V_2} \quad (49)$$

où nous avons négligé l'énergie (non extensive) résultant de la tension de surface entre les deux phases. La minimisation de cette énergie vis-à-vis de  $V_1$  (à volume total  $V$  constant) conduit à l'équilibre des pressions  $\frac{1}{2}g_{11}n_1^2 = \frac{1}{2}g_{22}n_2^2$  et on arrive à l'énergie minimale de cette phase séparée :

$$E_{\text{demix}} = g_{11} \frac{N_1^2}{2V} + g_{22} \frac{N_2^2}{2V} + \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{N_1 N_2}{V}. \quad (50)$$

Considérons maintenant la phase mélangée, où chaque espèce occupe tout le volume  $V$  accessible. Son énergie de champ moyen est donc

$$E_{\text{mix}} = g_{11} \frac{N_1^2}{2V} + g_{22} \frac{N_2^2}{2V} + g_{12} \frac{N_1 N_2}{V}. \quad (51)$$


 FIGURE 15. Les trois scénarios possibles selon la valeur de  $g_{12}$ .

La comparaison avec l'énergie de la phase séparée (50) donne immédiatement le critère :

$$\boxed{\text{Miscibilité si : } g_{12} < \sqrt{g_{11}g_{22}}} \quad (52)$$

Intéressons-nous maintenant à la stabilité de cette phase mélangée. Il faut que pour tout couple  $N_1, N_2$ , l'énergie (51) soit positive. Si ce n'était pas le cas, on pourrait abaisser l'énergie (c'est-à-dire la faire tendre vers  $-\infty$ ) en prenant un volume  $V \rightarrow 0$ , ce qui correspond à un effondrement du système sur lui-même. En réécrivant l'énergie  $E_{\text{mix}}$  sous la forme

$$E_{\text{mix}} = \frac{1}{2V} (\sqrt{g_{11}} N_1 - \sqrt{g_{22}} N_2)^2 + \frac{1}{V} (\sqrt{g_{11}g_{22}} + g_{12}) N_1 N_2, \quad (53)$$

on constate que l'énergie sera toujours positive si et seulement si

$$\boxed{\text{Stabilité si : } -\sqrt{g_{11}g_{22}} < g_{12}} \quad (54)$$

Pour continuer l'analyse, plaçons-nous pour simplifier sur la ligne "minimisante" qui annule le premier terme de (53), c'est-à-dire avec des nombres d'atomes  $N_1$  et  $N_2$  choisis tels que :

$$\sqrt{g_{11}} N_1 = \sqrt{g_{22}} N_2 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = N \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{22}}}, \quad N_2 = N \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{22}}}. \quad (55)$$

L'énergie de champ moyen s'écrit alors (PETROV 2015) :

$$\boxed{E_{\text{mix}} = \frac{1}{2} \delta g \frac{N^2}{V}} \quad (56)$$

avec

$$\delta g = 2 (\sqrt{g_{11}g_{22}} + g_{12}) \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{(\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g_{22}})^2}. \quad (57)$$

Si on choisit  $g_{12}$  très proche de  $-\sqrt{g_{11}g_{22}}$  (*i.e.* juste au bord de la frontière du collapse de la figure 15), le paramètre  $\delta g$  est petit. L'énergie (56) a donc la structure d'une énergie de champ moyen pour un gaz à une composante, mais avec une valeur du coefficient de couplage  $\delta g$  très réduite par rapport aux systèmes 1 et 2 de départ. C'est précisément l'effet recherché pour que l'énergie LHY puisse jouer un rôle déterminant.

On peut prolonger cette étude en calculant le spectre d'excitation du mélange homogène. Supposons que  $g_{11} = g_{22} \equiv g$  et  $N_1 = N_2$  pour simplifier l'écriture du résultat. TIMMERMANS (1998) obtient dans ce cas les deux branches d'excitation :

$$\boxed{\omega_{\pm}^2(k) = \omega^2(k) \pm \frac{|g_{12}|}{g} c^2 k^2} \quad (58)$$

où  $c$  désigne la vitesse du son dans chacun des condensats pris séparément. Ces deux branches correspondent à l'excitation d'ondes de densité totale (oscillation de  $n_1 + n_2$ ) et d'ondes de "spin" (oscillation de  $n_1 - n_2$ ). Dans la limite des faibles  $k$ , on trouve donc deux branches linéaires

$$\omega_{\pm}(k) = ck \left( 1 \pm \frac{|g_{12}|}{g} \right)^{1/2}, \quad (59)$$

qui sont toutes deux réelles si et seulement le critère de stabilité (54) est satisfait. Quand ce n'est pas le cas, l'examen de (58) permet de déterminer le nombre d'onde  $k$  qui conduit à la plus grande partie imaginaire de  $\omega_{\pm}(k)$ , et donc à l'instabilité maximale.

### 3-3 L'énergie LHY pour un mélange

L'énergie LHY pour un mélange a été calculée par LARSEN (1963) et MINARDI, ANCILOTTO et al. (2019). Dans le cas homonucléaire  $m_1 = m_2$ , cette énergie s'écrit :

$$E_{\text{LHY}} = \frac{8V}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (g_{11}n_1)^{5/2} f \left( \frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}, \frac{g_{22}n_2}{g_{11}n_1} \right) \quad (60)$$

où la fonction sans dimension  $f(x, y)$  définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2^{5/2}} \sum_{\pm} \left[ 1 + y \pm \sqrt{(1-y)^2 + 4xy} \right]^{5/2} \quad (61)$$

est en pratique d'ordre unité. Au voisinage du point d'instabilité  $g_{12} = -\sqrt{g_{11}g_{22}}$ , on a  $x \approx 1$  de sorte que cette énergie s'écrit :

$$g_{12} \approx -\sqrt{g_{11}g_{22}} : \quad E_{\text{LHY}} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{(g_{11}N_1 + g_{22}N_2)^{5/2}}{V^{3/2}}. \quad (62)$$

Pour un mélange dans la proportion  $N_2/N_1 = \sqrt{g_{11}/g_{22}}$  définie en (55), cette énergie se simplifie pour donner

$$E_{\text{LHY}} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{(\bar{g}N)^{5/2}}{V^{3/2}} \quad \text{avec} \quad \bar{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \quad (63)$$

c'est-à-dire l'énergie LHY d'un gaz à une composante de constante de couplage  $\bar{g}$  [cf. (1)]. L'énergie LHY n'est donc pas réduite significativement au voisinage du point d'instabilité  $g_{12} = -\sqrt{g_{11}g_{22}}$ , contrairement à l'énergie de champ moyen (56).

### 3-4 Stabilisation de gouttelettes

Pour former un édifice stabilisé par l'énergie LHY, PETROV (2015) a suggéré d'ajuster la valeur du couplage inter-espèces  $g_{12}$  au voisinage de la zone de collapse de la figure 15, en se plaçant dans la région instable. Si elle était seule, l'énergie de champ moyen (56) conduirait alors à un effondrement du gaz sur lui-même, puisque  $\delta g$  est négatif. Deux termes peuvent *a priori* venir s'opposer à cet effondrement. Pour les estimer, notons  $V = \ell^3$  le volume effectif occupé par le fluide à l'équilibre. Ces deux termes sont

— le terme d'énergie cinétique

$$E_{\text{cin}} \approx \frac{N\hbar^2}{2m\ell^2} = \frac{N\hbar^2}{2mV^{2/3}} \quad (64)$$

qui est une contribution à une particule correspondant à l'énergie nécessaire pour confiner une particule dans un domaine de taille  $\ell$ ;

— le terme LHY calculé ci-dessus en (63).

Ces deux contributions positives augmentent quand le nuage se contracte et peuvent donc effectivement contrebalancer le terme de champ moyen.

Pour simplifier la discussion, nous allons passer en revue l'action séparée de chacun de ces deux termes face au terme de champ moyen. Si on ne prend en compte que l'énergie cinétique et le terme de champ moyen, le volume d'équilibre du fluide  $V$  doit minimiser

$$E_{\text{cin+MF}}(V) = \frac{N\hbar^2}{2mV^{2/3}} - \frac{|\delta g|N^2}{2V}. \quad (65)$$

Cette fonction de  $V$  est tracée sur la figure 16 et le point stationnaire qui apparaît est clairement instable pour notre problème à trois dimensions<sup>8</sup>. L'équilibre recherché ne peut donc pas se produire en pratique.

Si on ne prend en compte que le terme LHY et le terme de champ moyen, le volume d'équilibre doit minimiser

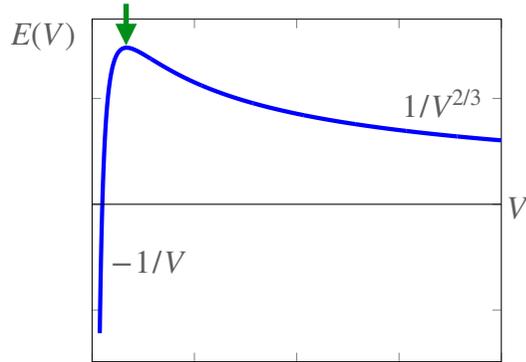
$$E_{\text{LHY+MF}}(V) = \gamma \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{(\bar{g}N)^{5/2}}{V^{3/2}} - \frac{|\delta g|N^2}{2V} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{8}{15\pi^2}. \quad (66)$$

Cette fonction est tracée sur la figure 17 et elle conduit à un minimum stable : l'énergie LHY peut donc effectivement empêcher l'effondrement du gaz sur lui-même que le champ moyen tend à provoquer. Plus précisément, on trouve que ce minimum correspond à une densité  $n = N/V$  donnée à un coefficient numérique près par :

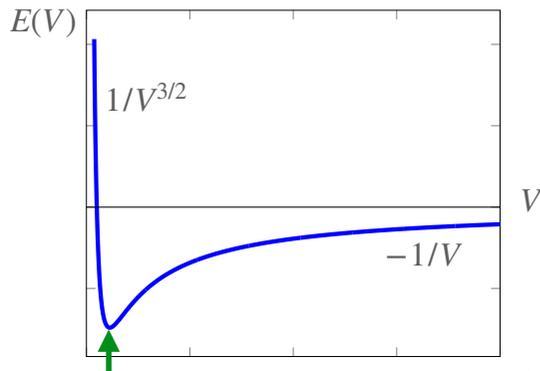
$$n \bar{a}^3 \sim \left( \frac{|\delta g|}{\bar{g}} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \bar{g} = \frac{4\pi\hbar^2 \bar{a}}{m}. \quad (67)$$

On arrive donc au résultat important suivant : le volume d'équilibre est tel que la densité au sein de la gouttelette  $n = N/V$  est indépendante du nombre d'atomes. Cela correspond à la définition d'un liquide, c'est-à-dire un état à la fois fluide et presque incompressible [ce dernier point est confirmé par l'étude des modes de vibration de la gouttelette (PETROV

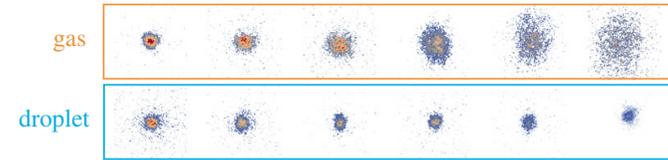
<sup>8</sup> La situation serait différente à 1D où le terme de champ moyen varierait comme  $-|\delta g|N^2/2\ell$ . On retrouverait alors la situation bien connue qui conduit à la formation de solitons. La transition entre ces solitons et les gouttelettes que nous étudions ici est discutée par CHEINEY, CABRERA et al. (2018).



**FIGURE 16.** Compétition entre le terme de champ moyen (56) et le terme d'énergie cinétique (64) pour un nuage 3D. L'équilibre signalé par la flèche est instable.



**FIGURE 17.** Compétition entre le terme de champ moyen (56) et le terme LHY (63). L'équilibre signalé par la flèche est stable.



**FIGURE 18.** Évolution d'un gaz de  $^{39}\text{K}$  dans l'espace libre pour un mélange des deux états hyperfins  $|F = 1, m = 0\rangle$  et  $|F = 1, m = -1\rangle$ . Rangée du haut : expansion (régime gazeux) obtenue pour  $|\delta g|$  très petit, l'énergie cinétique jouant alors un rôle significatif; rangée du bas : régime de gouttelette obtenu pour  $|\delta g|$  plus grand et résultant essentiellement de la compétition entre énergie de champ moyen et énergie LHY. Les images sont prises à  $t = 0, 2, \dots, 10$  ms. Le nombre d'atomes initial dans la gouttelette est de l'ordre de 200 000 et la taille r.m.s. de l'ordre de  $2\mu\text{m}$ . Le rapport  $N_1/N_2$ , de l'ordre de 0.7, est en bon accord avec la prédiction théorique. Figure tirée de SEMEGHINI, FERIOLI et al. (2018).

2015)]. On note par ailleurs que cette densité vérifie bien le critère de validité de l'approximation de Bogoliubov  $n\bar{a}^3 \ll 1$ , si on prend soin de garder  $|\delta g|$  petit devant la valeur typique  $\bar{g}$  du coefficient de couplage.

En pratique, il convient bien sûr de prendre en compte simultanément les termes d'énergie cinétique et LHY pour étudier quantitativement la compétition avec l'énergie négative de champ moyen. Toutefois, pour les grands nombres d'atomes, l'énergie cinétique joue un rôle faible et la prédiction (67) peut être utilisée en bonne approximation.

Nous ne décrivons pas ici l'observation expérimentale de ces gouttelettes puisque ce sujet sera détaillé dans le séminaire et l'atelier du 15 avril prochain. Signalons simplement que ces gouttelettes ont été observées en absence totale de confinement par SEMEGHINI, FERIOLI et al. (2018) à Florence et GUO, JIA et al. (2021) à Beijing, les expériences du groupe de Taruell à Barcelone étant réalisées dans un confinement à une ou deux dimensions (CABRERA, TANZI et al. 2018; CHEINEY, CABRERA et al. 2018). Un exemple de résultat du groupe de Florence est montré en figure 18.

## Appendice

### Démonstration de la relation de Feynman

Nous partons de la perturbation dépendant du temps  $\hat{V}(t) = \hat{V}^{(+)} e^{-i\omega t} + \text{H.c.}$  qui vient sonder la densité du fluide à un vecteur d'onde particulier  $\mathbf{q}$  :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \int \hat{n}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (68)$$

où l'opérateur  $\hat{n}(\mathbf{r})$  est associé à la densité spatiale au point  $\mathbf{r}$  :  $\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_j)$ . L'opérateur  $\hat{V}^{(+)}$  s'écrit donc :

$$\hat{V}^{(+)} = \hbar\kappa \sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j}. \quad (69)$$

La probabilité par unité de temps pour exciter le système en supposant qu'il est initialement dans son état fondamental  $|\psi_0\rangle$  est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_0 - \hbar\omega) \quad (70)$$

et on définit la fréquence moyenne  $\bar{\omega}$  comme

$$\bar{\omega}(\mathbf{q}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{q}, \omega) d\omega} = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{q})}{\mathcal{D}(\mathbf{q})} \quad (71)$$

où en fait seules les fréquences positives contribuent à  $\Gamma$  puisque le système est initialement dans son état fondamental.

**Calcul du numérateur  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ .** L'intégrale sur  $\omega$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{q}) &= \frac{2\pi}{\hbar^3} \sum_f \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle (E_f - E_0) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^3} \sum_f \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | [\hat{H}, \hat{V}^{(+)}] | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (72)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{q}) &= \frac{2\pi}{\hbar^3} \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} [\hat{H}, \hat{V}^{(+)}] | \psi_0 \rangle \\ &= -\frac{2\pi}{\hbar^3} \langle \psi_0 | [\hat{H}, \hat{V}^{(-)}] \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (73)$$

Du fait de l'isotropie du système, le résultat pour  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  est égal à celui pour  $\mathcal{N}(-\mathbf{q})$ . Puisque la substitution  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$  correspond à l'échange de  $\hat{V}^{(+)}$  et de  $\hat{V}^{(-)}$ , on en déduit que  $\mathcal{N}(\mathbf{q})$  est égal à

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \frac{\pi}{\hbar^3} \langle \psi_0 | [\hat{V}^{(-)}, [\hat{H}, \hat{V}^{(+)}]] | \psi_0 \rangle. \quad (74)$$

L'hamiltonien du gaz s'écrit :

$$\hat{H} = \sum_j \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(\hat{\mathbf{r}}_{ij}). \quad (75)$$

Par conséquent, seul le terme d'énergie cinétique possède un commutateur non nul avec les opérateurs  $\hat{V}^{(\pm)}$ . Nous trouvons :

$$[\hat{H}, \hat{V}^{(+)}] = \frac{\hbar\kappa}{2m} \sum_j [\hat{\mathbf{p}}_j^2, e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j}] = \frac{\hbar^2\kappa}{2m} \sum_j \mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{p}}_j e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j} + e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{r}}_j} \hat{\mathbf{p}}_j) \quad (76)$$

et

$$[\hat{V}^{(-)}, [\hat{H}, \hat{V}^{(+)}]] = \frac{\hbar^4\kappa^2}{m} Nq^2 \quad (77)$$

de sorte qu'on obtient finalement (41).

Le lien avec la relation de Thomas-Reiche-Kuhn en physique atomique se fait en notant que pour un atome "à un électron" d'opérateur position  $\hat{x}$  et de masse  $m$ , on trouve pour un état propre  $|m\rangle$  de l'énergie :

$$\sum_n (E_n - E_m) |\langle n | \hat{x} | m \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \quad (78)$$

La démonstration est très similaire à ce qui précède, les opérateurs  $\hat{V}^{(\pm)}$  étant remplacés par  $\hat{x}$ .

Calcul du dénominateur  $\mathcal{D}(q)$ . L'intégrale sur  $\omega$  donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(q) &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_f \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \langle \psi_0 | \hat{V}^{(-)} \hat{V}^{(+)} | \psi_0 \rangle \\ &= 2\pi\kappa^2 \left( N + \sum_{i \neq j} \langle \psi_0 | e^{i\mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j)} | \psi_0 \rangle \right) \quad (79)\end{aligned}$$

ce qui conduit à (42).

### La fonction de corrélation spatiale $g_2(r)$

Le calcul de la fonction  $g_2(r)$  pour l'état fondamental du gaz de Bose a été mené de manière détaillée dans l'article original de LEE, HUANG et al. (1957). Nous reproduisons ici simplement les grandes lignes de ce calcul, un peu fastidieux mais sans difficulté notable. Différents aspects du comportement de la fonction  $g_2(r)$  ont été analysés dans les articles plus récents de NARASCHEWSKI & GLAUBER (1999) et HOLZMANN & CASTIN (1999).

Cette fonction de corrélation  $g_2$  s'écrit comme le carré de la norme d'un vecteur :

$$g_2(r) = \frac{1}{n^2} \|\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(0)|0_B\rangle\|^2, \quad (80)$$

où  $|0_B\rangle$  désigne l'état fondamental du gaz, c'est-à-dire le vide d'excitations de Bogoliubov. Remplaçons les opérateurs champ  $\hat{\Psi}(0)$  et  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  par leur expression en terme des opérateurs de création et de destruction des excitations élémentaires :

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \sqrt{n_0} + \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} a_{\mathbf{k}} \\ &= \sqrt{n_0} + \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left( u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^\dagger \right).\end{aligned} \quad (81)$$

On constate alors que le vecteur intervenant dans (80) peut contenir 0, 1 ou

2 excitations de Bogoliubov :

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(0)|0_B\rangle &= \left( n_0 - \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) |0_B\rangle \\ &\quad - \frac{\sqrt{n_0}}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_{\mathbf{k}} (1 + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) |1_{\mathbf{k}}\rangle \\ &\quad + \frac{1}{L^3} \sum_{\text{paires } \mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} \left( e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \right) |1_{\mathbf{k}} 1_{\mathbf{k}'}\rangle \quad (82)\end{aligned}$$

On en déduit la fonction de corrélation<sup>9</sup>

$$g_2(r) = [1 + F(r)]^2 + [1 + G(r)]^2 - 1 - 2\frac{n'}{n} [F(r) + G(r)] \quad (83)$$

ou encore

$$g_2(r) = 1 + 2\frac{n_0}{n} [F(r) + G(r)] + F^2(r) + G^2(r) \quad (84)$$

où nous avons adopté les mêmes notations que LEE, HUANG et al. (1957) :

$$F(r) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_{\mathbf{k}}^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad G(r) = -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (85)$$

**Comportements asymptotiques.** LEE, HUANG et al. (1957) donnent les développements à courte et longue distance de ces fonctions. Au voisinage de 0, ils trouvent :

$$r \ll \xi : \quad F(r) \approx \frac{n'}{n}, \quad G(r) \approx -\frac{a}{r} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \quad (86)$$

ce qui conduit à

$$r \ll \xi : \quad g_2(r) = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \mathcal{O}(a/\xi). \quad (87)$$

9. Notons que l'équation correspondante de l'article de LEE, HUANG et al. (1957) contient un terme  $4n'/n$  au lieu de  $2n'/n$  en facteur du dernier terme de (83). Cette erreur a été signalée par GARCIA-COLIN (1960).

À grande distance, LEE, HUANG et al. (1957) trouvent :

$$r \gg \xi : \quad F(r) \sim -G(r) \sim \frac{1}{\pi^2 n \xi} \frac{1}{r^2} \quad (88)$$

ce qui conduit à

$$r \gg \xi : \quad g_2(r) \approx 1 + \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (89)$$

### Le facteur de structure $S(q)$

Une fois connue la fonction  $g_2$ , on calcule la transformée de Fourier de  $g_2(r) - 1$  pour déterminer  $S(q)$  qui intervient directement dans la formule de Feynman. Pour mener à bien ce calcul, on part de l'expression (84) que l'on met sous la forme

$$g_2(r) = 1 + g_{2,a}(r) + g_{2,b}(r) \quad (90)$$

avec

$$g_{2,a}(r) = 2 \frac{n_0}{n} [F(r) + G(r)] \quad g_{2,b}(r) = F^2(r) + G^2(r), \quad (91)$$

et on pose

$$S(q) = 1 + S_a(q) + S_b(q) \quad (92)$$

avec

$$S_{a/b}(q) = n \int g_{2,a/b}(r) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (93)$$

**Contribution de  $g_{2,a}(r)$ .** Le calcul de la transformée de  $g_{2,a}(r)$  est simple : dans la mesure où  $F$  et  $G$  sont elles-mêmes définies en (85) comme les transformées de Fourier de  $v_k^2$  et  $-u_k v_k$ , on trouve sans calcul :

$$S_a(q) = -2 \frac{n_0}{n} v_q (u_q - v_q). \quad (94)$$

À l'approximation  $n_0 \approx n$  (déplétion quantique négligée quand  $\sqrt{na^3} \ll 1$ ), nous pouvons remarquer que cette contribution à elle seule conduit au résultat pour le spectre de Bogoliubov donné en (24)

$$\frac{\epsilon_q}{1 + S_a(q)} \approx \frac{\epsilon_q}{1 - 2v_q(u_q - v_q)} = \hbar\omega_q. \quad (95)$$

En particulier, dans la limite  $q\xi \gg 1$ , nous avons vu au chapitre précédent que  $u_q \sim 1$  et  $v_q \sim 1/2q^2\xi^2 \ll u_q$ , de sorte que cette expression se simplifie pour donner

$$q\xi \gg 1 : \quad S_a(q) \approx -\frac{n_0}{n} \frac{1}{q^2\xi^2} \approx -\frac{1}{q^2\xi^2}. \quad (96)$$

**Contribution de  $g_{2,b}(r)$ .** Le calcul complet de la transformée de Fourier de  $g_{2,b}(r)$  est plus compliqué et nous allons nous contenter ici de son terme dominant pour  $q\xi \gg 1$  et  $\sqrt{na^3} \ll 1$ . On peut alors montrer que le seul terme à prendre en compte provient de la transformée de Fourier de  $G^2(r)$ , que l'on peut évaluer en utilisant l'expression de  $G$  aux petits  $r$  donnée en (86) :

$$S_b(q) \approx n \int G^2(r) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r \approx n \int \frac{a^2}{r^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{2\pi^2 na^2}{q}. \quad (97)$$

**Bilan dans le régime  $q\xi \gg 1$ .** En combinant (92), (96) et (97), on arrive au résultat (44).

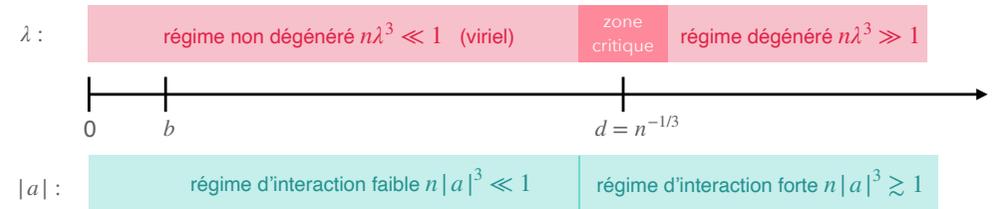
# Chapitre V

## Le contact à deux corps

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés au lien entre la physique à deux corps, décrite par la longueur de diffusion  $a$ , et les propriétés d'un système à  $N$  corps, abordées par la méthode de Bogoliubov. Ce lien a été possible pour un gaz en interaction faible, le petit paramètre du problème étant  $\sqrt{na^3}$ . Cela imposait que la distance entre particules  $d = n^{-1/3}$  restait toujours grande devant  $a$ .

Le but de ce chapitre est d'explorer le lien "2 corps –  $N$  corps" sans faire d'hypothèse sur le rapport  $a/d$ . Plus précisément, nous ne mettrons pas de contrainte sur la valeur de la longueur de diffusion  $a$ , qui peut être ajustée expérimentalement presque à volonté pour les espèces atomiques présentant une résonance de Fano-Feshbach. Elle peut être mise à une valeur positive ou négative, depuis  $|a| \lesssim b$  (où  $b$  est la portée du potentiel, elle-même de l'ordre de quelques nanomètres) jusqu'à des valeurs supérieures au micromètre, ce qui devient grand devant la distance entre particules :  $a \gtrsim d$ . En revanche, nous supposerons toujours que le système est dilué, c'est-à-dire que la portée du potentiel  $b$  vérifie  $b \ll d$ . Nous nous limiterons également (à une exception près au prochain chapitre) aux cas où seules les interactions en onde  $s$  jouent un rôle significatif.

Aux trois échelles de longueur  $a$ ,  $b$  et  $d$  que nous venons de mentionner, s'ajoute la longueur d'onde thermique  $\lambda = (2\pi\hbar^2/mk_B T)^{1/2}$  (cf. figure 1). Dans le premier chapitre de ce cours, nous avons expliqué comment le développement du viriel permettait d'aborder le cas faiblement dégénéré  $\lambda \ll d$ . Nous allons donc nous concentrer dans ce qui suit sur le cas forte-



**FIGURE 1.** Les quatre échelles de longueur du problème : portée du potentiel  $b$  et longueur de diffusion  $a$  pour le problème à deux corps, distance moyenne entre particules  $d$  et longueur d'onde thermique  $\lambda$  pour le problème à  $N$  corps. On supposera toujours le système dilué :  $b \ll d$ . Dans ce chapitre, on va s'intéresser principalement au régime dégénéré,  $\lambda > d$ , et au cas d'une grande longueur de diffusion  $a \gg b$ .

ment dégénéré  $\lambda \gtrsim d$ .

Pour le cas des gaz tri-dimensionnels qui va nous intéresser ici, le lien "2 corps –  $N$  corps" a été en grande partie initié par Shina Tan dans une série de trois articles. Les deux premiers ont été déposés sur arXiv en 2005, mais ces trois articles n'ont été publiés (ensemble) qu'en 2008 (TAN 2008a; TAN 2008b; TAN 2008c). Dans ce travail, Tan a établi un nombre important de relations universelles vérifiées par un gaz de Fermi à deux composantes, avec des interactions décrites dans la limite de portée nulle.

Ces relations que nous allons étudier relient des quantités microscopiques, comme la distribution en impulsion du gaz ou sa fonction de corrélation spatiale à deux corps, à des grandeurs macroscopiques, comme l'énergie de son état fondamental et plus généralement son énergie libre ou sa pression. Elle font intervenir une quantité  $C$  appelée "contact", une dénomination justifiée par le fait qu'elle constitue une mesure de la probabilité d'avoir deux particules proches l'une de l'autre. L'intérêt des relations faisant intervenir le contact est qu'elles ne requièrent pas de connaissance précise de l'état du système, que l'on ne serait d'ailleurs pas en mesure de fournir dans le cas des interactions fortes  $a \gtrsim d$ .

L'approche de Tan a été approfondie et généralisée sur le plan théorique par de nombreux auteurs, et des relations universelles additionnelles ont été établies. Il n'est pas possible de les citer toutes ici. Mentionnons simplement les articles qui, en plus de ceux de Tan, ont servi de base à l'écriture de ce chapitre et du suivant : BAYM, PETHICK et al. 2007; PUNK & ZWERGER 2007; BRAATEN & PLATTER 2008; WERNER, TARRUELL et al. 2009; ZHANG & LEGGETT 2009; COMBESCOT, ALZETTO et al. 2009; YU, BRUUN et al. 2009; BRAATEN, KANG et al. 2010; BRAATEN 2011; WERNER & CASTIN 2012a; WERNER & CASTIN 2012b.

## 1 Champ d'application du concept de contact

### 1-1 Contribution des états liés

Avant d'aborder la présentation du contact, il est important de bien préciser le cadre dans lequel nous allons travailler. Un premier point porte sur les états liés à deux (ou plus) particules. Pour les espèces atomiques utilisées au laboratoire, le potentiel d'interaction à deux corps  $V(r)$  représenté sur la figure 2 a une profondeur de l'ordre de plusieurs centaines de kelvins et il comporte généralement de nombreux états liés. En dehors d'une résonance de Fano-Feshbach, l'énergie du dernier état lié est de l'ordre d'une dizaine de fois l'énergie de van der Waals  $E_{\text{vdW}}$  (voir cours 2021), c'est-à-dire de 0.1 à 1 mK suivant les espèces. Cette énergie est grande devant les énergies caractéristiques des gaz, qui sont dans la gamme 10 nK–1  $\mu$ K. Cette différence considérable est encore augmentée pour les états plus for-

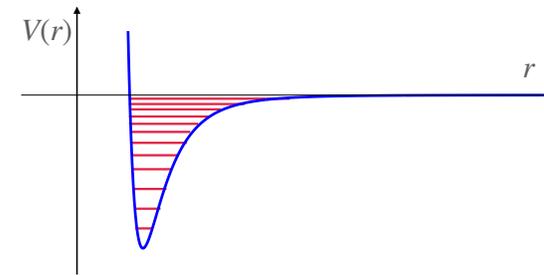


FIGURE 2. Potentiel d'interaction à deux corps  $V(r)$ . Ce puits de potentiel, dont la profondeur est typiquement de plusieurs centaines de kelvins, contient de nombreux états ro-vibrationnels liés.

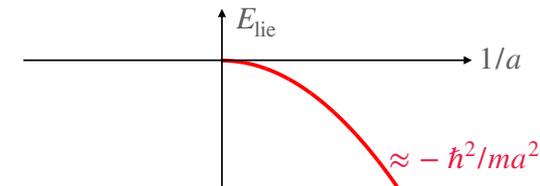


FIGURE 3. Énergie de l'état lié qui apparaît du côté  $a > 0$  d'une résonance de Fano-Feshbach.

tement liés du potentiel  $V(r)$ . Il s'ensuit que la formation de dimères dans ces états constitue une "perte sèche" d'atomes pour le gaz. Une fois ces dimères formés, ils s'échappent généralement du piège confinant l'assemblée d'atomes et ils n'entrent pas dans la réalisation de l'équilibre thermodynamique. Nous allons donc les ignorer dans la suite.

Il en va autrement pour l'état très faiblement lié qui apparaît au voisinage d'une résonance de Fano-Feshbach, plus précisément du côté  $a > 0$  de la résonance (figure 3). La résonance correspond à  $|a| = +\infty$  (i.e.  $1/a = 0$ ) et l'énergie de l'état lié, en valeur absolue très faible, est  $\approx -\hbar^2/ma^2$ . Cette énergie de liaison est comparable aux autres échelles d'énergie du gaz et cet état lié doit donc être pris en compte pour l'étude de la dynamique et de la thermodynamique du système à  $N$  corps.

Au voisinage de cette résonance, on peut également s'interroger sur la possibilité de former des états plus complexes, à trois corps par exemple. Pour des fermions de spin 1/2 avec  $m_\uparrow \approx m_\downarrow$ , le principe de Pauli interdit la formation d'un édifice à trois corps. En revanche, pour des bosons ou pour des fermions de spin 1/2 avec une grande différence entre  $m_\uparrow$  et  $m_\downarrow$ , ces états faiblement liés à trois corps existent – c'est l'effet Efimov – et doivent également être pris en compte [pour une revue sur ce problème à trois corps, voir NAIDON & ENDO (2017)].

### 1-2 Conditions d'application : fermions vs. bosons

Nous allons voir que l'élément central de l'approche de Tan, le *contact*, est la quantité conjuguée, au sens thermodynamique du terme, de la longueur de diffusion  $a$ . Le contact permet de caractériser du point de vue thermodynamique toute la physique à courte portée du système, pourvu que les interactions entre particules n'introduisent pas d'autre échelle d'énergie que  $\hbar^2/ma^2$  dans le domaine d'énergie pertinent pour ces gaz quantiques. En particulier, le problème à trois corps et l'effet Efimov ne doivent pas invalider cette hypothèse.

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe précédent (§1-1), l'effet Efimov est absent pour un gaz de fermions de spin 1/2 avec  $m_\uparrow \approx m_\downarrow$ . Le premier champ d'application des résultats de ce chapitre est donc un gaz de  $N$  fermions de spin  $1/2$ . Dans ce cas, nous n'aurons besoin d'aucune restriction sur le signe ou la valeur de la longueur de diffusion  $a$  caractérisant les interactions  $\uparrow\downarrow$ .

Pour un gaz de bosons (ou pour un gaz de fermions avec un rapport  $m_\uparrow/m_\downarrow$  très différent de 1), nous avons expliqué que l'hypothèse énoncée ci-dessus n'est pas toujours correcte. Au voisinage d'une résonance de diffusion, la physique à trois corps peut introduire de nouvelles échelles de longueur et d'énergie, ce qui complique alors le problème puisque  $a$  n'est plus la seule grandeur caractérisant les interactions. Pour éviter ce problème, nous supposons dans ce chapitre que le gaz de Bose est préparé dans une configuration telle que :

1. Il peut bien sûr s'agir d'un pseudo-spin, ces deux états étant alors choisis parmi l'ensemble des sous-niveaux Zeeman des atomes.

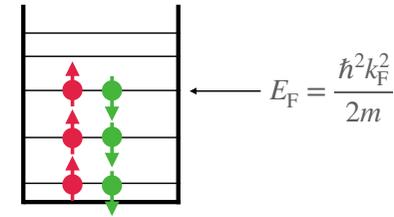


FIGURE 4. État fondamental d'un gaz de Fermi équilibré et sans interaction, avec le remplissage de tous les états à une particule jusqu'au niveau de Fermi.

- la longueur de diffusion  $a$  est positive, pour assurer la stabilité en champ moyen ;
- la densité est suffisamment faible pour que  $na^3 \ll 1$ , c'est-à-dire  $a \ll d$ , de sorte qu'il existe une plage de temps durant laquelle le gaz peut atteindre son état d'équilibre lié aux interactions à deux corps, sans que les états à trois corps ne soient appréciablement peuplés (voir chapitre 4, § 1.1).

Notons que ces hypothèses restent compatibles avec l'utilisation d'une résonance de Fano–Feshbach,  $b \ll a$  pourvu que l'on ait simultanément  $a \ll d$ .

### 1-3 Rappel sur le gaz de Fermi

Puisque le gaz de Fermi va jouer un rôle essentiel dans ce chapitre, nous allons rappeler ici quelques définitions et propriétés concernant ce système. Nous supposons que le gaz est "équilibré", c'est-à-dire qu'il y a le même nombre d'atomes dans chaque état de spin :

$$N_\uparrow = N_\downarrow \equiv \frac{N}{2}. \tag{1}$$

En absence d'interaction, l'état fondamental du gaz s'obtient en remplissant avec deux particules (une  $\uparrow$ , une  $\downarrow$ ) chaque état d'impulsion depuis l'impulsion nulle jusqu'au *niveau de Fermi*, d'impulsion  $\hbar k_F$  (figure 4). La

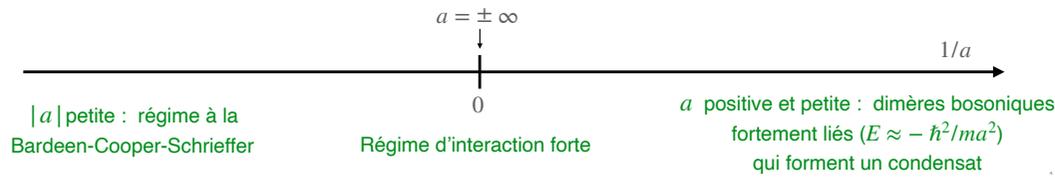


FIGURE 5. Les différents régimes pour l'état fondamental d'un gaz de Fermi avec des interactions  $\uparrow\downarrow$  en onde  $s$ , caractérisées par la longueur de diffusion  $a$ .

valeur du niveau de Fermi se déduit de

$$N = \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} 2 \tag{2}$$

en utilisant le passage habituel d'une somme discrète sur  $\mathbf{k}$  à une intégrale :

$$N = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}| < k_F} 2 d^3k = \frac{L^3 k_F^3}{3\pi^2}, \tag{3}$$

ce qui donne

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad \text{avec} \quad n = \frac{N}{L^3}. \tag{4}$$

L'énergie de l'état fondamental en absence d'interaction vaut :

$$E = \sum_{\mathbf{k}=0}^{|\mathbf{k}| < k_F} 2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{3}{5} N E_F \quad \text{avec} \quad E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \tag{5}$$

Prenons maintenant en compte les interactions. À basse température, seules les interactions en onde  $s$  sont significatives et le principe de Pauli interdit ce canal pour les collisions  $\uparrow\uparrow$  et  $\downarrow\downarrow$ . En revanche, les interactions entre les deux composantes  $\uparrow\downarrow$  sont possibles et elles rendent ce système extrêmement riche. Pour toute valeur de  $a$ , positive ou négative, on prédit et on observe une transition de l'état normal à haute température vers un état superfluide à basse température [voir par exemple ZWARGER (2012)]. En particulier, quand on croise une résonance de Fano–Feshbach, on observe pour l'état fondamental les régimes suivants (figure 5) :

- Pour  $a$  positive et petite devant  $d$ , cet état superfluide peut être approché par la théorie de la condensation de Bose–Einstein, avec des paires de fermions qui se forment dans l'espace réel pour constituer des dimères bosoniques.
- Pour  $a$  négative et petite en valeur absolue, l'état superfluide peut être décrit par la théorie BCS (Bardeen–Cooper–Schrieffer).
- Au voisinage de la résonance, on trouve le régime d'interaction forte  $n|a|^3 \gtrsim 1$ .

Il n'est pas question de passer en revue dans ce chapitre toute la physique du gaz de Fermi en interaction. Nous nous contenterons d'indiquer au fur et à mesure les éléments indispensables pour l'étude du lien entre interactions binaires et propriétés macroscopiques du fluide.

### 1-4 Résonances de Feshbach larges ou étroites ?

L'approche de Tan permet de fournir des prédictions quantitatives sur des systèmes en interaction forte, avec une longueur de diffusion  $a$  grande devant la portée du potentiel  $b$ . En physique des gaz atomiques, la portée  $b$  est donnée par la longueur de van der Waals  $R_{vdW}$  et une grande longueur de diffusion  $a \gg R_{vdW}$  est généralement obtenue via une résonance de Fano–Feshbach. Nous avons étudié ces résonances dans le cours de l'an dernier et montré que l'on pouvait les classer en deux catégories :

- Les résonances larges, pour lesquelles l'amplitude de diffusion s'écrit en bonne approximation

$$f(k) \approx \frac{-a}{1 + ika} \tag{6}$$

pour tous les  $k$  tels que  $k \lesssim b^{-1}$ . La longueur de diffusion est dans ce cas le seul paramètre pertinent pour caractériser les interactions binaires et tout ce qui suit dans ce chapitre s'applique sans problème.

- Les résonances étroites, pour lesquelles il faut prendre en compte un terme quadratique au dénominateur de cette fraction :

$$f(k) \approx \frac{-a}{1 + ika + k^2 R_* a}, \tag{7}$$

la longueur  $R_*$  étant grande devant la portée "naturelle"  $b \approx R_{\text{vdW}}$  (PETROV 2004). Pour ces résonances étroites, correspondant à un terme de portée effective  $r_e = -2R_*$  anormalement grand, l'approche qui suit n'est pas applicable telle quelle<sup>2</sup> puisque la longueur de diffusion ne suffit pas à elle seule à la caractérisation des interactions binaires dans le domaine  $k \lesssim b^{-1}$ .

## 2 Contact et corrélations à deux corps

### 2-1 Rappel : états de diffusion proches de $E = 0$

Nous allons rappeler ici quelques propriétés utiles des états stationnaires de diffusion à basse énergie. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur vers le cours 2021. Nous nous intéressons aux collisions en onde  $s$  (donc isotropes) et l'analyse du processus se fait en considérant l'équation radiale vérifiée par la fonction d'onde réduite  $u_k(r) = r\psi_k(r)$  d'énergie  $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$ , où  $m_r = m/2$  est la masse réduite :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} u_k'' + V(r) u_k(r) = E u_k(r). \quad (8)$$

En dehors de la portée du potentiel, cette solution s'écrit en fonction du déphasage  $\delta_0(k)$  :

$$r \gtrsim b : \quad u_k(r) \propto \sin[kr + \delta_0(k)]. \quad (9)$$

La longueur de diffusion est définie par  $a = -\lim_{k \rightarrow 0} \delta_0(k)$  de sorte que (9) devient

$$r \gtrsim b, k \rightarrow 0 : \quad u_k(r) \propto a - r. \quad (10)$$

Ce comportement commun à toutes les fonctions radiales réduites  $u_k(r)$  pour  $k$  petit est illustré sur la figure 6 dans le cas d'un puits carré. On s'est placé au voisinage d'une résonance avec  $a = 10b$ . La fonction d'onde normée  $\psi_0(r)$  a donc le comportement suivant :

$$r > b : \quad \psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left( \frac{a}{r} - 1 \right) = \frac{a}{\sqrt{L^3}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (11)$$

<sup>2</sup> WERNER & CASTIN (2012b) détaillent comment généraliser l'approche de Tan pour prendre en compte le terme de portée effective.

et le comportement des  $\psi_k(r)$  est voisin pour  $k$  suffisamment petit. Nous allons voir dans ce qui suit que c'est le comportement en  $1/r$  de  $\psi_0$  qui joue un rôle déterminant.

### 2-2 Un argument qualitatif

Pour commencer, considérons la fonction d'onde de l'état fondamental d'un gaz de  $N$  particules.

- Pour des bosons sans spin, nous écrivons cette fonction d'onde sous la forme  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ , avec la normalisation

$$\int |\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 d^3r_1 \dots d^3r_N = 1. \quad (12)$$

Les particules ayant été numérotées arbitrairement  $1, 2, \dots$ , cette fonction d'onde donne l'amplitude de probabilité pour trouver la particule 1 au point  $\mathbf{r}_1$ , la particule 2 au point  $\mathbf{r}_2, \dots$  et elle est symétrique par échange de deux particules.

- Pour le cas des fermions, nous considérons un gaz avec  $N/2$  particules dans l'état de spin  $\uparrow$  et  $N/2$  particules dans l'état de spin  $\downarrow$ . Nous pouvons écrire la fonction d'onde à  $N$  corps en attribuant les indices impairs  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \dots$  aux  $N/2$  fermions de spin  $\uparrow$  et les indices pairs  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, \dots$  aux  $N/2$  fermions de spin  $\downarrow$  avec la même normalisation qu'en (12). Cette fonction d'onde est antisymétrique par toute permutation de deux indices impairs, et également antisymétrique par toute permutation de deux indices pairs.

Fixons les positions  $\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \dots, \mathbf{r}_N$  et intéressons-nous à la forme de  $\Phi$  quand  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  se rapprochent l'un de l'autre. Plus précisément, posons

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad (13)$$

et considérons la limite des petits  $r$  (typiquement de l'ordre de  $b$ ), en supposant que les  $N - 2$  particules restantes sont à une distance  $\gg b$  de  $\mathbf{R}$  (figure 7). Il est alors naturel de supposer le résultat suivant :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \approx \psi_0(r) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (14)$$

où  $\psi_0(r)$  l'état de diffusion pour la particule relative de la paire (1,2) à énergie nulle (cf. figure 6, bas). Dans le cas d'une interaction forte,  $a \sim d$ , on

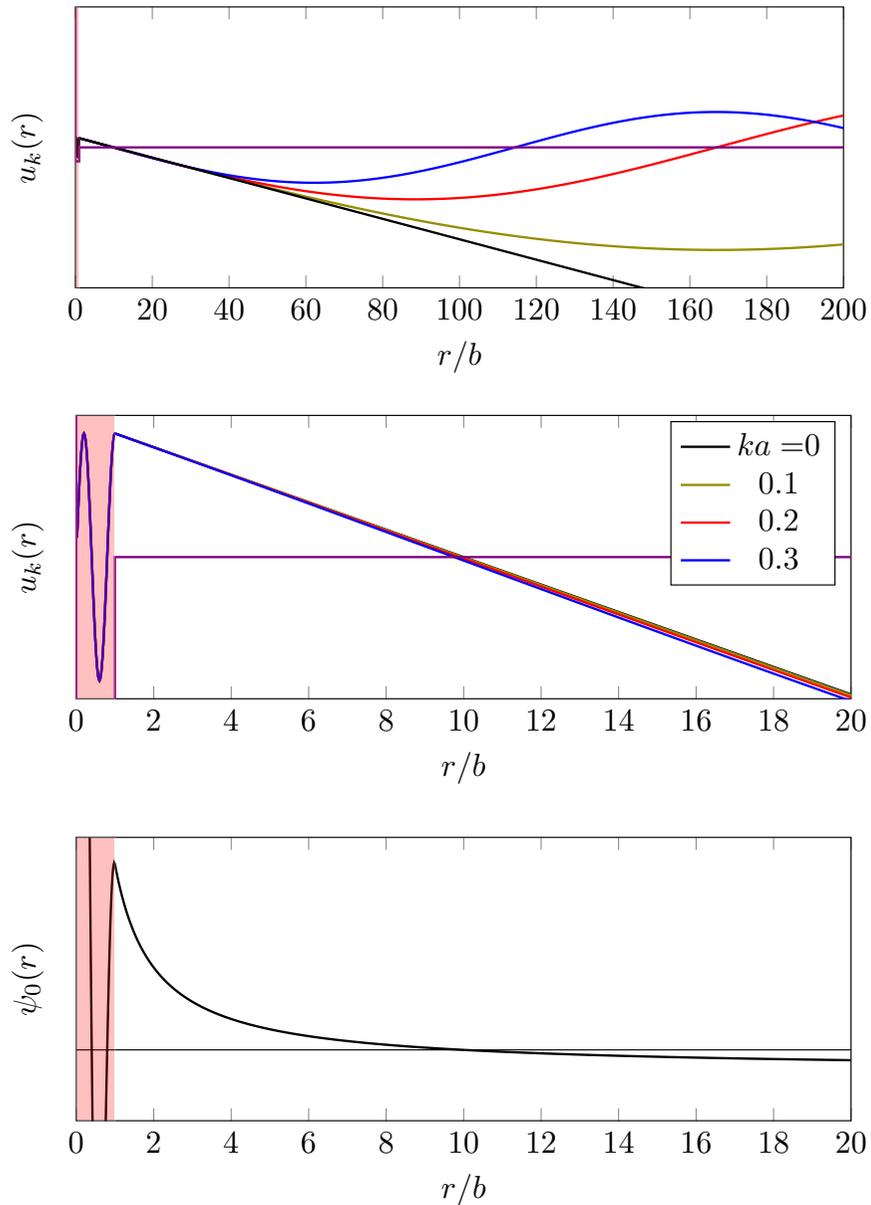


FIGURE 6. Fonctions radiales réduites  $u_k(r)$  et fonction radiale  $\psi_0(r)$  pour une diffusion par un puits carré avec  $a = 10b$ .

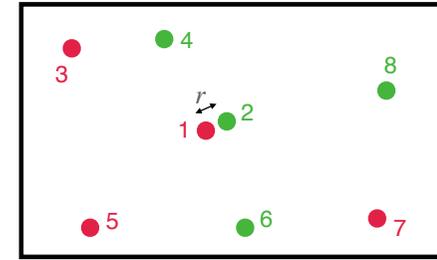


FIGURE 7. Système à  $N$  fermions. On s'intéresse au comportement de la fonction d'onde  $\Phi$  quand les particules 1 et 2 de spin opposés s'approchent l'une de l'autre, les autres particules étant éloignées de  $\mathbf{r}_1$  et de  $\mathbf{r}_2$ .

s'attend à ce que cette forme reste valable tant que  $r \ll a, d$ , c'est-à-dire tant que les particules 1 et 2 ne rentrent pas dans les "zones d'influence" des autres particules, et interagissent seulement l'une avec l'autre.

**Remarque.** Si on décrit l'interaction entre particules par le pseudo-potential, l'argument qualitatif que nous venons de donner devient la définition du domaine des fonctions d'onde éligibles pour décrire le système (WERNER & CASTIN 2012b). Cette fonction d'onde doit être telle que pour toute paire de particules, par exemple (1, 2), on a :

$$r \rightarrow 0 : \quad \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \left( \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{a} \right) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) + \mathcal{O}(r_{12}) \quad (15)$$

où  $\tilde{\Phi}$  est une fonction régulière des coordonnées des  $N - 2$  autres particules et de  $\mathbf{R}$ . On a supposé ici que  $\mathbf{R}$  est différent de  $\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ .

### 2-3 Fonction de corrélation spatiale à deux corps

L'argument présenté ci-dessus était restreint au cas où les positions  $\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$  ne se rapprochaient pas des positions  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  considérées pour écrire (14). Pour rendre cette hypothèse plus quantitative, nous allons la reformuler en terme de fonction de corrélation à deux corps.

Présentons la démarche sur le cas de fermions . On introduit la fonction de corrélation "à quatre points" (ZHANG & LEGGETT 2009)

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \langle \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_a) \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_b) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}_b) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}_a) \rangle \quad (16)$$

qui se calcule à partir de la fonction d'onde  $\Phi$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &= \frac{N^2}{4} \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &\times \Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (17)$$

Cette fonction de corrélation est normalisée comme :

$$\iint \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) d^3r_a d^3r_b = \frac{N^2}{4}. \quad (18)$$

Plus précisément, fixons  $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}'_b = \mathbf{0}$  et intéressons-nous à l'objet "à deux points" :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) = \langle \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle \quad (19)$$

Nous allons chercher à caractériser le comportement de cette fonction quand  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  se rapprochent tous deux de  $\mathbf{0}$ . Pour cela, on note que  $\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0})$  peut être considéré comme l'élément de matrice d'un opérateur hermitien  $\hat{\mathcal{O}}$  en représentation position,  $\langle \mathbf{r}' | \hat{\mathcal{O}} | \mathbf{r} \rangle$ . Cet opérateur peut être diagonalisé pour s'écrire (YU, BRUUN et al. 2009) :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) = \sum_j \gamma_j \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}). \quad (20)$$

L'hypothèse à la base de la théorie du contact se formule alors de la manière suivante : on suppose que pour  $r \ll d$ , les fonctions  $\phi_j(\mathbf{r})$  significativement peuplées sont toutes très proches de la fonction d'onde à deux particules  $\psi_0(r)$  introduite en §2-1. On définit donc la quantité  $C$  telle que

$$r, r' \ll d : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \quad (21)$$

En utilisant (11), cette relation s'écrit en dehors de la portée  $b$  du potentiel

$$b \lesssim r, r' \ll d, a : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r} \quad (22)$$

La quantité  $C$  est appelée *contact à deux corps*. C'est une quantité extensive dont la dimension est l'inverse d'une longueur. Le point central de l'approche développée ici est qu'à courte distance, la physique à  $N$  corps intervient uniquement par l'intermédiaire de cette constante multiplicative. Notons que nous avons défini ici le contact pour l'état fondamental du système. Nous verrons en §3 comment généraliser cette définition au cas  $T \neq 0$ , une fois le lien établi avec la thermodynamique du gaz.

On procède d'une manière similaire pour les bosons en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) &\equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_a) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_b) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_b) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_a) \rangle \\ &= N(N-1) \int d^3r_3 \dots d^3r_N \Phi^*(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &\times \Phi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N). \end{aligned} \quad (23)$$

Cette fonction est normée de la façon suivante

$$\iint \mathcal{G}_2(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b; \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) d^3r_a d^3r_b = N(N-1). \quad (24)$$

L'hypothèse à la base de la théorie du contact s'écrit alors pour des bosons :

$$r, r' \ll d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \quad (25)$$

ou encore si  $a \gg b$  :

$$b \lesssim r, r' \ll a, d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'} \frac{1}{r} \quad (26)$$

**Remarque.** La condition de validité à courte distance comparant  $r, r'$  et la portée  $b$  devrait en toute rigueur s'écrire  $b \ll r, r'$ . Nous prenons ici la condition moins contraignante  $b \lesssim r, r'$  en nous appuyant sur les résultats numériques de YIN & BLUME (2015) qui seront décrits en §4-3. Ces auteurs considèrent un potentiel d'interaction à deux corps gaussien,  $V(r) = V_0 \exp(-2r^2/b^2)$ , et montrent pour un gaz de  $N = 10$  particules que la loi (26) est atteinte en bonne approximation dès que  $r$  et  $r'$  dépassent  $b$  (voir figure 12).

## 2-4 Distribution de paires

Une fois posées les formes (22,26) de la fonction  $\mathcal{G}_2$ , on peut déterminer le comportement à courte distance de la fonction de distribution de paires, définie ici pour des fermions :

$$G_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) \equiv \int \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}, \mathbf{r}_a; \mathbf{r}_a + \mathbf{r}, \mathbf{r}_a) d^3r_a \quad (27)$$

et on trouve en utilisant l'invariance par translation du système :

$$b \lesssim r \ll d, a : \quad G_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 r^2}. \quad (28)$$

Un résultat identique apparaît pour des bosons, sans l'indice  $\uparrow\downarrow$  bien sûr.

L'augmentation rapide de  $G_2(r)$  à courte distance peut être comprise comme une tendance au groupement des particules, pourvu qu'elles soient de spins opposés dans le cas des fermions. Pour approfondir ce point, plaçons-nous dans la limite  $b \rightarrow 0$  (pseudo-potentiel) et considérons une particule de spin  $\uparrow$  en un point donné, par exemple l'origine des coordonnées; regardons la probabilité  $\delta P$  de trouver une particule de spin  $\downarrow$  dans une boule de rayon infinitésimal  $r$  centrée en 0. Si les particules étaient non corrélées, cette probabilité varierait comme  $\delta P \propto r^3$  quand  $r \rightarrow 0$ . Compte tenu de la variation de  $G_2$ , nous trouvons ici  $\delta P \propto r$ ; cette probabilité tend toujours vers 0 quand  $r \rightarrow 0$ , mais seulement linéairement avec  $r$  au lieu de la loi en  $r^3$  attendue pour des particules indépendantes.

**Lien avec l'approche de Bogoliubov.** Au chapitre précédent, nous avons calculé la fonction  $g_2 = G_2/nN$  et trouvé à courte distance le résultat suivant :

$$r \ll \xi : \quad g_2(r) \approx \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 \quad (29)$$

soit pour  $r \ll a \ll d$  :

$$r \ll a : \quad G_2(r) \approx \frac{nNa^2}{r^2}. \quad (30)$$

Cette variation est bien conforme à (28) et on en déduit la valeur du contact pour un gaz de Bose en interaction faible et à  $T = 0$  :

$$\text{Bogoliubov :} \quad C = (4\pi a)^2 nN \quad (31)$$

Notons que la condition de validité  $r \ll \xi$  de (29) est moins contraignante que la condition  $r \ll d$  du cas général (25). En effet,  $\xi = (8\pi na)^{-1/2} = d(d/8\pi a)^{1/2}$  est grand devant  $d$  dans le régime d'interaction faible.

## 2-5 Distribution en impulsion

Comme annoncé en introduction, le contact  $C$  intervient dans de nombreuses quantités physiques caractérisant le fluide. Nous nous intéressons ici à la distribution en impulsion<sup>3</sup>  $n(\mathbf{k})$ .

Considérons par exemple des bosons et écrivons pour commencer l'amplitude de probabilité pour trouver la particule 1 avec l'impulsion  $\mathbf{k}$ , les particules  $2, \dots, N$  étant fixées aux points  $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Cette amplitude s'écrit :

$$A_1(\mathbf{k}; \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \int d^3r_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (32)$$

La distribution de probabilité  $n_1(\mathbf{k})$  pour l'impulsion de la particule 1 s'obtient en prenant le module carré de cette expression, puis en intégrant sur toutes les positions  $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , ce qui donne :

$$n_1(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1)} \Phi^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \times \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d^3r_1 d^3r'_1 d^3r_2 \dots d^3r_N, \quad (33)$$

ce qui fait apparaître de manière naturelle la fonction de corrélation à quatre points  $\mathcal{G}_2$  considérée plus haut.

Nous nous intéressons ici au comportement de cette fonction aux grands  $k$ , provenant donc de la contribution des petites différences  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1|$ . Cette contribution devient importante quand le couple  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1)$  se rapproche d'une des autres positions  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N$ . Considérons par exemple le comportement résonant entre  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2)$ , le résultat devant ensuite être multiplié par  $N - 1$  pour prendre en compte les autres possibilités

3. Pour éviter de voir intervenir la constante  $\hbar$  dans tout ce qui suit, nous travaillons plutôt avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  que la véritable impulsion  $\hbar\mathbf{k}$ .

$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_j), j = 3 \dots N$ . On voit apparaître en utilisant (26) :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 \text{ proches : } & \int d^3 r_3 \dots d^3 r_N \Phi^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ \times \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) & \approx \frac{1}{N(N-1)} \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \frac{1}{r'_{12}} \frac{1}{r_{12}}. \end{aligned} \quad (34)$$

La contribution du terme  $\frac{1}{r'_{12}} \frac{1}{r_{12}}$  à la transformée de Fourier donnant  $n_1(\mathbf{k})$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1)}}{r'_{12} r_{12}} d^3 r_1 d^3 r'_1 d^3 r_2 & = \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_2)}}{r'_{12}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}}{r_{12}} d^3 r_1 d^3 r'_1 d^3 r_2 \\ & = L^3 \left( \frac{4\pi}{k^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

où on a utilisé

$$\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} d^3 r = \frac{4\pi}{k^2}. \quad (36)$$

Nous trouvons donc le comportement dominant pour les grandes impulsions pour la particule 1 :

$$n_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \frac{C}{k^4} + \dots \quad (37)$$

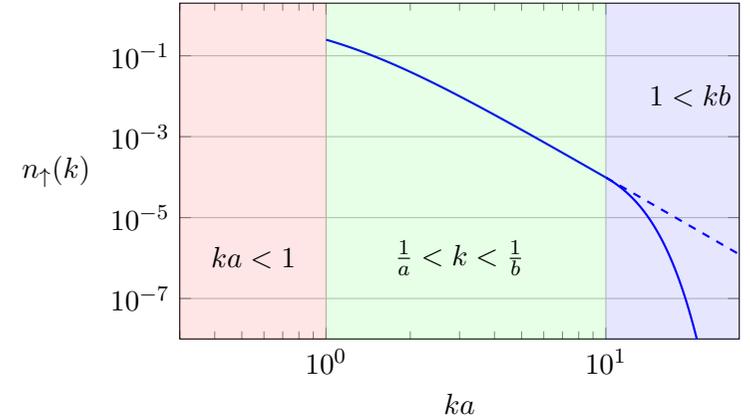
et il ne reste plus qu'à multiplier le résultat par  $N$  pour obtenir la distribution en impulsion totale du gaz :

$$\boxed{\text{Bosons : } n(\mathbf{k}) = \frac{C}{k^4} + \dots} \quad (38)$$

cette distribution étant par construction normalisée de la manière suivante (cf. (33)) :

$$\text{Bosons : } \frac{1}{(2\pi)^3} \int n(\mathbf{k}) d^3 k = N. \quad (39)$$

On trouve donc que la distribution en impulsion se comporte comme  $k^{-4}$  aux grands  $k$  (là où le terme "... " devient négligeable) et le contact donne directement le poids de cette composante.



**FIGURE 8.** Allure typique de la distribution en impulsion  $n(k)$  d'un gaz de Fermi à deux composantes ou d'un gaz de Bose (en négligeant les effets à trois corps) dans la limite d'une longueur de diffusion  $a \sim d$  grande devant la portée  $b$  du potentiel inter-atomique. La loi  $n(k) \approx C/k^4$  est valable dans la région centrale colorée en vert.

Pour un gaz de fermions de spin 1/2 équilibré, le contact a été défini de sorte que cette relation reste valable pour chaque composante :

$$\boxed{\text{Fermions : } n_{\uparrow}(\mathbf{k}) = n_{\downarrow}(\mathbf{k}) = \frac{C}{k^4} + \dots} \quad (40)$$

avec la normalisation

$$\text{Fermions : } \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_{\uparrow}(\mathbf{k}) d^3 k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_{\downarrow}(\mathbf{k}) d^3 k = \frac{N}{2}. \quad (41)$$

Rappelons que nous avons prouvé l'existence de cette aile dans le cadre de la théorie de Bogoliubov pour le pseudo-potentiel, dans le cas  $na^3 \ll 1$ . L'intérêt (considérable!) de la présente approche est de généraliser ce résultat au cas des grandes longueurs de diffusion, voire même au cas unitaire  $1/a = 0$ . Son domaine de validité dans le cas des interactions fortes  $a \sim d$  se déduit directement de celui trouvé pour la distribution de paires

au paragraphe précédent :

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{\bar{a}} \ll k \lesssim \frac{1}{b}. \quad (42)$$

Cette loi générale en  $k^{-4}$ , valable au régime unitaire et de part et d'autre de ce régime, a été prédite pour la première fois par HAUSSMANN (1994).

**Remarque.** Il est intéressant de noter qu'une loi en  $1/k^4$  apparaît pour un gaz à une dimension décrit par le modèle de Tonks (MINGUZZI, VIGNOLO et al. 2002) ou de Lieb–Lininger, avec un préfacteur relié à la dérivée de l'énergie de l'état fondamental du gaz de manière similaire à ce que nous verrons en §3 (OLSHANII & DUNJKO 2003). Cette loi en  $1/k^4$  est également valable à deux dimensions, aussi bien pour des fermions (WERNER & CASTIN 2012b; SHI, CHIESA et al. 2015) que pour des bosons (WERNER & CASTIN 2012a). Notons que pour des bosons à 2D, le problème d'Efimov ne se pose pas (BRODSKY, KAGAN et al. 2006) et les difficultés liées à l'introduction d'un paramètre supplémentaire pour décrire les interactions à trois corps sont absentes.

### 3 Définition thermodynamique du contact

#### 3-1 Une nouvelle variable thermodynamique

Nous passons dans cette partie à une définition apparemment différente du contact, fondée sur la notion de variable thermodynamique. Un fluide à l'équilibre est décrit par son équation d'état, qui donne la variation d'un potentiel thermodynamique (son énergie  $E$  par exemple) en fonction de variables thermodynamiques conjuguées comme entropie/température, volume/pression, nombre de particules/potentiel chimique. On a ainsi la différentielle totale pour l'énergie

$$dE = T dS - P dL^3 + \mu dN \quad (43)$$

avec

$$T = \left( \frac{\partial E}{\partial S} \right)_{L^3, N}, \quad P = - \left( \frac{\partial E}{\partial L^3} \right)_{S, N}, \quad \mu = \left( \frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, L^3}. \quad (44)$$

Le potentiel d'interaction peut être ajouté à la liste de ces variables thermodynamiques, mais sa caractérisation nécessite en général un grand nombre de paramètres, ce qui rend cette notion peu utile en pratique. La situation change radicalement quand on s'intéresse à un gaz dilué et froid, puisque les interactions peuvent alors être décrites à l'aide d'un seul paramètre, la longueur de diffusion  $a$ . Il est alors pertinent d'introduire ce paramètre de façon explicite dans l'équation d'état, ce qui amène à introduire également sa quantité thermodynamique conjuguée. En fait, il est plus commode d'utiliser la variable  $1/a$  et de poser

$$\text{Bosons : } \frac{\hbar^2 C}{8\pi m} = - \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{S, L^3, N} \quad (45)$$

La description thermodynamique du fluide se fait ensuite selon la procédure usuelle, en utilisant la différentielle d'un potentiel thermodynamique, l'énergie par exemple :

$$dE = T dS - P dL^3 + \mu dN - \frac{\hbar^2 C}{8\pi m} d(1/a) \quad (46)$$

Nous allons dans un premier temps nous placer à température nulle (donc à entropie nulle) et montrer que la quantité  $C$  qui figure dans cette expression coïncide avec le contact introduit en (25). Nous généraliserons cette démarche au cas de la température non nulle en §3-4.

**Cas des fermions.** Pour des fermions de spin 1/2, la définition est modifiée par un facteur 2 et devient

$$\text{Fermions : } \frac{\hbar^2 C}{4\pi m} = - \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{S, L^3, N} \quad (47)$$

Ce facteur 2 supplémentaire permet d'absorber le fait qu'un fermion n'interagit qu'avec  $N/2$  particules (celles de spin opposé), alors qu'un boson interagit avec les  $N - 1$  autres particules. Comme nous l'avons déjà mentionné, avec cette définition, l'aile de la distribution en impulsion s'écrit  $C/k^4$  aussi bien pour des bosons que chacune des composantes de spin des fermions.

### 3-2 Un lemme utile

Pour relier le contact à la dérivée de l'énergie par rapport à la longueur de diffusion, nous allons commencer par prouver un résultat préliminaire. Considérons une collision entre deux particules de masse  $m$ , soit une masse réduite  $m_r = m/2$ . L'interaction entre les deux particules est décrite par le potentiel  $V(r)$  et on considère la solution d'énergie nulle  $\psi_0(r)$  pour l'équation radiale. Supposons que le potentiel d'interaction  $V(r)$  est légèrement modifié :

$$V(r) \longrightarrow V(r) + \delta V(r). \quad (48)$$

Nous nous intéressons à la modification correspondante  $\delta a$  de la longueur de diffusion  $a$  et nous allons établir le résultat suivant :

$$\boxed{L^3 \int_0^\infty \delta V(r) \psi_0^2(r) d^3r = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \delta a} \quad (49)$$

la fonction  $\psi_0(r)$  étant normalisée de sorte que  $\psi_0(r) \approx 1/L^{3/2}$  à l'infini [cf. (11)].

**Démonstration :** Comme d'habitude, il est commode de considérer la fonction d'onde radiale réduite  $u_0(r) = r \psi_0(r)$  qui est solution de l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} u_0''(r) + V(r) u_0(r) = 0. \quad (50)$$

Notons  $\delta u(r)$  la modification de  $u_0(r)$  induite par le changement  $\delta V$ . Nous obtenons à l'ordre 1 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \delta u''(r) + \delta V(r) u_0(r) + V(r) \delta u(r) = 0. \quad (51)$$

Multiplions cette équation par  $u_0(r)$  et intégrons le résultat entre  $r = 0$  et  $r = r_{\max}$ , borne supérieure que nous prendrons infinie à la fin du calcul :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_r} \int_0^{r_{\max}} \delta u''(r) u_0(r) dr + \int_0^{r_{\max}} \delta V(r) u_0^2(r) dr \\ & + \int_0^{r_{\max}} V(r) \delta u(r) u_0(r) dr = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Pour évaluer le premier terme, rappelons que  $u_0(r)$  et  $u_0(r) + \delta u(r)$  satisfont les conditions aux limites :

$$u_0(0) = 0, \quad \delta u(0) = 0 \quad (53)$$

et

$$r \gg b : \quad u_0(r) \approx \frac{1}{L^{3/2}}(r - a), \quad u_0(r) + \delta u(r) \approx \frac{1}{L^{3/2}}(r - a - \delta a), \quad (54)$$

c'est-à-dire  $\delta u(r) \approx -\delta a/L^{3/2}$  et  $\delta u' \approx 0$  aux grands  $r$ . Une double intégration par parties du premier terme donne donc

$$\begin{aligned} \int_0^{r_{\max}} \delta u_0''(r) u_0(r) dr &= [u_0 \delta u']_0^{r_{\max}} - [u_0' \delta u]_0^{r_{\max}} + \int_0^{r_{\max}} u_0''(r) \delta u(r) dr \\ &= 0 + \frac{\delta a}{L^3} + \frac{2m_r}{\hbar^2} \int_0^{r_{\max}} V(r) u_0(r) \delta u(r) dr \end{aligned} \quad (55)$$

Il suffit alors de reporter ce résultat dans (52) dans la limite  $r_{\max} \rightarrow +\infty$  pour obtenir le résultat annoncé en (49).

### 3-3 Variation de $a$ et contact

Nous sommes désormais en mesure de prouver que le paramètre  $C$  introduit comme variable conjuguée de  $1/a$  n'est autre que le contact défini en (21,25) à partir de la fonction de corrélation à deux corps. On considère une assemblée de  $N$  particules en interaction binaire, avec l'hamiltonien :

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (56)$$

avec

$$\hat{H}_{\text{cin}} = \sum_j \frac{\hat{p}_j^2}{2m} \quad \hat{H}_{\text{int}} = \sum_{i < j} V(\hat{r}_{ij}). \quad (57)$$

Considérons une variation infinitésimale du potentiel  $V$  induisant une variation (également très faible) de la longueur de diffusion  $a$ . On effectue cette variation à volume et nombre de particules constants (rappelons que nous nous sommes placés pour l'instant à température nulle et donc à entropie nulle). On cherche à évaluer

$$\left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{L^3, N}. \quad (58)$$

Le théorème d'Hellmann–Feynman permet d'exprimer la variation de l'énergie en fonction de la variation de l'hamiltonien lui-même :

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial a} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{H}_{\text{int}}}{\partial a} \right\rangle. \quad (59)$$

Le dernier membre se calcule en utilisant le lien entre la variation  $\delta V$  et la variation  $\delta a$  établi avec le lemme (49). Prenons par exemple le cas des bosons et partons de

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle &= \frac{N(N-1)}{2} \int \delta V(r_{12}) |\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)|^2 d^3 r_1 \dots d^3 r_N \\ &= \frac{1}{2} \int \delta V(r_{12}) \mathcal{G}_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2 \\ &= \frac{L^3}{2} \int \delta V(r) \mathcal{G}_2(\mathbf{r}, \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) d^3 r. \end{aligned} \quad (60)$$

Du fait de la présence de  $\delta V$ , l'intégrande n'est non nul que si  $r \lesssim b$ . On peut donc utiliser l'hypothèse de départ de la théorie du contact, à savoir l'équation (25) que nous reproduisons ici pour  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  :

$$r \ll d : \quad \mathcal{G}_2(\mathbf{r}, \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} |\psi_0(\mathbf{r})|^2. \quad (61)$$

En utilisant le lemme (49), on arrive alors à :

$$\delta \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \frac{C \hbar^2}{8\pi m a^2} \delta a, \quad (62)$$

dont on déduit la relation recherchée :

$$\frac{\partial E}{\partial(1/a)} = -a^2 \frac{\partial E}{\partial a} = -a^2 \frac{\delta \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle}{\delta a} = -\frac{C \hbar^2}{8\pi m}. \quad (63)$$

La quantité thermodynamique  $C$  introduite en (45) est donc bien identique au contact défini à partir de la fonction  $\mathcal{G}_2$  et utilisé en (61).

### 3-4 La cas de la température non nulle

Dans tout ce qui précède, nous avons considéré le cas d'un système à température nulle et nous avons exprimé le contact en fonction de l'énergie

de l'état fondamental du système. En fait, la démarche que nous avons décrite pour l'état fondamental peut être effectuée pour tout état propre  $\Phi_j$  de l'hamiltonien du système à  $N$  corps, pourvu que son énergie soit suffisamment basse pour que les interactions restent limitées à l'onde  $s$ . Cela garantit en effet que la fonction de corrélation à deux corps déduite de  $\Phi_j$  se comporte comme indiqué en (21,25).

Commençons par définir un contact  $C_j$  pour chaque état propre  $\Phi_j$  d'énergie  $E_j$  comme [cf. (45-47)]

$$C_j = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E_j}{\partial(1/a)} \right)_{N, L^3} \quad (64)$$

avec le facteur 4 (resp. 8) pour des fermions (resp. bosons). Supposons maintenant que le système est dans un mélange statistique d'états propres, avec un opérateur densité

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j |\Phi_j\rangle \langle \Phi_j|, \quad (65)$$

les  $P_j$  obéissant par exemple à la loi de Boltzmann  $P_j \propto e^{-E_j/k_B T}$  pour une température  $T$ . Nous pouvons définir un contact moyen, avec les poids  $P_j$  :

$$C = \sum_j P_j C_j \quad (66)$$

et ce contact permettra de calculer toutes les quantités auxquelles nous nous sommes intéressés jusqu'ici, comme la distribution en impulsion, la fonction de corrélation à deux corps ou encore le spectre radio-fréquence que nous aborderons dans le chapitre suivant. En effet, le contact intervient de manière linéaire dans ces expressions.

En insérant l'expression de chaque  $C_j$  dans (66), nous trouvons donc

$$C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{N, L^3, \{P_j\}} \quad \text{avec} \quad E = \sum_j P_j E_j. \quad (67)$$

La dérivée définissant le contact moyen doit être prise en gardant constantes les populations de chaque état propre  $\Phi_j$ , ce qui constitue la définition d'un processus adiabatique en thermodynamique quantique. On peut donc remplacer la définition précédente de  $C$  par une formulation

plus conventionnelle, faisant intervenir la dérivée à entropie constante de l'énergie moyenne du système :

$$\text{fermions/bosons : } C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial(1/a)} \right)_{N,L^3,S} \quad (68)$$

On peut également travailler à  $T$  et  $N$  constants, ce qui revient à remplacer l'énergie moyenne  $E$  par l'énergie libre  $F = E - TS$  :

$$\text{fermions/bosons : } C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial F}{\partial(1/a)} \right)_{N,L^3,T} \quad (69)$$

ou encore à  $T$  et  $\mu$  constants, et utiliser le grand potentiel  $\Omega$  :

$$\text{fermions/bosons : } C = -\frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial(1/a)} \right)_{\mu,L^3,T} \quad (70)$$

Remarquons que dans ce dernier cas, on sait que pour un système extensif, le grand potentiel est relié au volume et à la pression par la relation simple  $\Omega = -PV$ , de sorte que le contact par unité de volume s'écrit :

$$\text{fermions/bosons : } \frac{C}{L^3} = \frac{[4/8]\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial P}{\partial(1/a)} \right)_{\mu,T} \quad (71)$$

Cette série de relation est remarquable puisqu'elle vient relier de nombreux paramètres microscopiques comme  $n_\sigma(k)$  ou  $G_2(r)$  à la thermodynamique du système, et cela alors même qu'il est (à l'heure actuelle) impossible de calculer l'équation d'état d'un système en interaction à toute température et pour une longueur de diffusion arbitraire.

Pour terminer ce paragraphe, indiquons que le contact, comme les autres quantités thermodynamiques, peut être calculé par un développement du viriel dans le régime faiblement dégénéré. On pourra consulter à ce sujet l'article de LIU (2013) et les références qu'il indique.

### 3-5 Contact et théorème du viriel

En utilisant l'analyse dimensionnelle, il est possible d'obtenir des relations entre les différentes quantités thermodynamiques comme l'énergie

interne, la pression et le contact. Considérons par exemple l'entropie du système, qui est une fonction d'état dont la différentielle s'écrit

$$\text{fermions/bosons : } dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dL^3 - \frac{\mu}{T}dN + \frac{\hbar^2 C}{[4/8]\pi m T}d(1/a). \quad (72)$$

L'entropie peut se mettre sous la forme  $S = Nk_B f(E, L^3, N, a)$  où la fonction  $f$  est sans dimension et intensive. On peut simplifier notablement son écriture :

— Comme  $f$  est intensive, seules les trois variables intensives  $E/N$ ,  $V/N$  et  $a$  doivent intervenir :

$$S = Nk_B f\left(\frac{E}{N}, \frac{L^3}{N}, a\right). \quad (73)$$

— Comme  $f$  est sans dimension, on doit pouvoir choisir ses variables également sans dimension. La longueur de diffusion  $a$  fournit une unité naturelle d'énergie,  $\hbar^2/ma^2$ , et une unité naturelle de volume  $a^3$ . On peut donc écrire l'entropie  $S$  comme

$$S = Nk_B f\left(\frac{E/N}{\hbar^2/ma^2}, \frac{L^3/N}{a^3}\right). \quad (74)$$

Une telle écriture, fonction de deux variables seulement, va nous permettre d'établir une relation entre les trois variables conjuguées de  $E$ ,  $L^3$  et  $a$ , c'est-à-dire  $T$ ,  $P$  et le contact  $C$ . On a en effet :

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{L^3,N,a} = Nk_B \frac{ma^2}{N\hbar^2} \partial_1 f \quad (75)$$

où  $\partial_1 f$  désigne la dérivée de  $f$  par rapport à sa première variable,

$$\frac{P}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial L^3} \right)_{E,N,a} = Nk_B \frac{1}{Na^3} \partial_2 f \quad (76)$$

et

$$\frac{\hbar^2 C}{[4/8]\pi m T} = \left( \frac{\partial S}{\partial(1/a)} \right)_{E,L^3,N} = -2Nk_B \frac{Ema^3}{N\hbar^2} \partial_1 f + 3Nk_B \frac{L^3}{Na^2} \partial_2 f. \quad (77)$$

L'élimination de  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$  entre les trois équations qui précèdent conduit alors à (TAN 2008c) :

$$\text{fermions/bosons : } PL^3 = \frac{2}{3}E + \frac{\hbar^2 C}{[12/24]\pi m a}. \quad (78)$$

On pourra consulter l'article de WERNER (2008) pour une généralisation de cette relation au cas d'un gaz confiné dans un potentiel de forme arbitraire.

**Cas unitaire.** Dans le cas  $a \rightarrow \infty$ , le contact tend vers une valeur finie de sorte qu'on trouve

$$\text{Gaz unitaire : } PL^3 = \frac{2}{3}E. \quad (79)$$

Cette relation remarquable est une conséquence de l'invariance d'échelle pour  $a$  infinie : les échelles d'énergie  $\hbar^2/ma^2$  et de volume  $a^3$  disparaissent, de sorte que l'équation d'état donnant l'entropie  $S$  (ou n'importe quelle autre fonction thermodynamique) n'est une fonction que d'une seule variable :

$$S = Nk_B f\left(\frac{EmL^2}{\hbar^2 N^{5/3}}\right). \quad (80)$$

La relation (79) s'en déduit en utilisant :

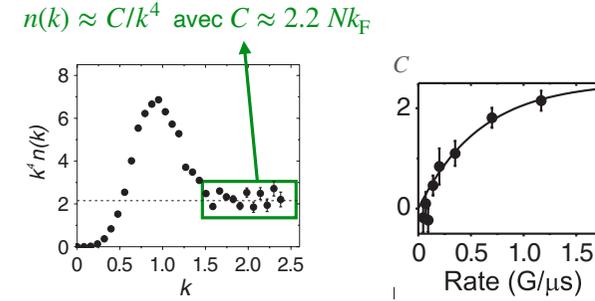
$$\frac{1}{T} = \frac{k_B mL^2}{\hbar^2 N^{2/3}} f' \quad \frac{P}{T} = \frac{2}{3} \frac{k_B Em}{\hbar^2 N^{2/3} L} f'. \quad (81)$$

où  $f'$  désigne la dérivée de  $f$ .

## 4 Premières mesures du contact

### 4-1 Distribution en impulsion d'un gaz de Fermi

Les expériences menées à Boulder par Debbie Jin et son équipe durant la période 2010-12 ont montré de manière très convaincante le fait que le contact permettait de relier entre elles les mesures de quantités variées,



**FIGURE 9.** Gauche : variation de  $k^4 n(k)$  en fonction de  $k$  pour  $(k_F a)^{-1} = -0.08$  (4). Le plateau aux grandes valeurs de  $k$  permet d'extraire la valeur du contact  $C$  pour cette valeur de  $a$ . La figure de droite montre l'importance d'avoir une bascule très rapide de la longueur de diffusion depuis la valeur d'intérêt jusqu'à la valeur nulle utilisée pour le temps de vol. Pour les mesures données sur la figure de gauche, cette bascule est effectuée avec un taux de  $1.4 \text{ G}/\mu\text{s}$ . Figures extraites de STEWART, GAEBLER et al. (2010).

faites sur des systèmes complexes comme le gaz de Fermi autour de la limite unitaire ou le gaz de Bose en interaction forte (STEWART, GAEBLER et al. 2010; SAGI, DRAKE et al. 2012; WILD, MAKOTYN et al. 2012). Nous allons nous concentrer ici sur les résultats obtenus sur le gaz de Fermi.

Les expériences décrites par STEWART, GAEBLER et al. (2010) ont été menées sur un gaz de potassium 40 (un fermion), préparé dans un mélange équilibré de ses deux états Zeeman de plus basse énergie,  $|\downarrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -9/2\rangle$  et  $|\uparrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -7/2\rangle$ . Le gaz contient  $N = 2 \cdot 10^5$  atomes au total, il est confiné dans un piège lumineux et refroidi par évaporation à une température  $T = 0.11 T_F$  avec  $k_B T_F = E_F$ . À la fin de l'évaporation, la force des interactions entre les deux états de spin est ajustée à la valeur désirée en modifiant lentement le champ magnétique extérieur grâce à une résonance de Fano-Feshbach.

Intéressons-nous ici à la mesure de la distribution en impulsion. Une fois que le régime stationnaire était atteint pour la longueur de diffusion souhaitée, STEWART, GAEBLER et al. (2010) ont basculé très rapidement le champ magnétique vers la valeur pour laquelle  $a = 0$ , puis mesuré l'étalement du nuage atomique dans un temps de vol. Comme l'énergie d'in-

teraction est nulle pendant le temps de vol, cet étalement donne accès à la distribution en impulsion initiale. Il est essentiel que la modification du champ magnétique soit très rapide, pour éviter une conversion significative de l'énergie d'interaction initiale en énergie cinétique supplémentaire. Les résultats de cette mesure d'impulsion sont montrés en figure 9. On constate que l'aile varie effectivement comme  $k^{-4}$ , et on obtient ainsi une première détermination du contact proche de résonance  $C \approx 2.2Nk_F$ .

Nous reviendrons au chapitre suivant sur d'autres caractérisations du contact faites par le groupe de Boulder, une fois que nous aurons décrit un autre outil d'étude, la spectroscopie radio-fréquence.

## 4-2 Lois d'échelle pour le contact

Dans le cas d'un gaz de Fermi à deux composantes, on peut donner quelques éléments sur la valeur du contact dans les régimes asymptotiques. Nous allons distinguer les trois cas rencontrés successivement quand on balaye une résonance de Fano–Feshbach. Nous nous limitons ici au cas de la température nulle (figure 10) de sorte que toutes les phases envisagées ci-dessous sont superfluides.

- Du côté  $a < 0$  et relativement loin de la résonance, on trouve le régime BCS avec  $k_F|a| \ll 1$ . L'énergie d'interaction dans l'état fondamental se calcule simplement dans une approche champ moyen<sup>4</sup>

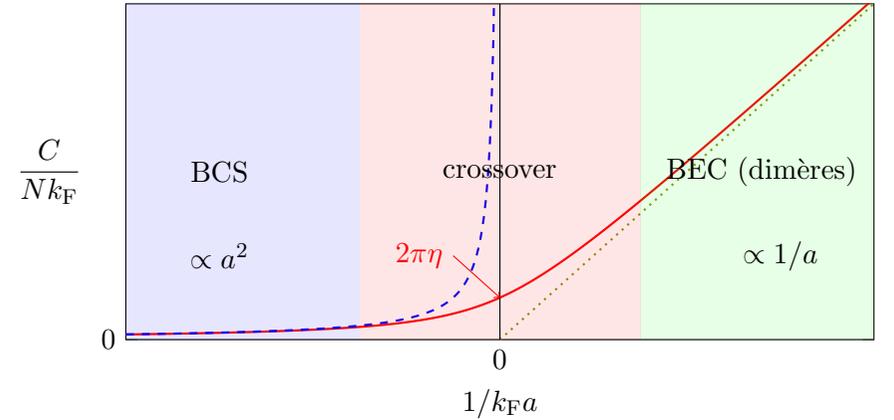
$$E_{\text{int}} \approx \frac{1}{L^3} \left( \frac{N}{2} \right)^2 \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (82)$$

ce qui conduit pour ce régime à :

$$a < 0 : \quad C \approx 4\pi^2 a^2 n N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C}{Nk_F} \approx \frac{4}{3} (k_F a)^2 \quad (83)$$

On retrouve un résultat similaire à celui de l'approche de Bogoliubov pour des bosons (31), à un facteur 4 près.

<sup>4</sup> Les corrections issues de la théorie BCS sont exponentiellement petites et sont donc négligées ici.



**FIGURE 10.** Variation "schématisée" du contact  $C$  avec la longueur de diffusion pour un gaz de Fermi à deux composantes. Le trait en pointillé montre la prédiction (86) pour une longueur de diffusion  $a$  petite et positive, le gaz consistant alors en une assemblée de dimères. Le trait en tirets bleus représente la prédiction (83) pour la limite BCS, pour une longueur de diffusion  $a$  négative et petite en valeur absolue. Le but de la courbe en trait continu rouge est simplement de donner une idée de la variation de  $C/Nk_F$  dans les différents régimes de valeurs de  $k_F a$ , mais elle ne fournit pas de valeur précise.

- À résonance, c'est-à-dire au seuil d'apparition de l'état lié à deux corps, la longueur de diffusion devient infinie. Il n'y a alors plus d'échelle de longueur associée aux interactions et on trouve la situation invariante d'échelle mentionnée plus haut ; par simple analyse dimensionnelle et dans le cas  $T = 0$ , on s'attend à ce que l'énergie en ce point s'écrive  $E = \frac{3}{5} N E_F \xi$  où  $\xi$  est un paramètre sans dimension (universel) qui doit être calculé numériquement ou mesuré expérimentalement. Au voisinage de ce point, on attend une première correction linéaire en  $1/a$  et l'énergie doit se mettre sous la forme (toujours par analyse dimensionnelle) :

$$E \approx N E_F \left( \frac{3}{5} \xi - \frac{\eta}{k_F a} \right) \quad (84)$$

où  $\eta$  est un autre paramètre universel sans dimension. Le contact vaut

alors

$$a = \pm\infty : \quad \frac{C}{Nk_F} = 2\pi\eta \quad (85)$$

Il n'y a pas d'expression analytique connue pour ce coefficient  $\eta$  et sa détermination théorique est un problème théorique ardu. En pratique, un calcul numérique (Monte Carlo quantique) donne  $2\pi\eta = 2.95$  (10) (DRUT, LÄHDE et al. 2011), en bon accord avec les résultats expérimentaux de LAURENT, PIERCE et al. (2017) que nous discuterons au chapitre suivant, et ceux encore plus récents de MUKHERJEE, PATEL et al. (2019) et CARCY, HOINKA et al. (2019).

- Dans le cas où l'état lié à deux corps est apparu<sup>5</sup>, la longueur de diffusion  $a$  est positive. Cet état lié concerne un atome  $\uparrow$  et un atome  $\downarrow$ , et il a pour énergie  $\approx -\hbar^2/(ma^2)$ . Comme le nombre d'atomes est supposé ici être le même pour les deux états de spin, le gaz contient  $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$  dimères et l'énergie de son état fondamental vaut  $E = -N\hbar^2/(2ma^2)$ , ce qui conduit à :

$$a > 0 : \quad C \approx \frac{4\pi}{a} N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C}{Nk_F} \approx \frac{4\pi}{k_F a} \quad (86)$$

La contribution de l'interaction dimère-dimère, caractérisée par la longueur de diffusion  $a_{dd} \approx 0.6 a$  (PETROV, SALOMON et al. 2004), s'écrit dans l'approximation du champ moyen

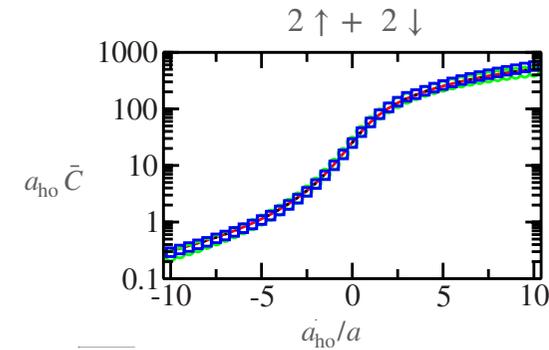
$$E_{dd} = \frac{\pi\hbar^2 a_{dd}}{4m} nN \quad (87)$$

et sa contribution au contact est d'ordre supérieur à ce qui est donné en (86).

### 4-3 Études numériques

Pour tester les prédictions que nous avons décrites, BLUME & DAILY (2009) et YIN & BLUME (2015) ont calculé numériquement l'énergie et les distributions en position et en impulsion d'un petit nombre de particules

5. Nous admettons ici qu'il n'y a pas formation d'agrégats plus gros que ces dimères, voir par exemple PETROV (2003) et CASTIN, MORA et al. (2010) et ENDO & CASTIN (2015).

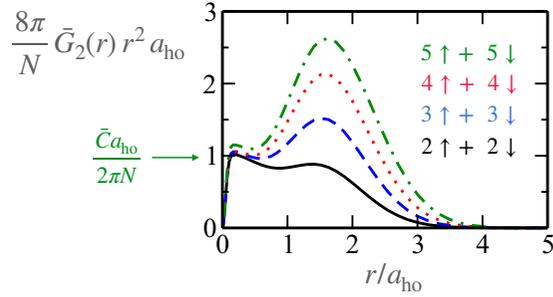


**FIGURE 11.** Variation du contact avec  $1/a$  calculée par BLUME & DAILY (2009). La ligne continue rouge représente la valeur déduite de la dérivée de l'énergie totale par rapport à  $1/a$  [eq. (47)]. Les valeurs indiquées par des cercles verts [resp. carrés bleus] sont obtenues à partir de la distribution de paires  $G_2(r)$  [resp. la distribution en impulsion  $n(k)$ ]. La variation de  $C$  avec  $1/a$  est conforme à ce que nous avons montré en figure 10.

confinées dans un piège harmonique isotrope. L'article initial de BLUME & DAILY (2009) portait sur  $N = 4$  particules, 2 en  $\uparrow$  et 2 en  $\downarrow$ . YIN & BLUME (2015) ont ensuite pu mener les calculs jusqu'à  $N = 10$ .

Le potentiel de confinement harmonique de pulsation  $\omega$  fournit l'échelle de longueur naturelle pour le problème,  $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ . Pour ces calculs, le potentiel d'interaction entre deux atomes est choisi gaussien de portée  $b$  :  $V(r) = -V_0 e^{-r^2/2r_0^2}$  avec  $V_0 > 0$ , i.e. une portée  $b \sim 2r_0$ . Pour une valeur donnée de  $r_0$ , la profondeur  $V_0$  est ajustée pour être proche d'une résonance à énergie nulle ; rappelons qu'il s'agit du point où un état lié est sur le point d'apparaître ou vient d'apparaître, la longueur de diffusion  $a$  divergeant en ce point. Le paramètre  $r_0$  est choisi petit devant  $a_{ho}$ , avec typiquement  $r_0/a_{ho} = 10^{-2}$  à  $10^{-1}$ . La limite du pseudo-potential est obtenue en prenant la limite  $r_0 \rightarrow 0$ , pour une longueur de diffusion  $a$  constante.

BLUME & DAILY (2009) ont vérifié numériquement que les différentes manières de calculer le contact, à partir de (i) l'énergie totale, (ii) la fonction de corrélation spatiale à deux corps et (iii) de la distribution en impulsion conduisaient à des valeurs très proches de  $C$ . Les différents résultats



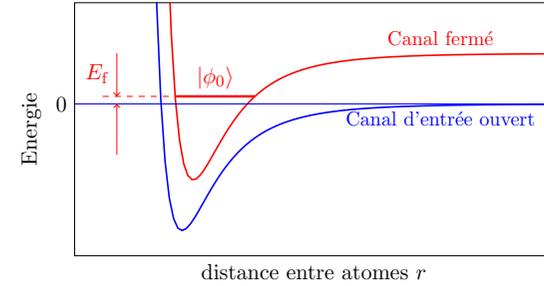
**FIGURE 12.** Fonction  $r^2 G_2(r)/N$  donnant la corrélation spatiale de paires  $\uparrow\downarrow$  à la limite unitaire  $a = \infty$  pour différents nombres de particules. Figure extraite de YIN & BLUME (2015).

sont reportés en figure 11. BLUME & DAILY (2009) ont par ailleurs testé le théorème du viriel généralisé démontré par WERNER (2008), qui donne également accès à la valeur du contact.

YIN & BLUME (2015) ont élargi ce calcul à un nombre de particules pouvant aller jusqu'à  $N = 10$ . Cela permet d'avoir une première intuition de ce que serait la limite thermodynamique pour ce système. Nous avons reporté sur la figure 12 les résultats obtenus pour la fonction  $r^2 G_2(r)/N$  pour  $N = 4, 6, 8$  et  $10$  dans le régime unitaire  $a = \infty$ . On constate que les courbes obtenues pour différentes valeurs de  $N$  se regroupent entre elles dans le domaine de distance  $b \lesssim r \ll a_{\text{ho}}$  (avec ici  $r_0 = 0.06 a_{\text{ho}}$ ), comme attendu.

#### 4-4 Résonance de Fano–Feshbach et fraction moléculaire

Comme expliqué en détail dans le cours de l'an passé, les résonances de Fano–Feshbach sont un outil extrêmement puissant pour modifier la longueur de diffusion décrivant la collision en onde  $s$  de deux atomes. Nous partons d'un gaz d'atomes d'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{at}}$  conduisant à la longueur de diffusion  $a_{\text{bg}}$ . Nous supposons qu'en plus des interactions standard décrites par  $a_{\text{bg}}$ , une paire d'atomes entrant en collision (canal "ouvert") peut former de manière temporaire un état  $|\phi_0\rangle$  d'un canal fermé, correspondant à une molécule di-atomique, avant de se séparer (figure 13). L'énergie de  $|\phi_0\rangle$  peut être ajustée par rapport à la référence d'énergie  $E = 0$  du canal



**FIGURE 13.** Principe d'une résonance de Fano–Feshbach.

ouvert en variant par exemple le champ magnétique  $B$  ambiant.

On suppose connue la loi donnant la longueur de diffusion  $a(B)$ , loi généralement mise sous la forme :

$$a(B) = a_{\text{bg}} \left( 1 - \frac{B_1}{B - B_0} \right), \quad (88)$$

qui traduit un comportement résonnant autour de  $B = B_0$ . Quand  $|B - B_0| \gg B_1$ , le couplage entre les deux canaux n'a plus d'effet significatif et la longueur de diffusion reprend sa valeur de fond  $a_{\text{bg}}$ . La loi (88) est donnée par la résolution du problème à deux corps (cf. cours 2021) et on cherche à relier cette loi à la valeur du contact  $C$  (WERNER, TARRUELL et al. 2009).

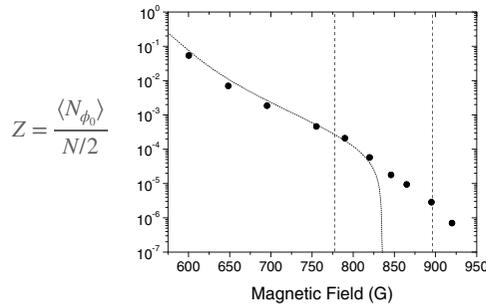
Pour un gaz d'atomes de spin  $1/2$ , l'hamiltonien décrivant le gaz peut se mettre sous la forme

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{at}} + \sum_{\mathbf{K}} \left( \frac{\hbar^2 K^2}{4m} + E_{\text{dim}}(B) \right) b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} + \hat{V}_{\text{at}, \text{dim}} \quad (89)$$

où  $b_{\mathbf{K}}^\dagger$  crée une molécule  $|\phi_0\rangle$  d'impulsion  $\hbar \mathbf{K}$  et de masse  $2m$ .

Plaçons-nous à température nulle pour simplifier et notons  $E$  l'énergie de l'état fondamental du gaz. Considérons la dérivée  $\frac{\partial E}{\partial B}$  prise à volume et nombre de particules constants. Le théorème de Hellmann–Feynman donne

$$\frac{\partial E}{\partial B} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial B} \right\rangle = \mu \langle N_{\phi_0} \rangle \quad (90)$$



**FIGURE 14.** Variation de la fraction  $Z$  de molécules du canal fermé  $|\phi_0\rangle$  dans un gaz de  ${}^6\text{Li}$  autour de la résonance de Fano–Feshbach située à  $B_0 = 834\text{ G}$ . Le régime de condensat de dimères faiblement liés correspond à la région  $B < B_0$ . Figure extraite de PARTRIDGE, STRECKER et al. (2005)

où  $\mu = \frac{dE_{\text{dim}}}{dB}$  représente le moment magnétique<sup>6</sup> de  $|\phi_0\rangle$  et où  $N_{\phi_0} = \sum_{\mathbf{K}} b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}}$  est l'opérateur donnant le nombre de molécules  $|\phi_0\rangle$  présentes. Par ailleurs, cette dérivée peut être reliée au contact puisque

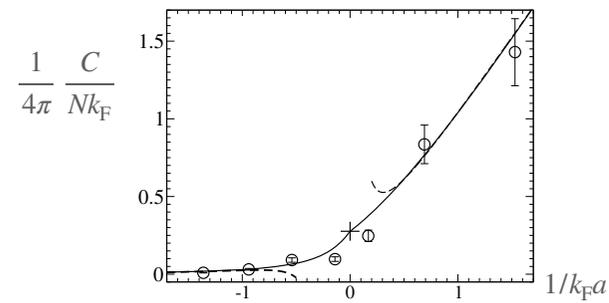
$$\frac{\partial E}{\partial B} = \frac{\partial E}{\partial a} \frac{da}{dB} = \frac{\hbar^2 C}{4\pi m a^2} \frac{da}{dB} \quad (91)$$

la quantité  $\frac{da}{dB}$  se déduisant directement de (88). On obtient ainsi la relation recherchée entre population de l'état dimère et contact :

$$\langle N_{\phi_0} \rangle = \frac{\hbar^2}{4\pi m a^2 \mu} \frac{da}{dB} C \quad (92)$$

Ce résultat, dû à WERNER, TARRUELL et al. (2009), se généralise au cas de la température non nulle, la dérivée de l'énergie du gaz étant dans ce cas prise à entropie constante. Il a été testé par WERNER, TARRUELL et al. (2009) sur les résultats expérimentaux obtenus par PARTRIDGE, STRECKER et al. (2005) (groupe de Rice University) bien avant que la théorie ne soit développée.

6. On a supposé ici implicitement que le moment magnétique des atomes libres était nul. Si ce n'est pas le cas, il suffit de remplacer dans ce qui suit  $\mu$  par  $\delta\mu$ , c'est-à-dire la différence entre le moment magnétique de  $|\phi_0\rangle$  et celui de la paire d'atomes du canal ouvert.



**FIGURE 15.** Points : données de PARTRIDGE, STRECKER et al. (2005) réexprimées en fonction du contact par l'intermédiaire de (92). Courbe continue : prédiction pour le contact d'un gaz de Fermi de spin 1/2. Figure extraite de WERNER, TARRUELL et al. (2009).

L'expérience de Rice avait été menée sur un gaz de  ${}^6\text{Li}$ , préparé initialement dans le régime de dimères faiblement liés d'énergie  $\sim -\hbar^2/ma^2$ , en se plaçant sur le côté  $a > 0$  de la résonance de Fano–Feshbach située à  $B = 834\text{ G}$ . Rappelons que pour une résonance de Fano–Feshbach large, un dimère d'énergie  $-\hbar^2/ma^2$  n'a qu'un faible recouvrement avec l'état moléculaire  $|\phi_0\rangle$  du canal fermé : la principale contribution à ce dimère vient du canal ouvert.

On balaye ensuite lentement le champ magnétique pour amener le gaz dans le régime que l'on souhaite étudier. On mesure la fraction d'atomes dans le canal "fermé" de la résonance de Feshbach, l'état moléculaire  $|\phi_0\rangle$ , grâce à un laser qui porte cette molécule dans un état excité. Il en résulte un processus d'émission spontanée de photons et une perte de particules que l'on détecte.

Les résultats de cette mesure de la fraction  $Z = 2\langle N_{\phi_0} \rangle/N$  d'atomes dans l'état moléculaire  $|\phi_0\rangle$  sont montrés en figure 14. On constate que cette fraction est toujours petite devant 1, comme attendu pour une résonance de Fano–Feshbach large. WERNER, TARRUELL et al. (2009) ont utilisé ces données pour en déduire la valeur du contact grâce à (92). Le résultat est montré en figure 15 : l'accord entre les données de PARTRIDGE, STRECKER et al. (2005) et la modélisation théorique est remarquable.

# Chapitre VI

## Les différentes facettes du contact à deux corps

Nous continuons dans ce dernier chapitre notre étude du *contact* commencée au chapitre 5. Rappelons que le contact  $C$  est une quantité qui permet, pour un système dilué, de relier les aspects de la physique à deux corps, comme la fonction de distribution de paires  $G_2(r)$ , à la thermodynamique à l'équilibre du gaz, son énergie interne  $E$  par exemple (voir figure 1). Pour un gaz de fermions de spin 1/2, ce lien entre propriétés microscopique et macroscopiques est *a priori* possible quelle que soit la force des interactions – caractérisée par la longueur de diffusion  $a$ – et la dégénérescence du gaz – caractérisée par la densité dans l'espace des phases  $n\lambda^3$ . Pour un gaz de bosons, des restrictions sont à apporter sur la densité et la longueur de diffusion pour éviter que des processus à plus de deux corps ne viennent jouer un rôle significatif.

Notre but dans ce chapitre est de présenter une série de mesures du contact mettant en jeu des techniques spectroscopiques ou l'étude des pertes induites par les collisions entre atomes. Pour mettre en place le formalisme permettant de décrire ces mesures, il est utile de reformuler les résultats du chapitre précédent en terme du pseudo-potentiel  $\hat{V}_{pp}$ , c'est-à-dire un potentiel de portée  $b = 0$ . Cette reformulation n'est pas anodine : elle s'accompagne d'une divergence de certaines quantités caractérisant le système, son énergie cinétique par exemple. Nous montrerons que cette divergence est compensée par la divergence de l'autre composante de l'énergie du fluide, l'énergie d'interaction, la somme des deux énergies, c'est-à-dire la fonction thermodynamique *énergie interne*  $E$  étant quant à elle convergente, comme il se doit.

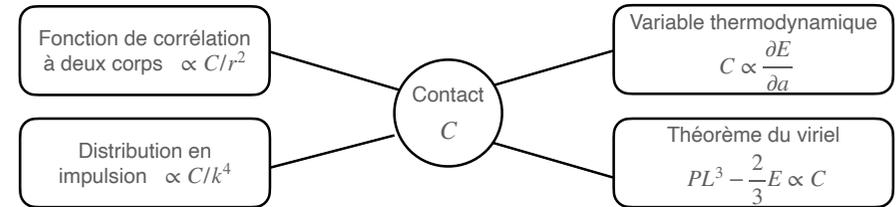


FIGURE 1. Les différents liens établis par le contact à deux corps introduit au chapitre 5.

Une fois mis en place le formalisme pour décrire un potentiel de portée nulle, nous passerons à la modélisation d'une expérience de spectroscopie radio-fréquence et nous montrerons comment les corrélations à courte portée étudiées au chapitre précédent se traduisent sur la forme de la raie de résonance, en particulier son aile. Nous décrirons les observations expérimentales de cette aile, ainsi que d'autres manifestations du contact pour un gaz de fermions, comme les pertes d'atomes induites par la présence d'impuretés au sein du gaz.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée au gaz de Bose. Nous y expliquerons brièvement pourquoi les processus à trois corps de type Efimov rendent la situation plus complexe que pour les fermions. Nous décrirons des expériences mettant en évidence le contact à deux corps dans différents régimes de densité, en nous limitant à des situations où les effets

à trois corps ne jouent pas de rôle significatif.

## 1 Contact et pseudo-potentiel

### 1-1 Rappels sur la définition du contact

Au chapitre précédent, partant d'une fonction d'onde  $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  pour  $N$  particules, nous avons défini le contact  $C$  à partir de la fonction de corrélation à deux corps. Nous nous sommes intéressés en particulier au cas d'une résonance de diffusion, quand la longueur de diffusion  $a$  devient beaucoup plus grande que la portée du potentiel  $b$ .

Rappelons la démarche suivie dans le cas d'un gaz de fermions de spin  $1/2$ . Supposons ce gaz équilibré, c'est-à-dire  $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$  et affectons les indices impairs (resp. pairs) aux particules de spin  $\uparrow$  (resp.  $\downarrow$ ). La fonction  $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  est donc antisymétrique par tout échange d'indices impairs, et également antisymétrique par tout échange d'indices pairs.

Nous avons introduit la fonction de corrélation à deux corps

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) &= \langle \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{0}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{N^2}{4} \int d^3 r_3 \dots d^3 r_N \Phi^*(\mathbf{r}', \mathbf{0}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \\ &\quad \times \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{0}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N), \end{aligned} \quad (1)$$

puis, en utilisant la fonction d'onde d'énergie nulle  $\psi_0(\mathbf{r})$  décrivant l'état de la variable relative dans une collision entre deux particules, nous avons expliqué que la fonction de corrélation à deux corps pouvait se mettre sous la forme

$$r, r' \ll d, a : \quad \mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 a^2} \psi_0(r') \psi_0(r) \quad (2)$$

où  $d = n^{-1/3}$  est la distance moyenne entre particules et où le contact  $C$  décrit l'effet des  $N - 2$  corps restants. Nous avons écrit une relation similaire pour une assemblée de bosons sans spin ou polarisés.

Nous nous sommes également intéressés à la distribution en impulsion

$n(k)$  associée et nous avons montré pour des fermions de spin  $1/2$  que :

$$\text{Fermions : } \quad \frac{1}{a} \ll k \ll \frac{1}{b} : \quad n_\uparrow(k) = n_\downarrow(k) \approx \frac{C}{k^4}. \quad (3)$$

Une question naturelle à ce stade concerne l'extension de ces résultats au cas d'un potentiel de portée  $b = 0$ , c'est-à-dire le pseudo-potentiel  $\hat{V}_{pp}$ . L'utilisation du pseudo-potentiel permet de simplifier notablement les calculs et de dégager d'autres lois d'échelle remarquables, comme nous le verrons à propos de la spectroscopie radio-fréquence.

Rappelons qu'en réalité, les potentiels inter-atomiques ont une portée  $b$  non nulle, de l'ordre de la longueur de van der Waals  $R_{vdW}$ . Si l'utilisation du pseudo-potentiel conduit à une expression divergente pour une certaine quantité physique, il est important de garder en mémoire cette limitation naturelle aux courtes distances ( $R_{vdW} \lesssim r$ ) ou, de manière équivalente, aux grandes impulsions ( $k \lesssim R_{vdW}^{-1}$ ).

### 1-2 La limite d'une portée $b$ nulle

Dans le cas limite d'un potentiel de portée nulle, la queue de la distribution en impulsion  $n(k) = C/k^4$  donnée en (3) s'étend jusqu'à l'infini. On en déduit immédiatement que l'énergie cinétique

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} [n_\uparrow(k) + n_\downarrow(k)] d^3 k \quad (4)$$

diverge puisque l'intégrande tend vers une constante à l'infini :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{2C}{k^4} 4\pi k^2 = \frac{\hbar^2 C}{2\pi^2 m}. \quad (5)$$

Le remède habituel à ce type de divergence "ultra-violette" est de placer une coupure dans l'espace des impulsions. Si on note  $k_{\text{max}}$  la borne supérieure de l'intégrale sur  $k$ , l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\boxed{\text{Fermions : } \quad E_{\text{cin}} = \frac{\hbar^2 C k_{\text{max}}}{2\pi^2 m} + \dots} \quad (6)$$

où "... " représente une contribution finie et régulière. On remarquera que la présence de termes en  $k^{-5}$  pourrait invalider cette affirmation, en conduisant à une divergence en  $\log(k_{\max})$ . Heureusement, on peut montrer que la présence de tels termes est exclue dans le cas du gaz de Fermi considéré ici (TAN 2008c).

Pour rendre plus quantitative cette limite de portée nulle, nous allons maintenant aborder le problème en modélisant l'interaction entre atomes par le pseudo-potential.

### 1-3 L'approche pseudo-potential

Dans le cas d'une interaction binaire décrite par le pseudo-potential

$$\hat{V}_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \delta(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial}{\partial r} [r\psi(\mathbf{r})] \right|_{r=0} \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (7)$$

on peut déterminer de manière exacte les états de diffusion  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  et l'éventuel état lié  $\psi_{\text{lie}}(r)$  (cf. cours 2020-21). Un état de diffusion d'énergie  $E = \hbar^2 k^2 / 2m_r$  ( $m_r = m/2$  est la masse réduite) s'écrit

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{a}{1 + ika} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (8)$$

avec notamment pour l'énergie nulle, la fonction d'onde normalisée :

$$\psi_0(r) = \frac{a}{L^3} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (9)$$

L'état lié existe si et seulement si  $a > 0$  et s'écrit :

$$\psi_{\text{lie}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{e^{-r/a}}{r} \quad (10)$$

d'énergie  $E = -\hbar^2 / ma^2$ .

Rappelons également l'action du pseudo-potential sur une fonction présentant une divergence en  $1/r$  :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r} + \psi_{\text{reg}}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad V_{\text{pp}}[\psi(\mathbf{r})] = g \psi_{\text{reg}}(0) \delta(\mathbf{r}) \quad (11)$$

Chaque état propre (8,9,10) a le même comportement au voisinage de l'origine :

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r) \quad (12)$$

et ce comportement, qui lie les coefficients du terme en  $r^{-1}$  et du terme en  $r^0$ , est donc partagé par toutes les fonctions physiquement acceptables en présence du pseudo-potential; il constitue le domaine de l'hamiltonien faisant intervenir ce pseudo-potential.

Ce comportement se généralise à un système à  $N$  corps, si les interactions binaires sont décrites par le pseudo-potential. La fonction d'onde fermionique  $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N)$  introduite plus haut vérifie dans ce cas :

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \propto \left( \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{a} \right) \tilde{\Phi}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (13)$$

quand la distance  $r_{12}$  tend vers 0. On a posé ici  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  et supposé que  $\mathbf{R}$  était différent de tous les  $\mathbf{r}_j$ ,  $j = 3, \dots, N$ . La fonction de corrélation à deux corps vaut aux courtes distances<sup>1</sup> :

$$\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0}) \approx \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r') \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \mathcal{O}(r) \right). \quad (14)$$

Considérons maintenant l'énergie d'interaction. Nous prenons là encore le cas de  $N$  fermions de spin 1/2. Cette énergie d'interaction s'évalue à partir de

$$E_{\text{int}} = \frac{N^2}{4} \int \Phi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \left\{ \hat{V}_{\text{pp}}(r_{12}) [\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)] \right\} d^3 r_1 \dots d^3 r_N \quad (15)$$

En utilisant (14), on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \frac{C}{(4\pi)^2} \int \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \left[ \hat{V}_{\text{pp}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \right] d^3 r \\ &= -\frac{\hbar^2 C}{4\pi m} \int \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \delta(r) d^3 r, \end{aligned} \quad (16)$$

1. Le comportement indiqué en (14) est une conséquence directe de l'argument présenté au chapitre précédent, selon lequel  $\mathcal{G}_{2,\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}', \mathbf{0}; \mathbf{r}, \mathbf{0})$  peut être vu comme l'élément de matrice en point de vue position d'un opérateur hermitien. Cet opérateur peut être mis sous la forme diagonale  $\sum \gamma_j \phi_j^*(\mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r})$  et chaque fonction  $\phi_j$  vérifie (12) puisqu'elle appartient au domaine de l'hamiltonien.

avec une contribution manifestement divergente puisqu'on doit faire agir la distribution de Dirac sur la fonction  $1/r$ .

Comme pour le calcul de l'énergie cinétique, mettons une coupure en  $k$  à une valeur  $k_{\max}$ , ce qui revient à lisser la divergence de  $1/r$  en  $r = 0$  sur un domaine d'extension  $k_{\max}^{-1}$ . On peut alors calculer l'intégrale (16) en utilisant

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} d^3k \quad (17)$$

de sorte que

$$\frac{1}{r} \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} \delta(\mathbf{r}) d^3k = \frac{2k_{\max}}{\pi} \delta(\mathbf{r}) \quad (18)$$

d'où

$$\boxed{\text{Fermions : } E_{\text{int}} = \frac{\hbar^2 C}{4\pi m} \left( -\frac{2k_{\max}}{\pi} + \frac{1}{a} \right)} \quad (19)$$

Les deux contributions linéairement divergentes en  $k_{\max}$  de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction sont donc égales en valeur absolue et de signes opposés. Elles se compensent exactement quand on calcule l'énergie totale, c'est-à-dire la fonction thermodynamique considérée au chapitre précédent : cette fonction est donc finie, même pour un potentiel de portée  $b = 0$ . Une forme commode pour cette énergie totale est

$$\boxed{\text{Fermions : } E = \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[ n_{\sigma}(k) - \frac{C}{k^4} \right] d^3k + \frac{\hbar^2 C}{4\pi m a}} \quad (20)$$

où les termes divergents de l'énergie cinétique et de l'énergie d'interaction ont été isolés et se sont compensés.

Pour les bosons, si on oublie les effets à trois corps, on trouve de même

$$\boxed{\text{Bosons sans Efimov : } E = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left[ n(k) - \frac{C}{k^4} \right] d^3k + \frac{\hbar^2 C}{8\pi m a}} \quad (21)$$

Les états d'Efimov qui apparaissent au voisinage d'une résonance de diffusion viennent compliquer la situation en introduisant une autre composante dans la distribution en impulsion, variant comme  $k^{-5}$  (CASTIN &

WERNER 2011). La divergence induite pour l'énergie cinétique n'est que logarithmique et elle est compensée par un terme supplémentaire provenant des effets à trois corps dans l'énergie d'interaction (BRAATEN, KANG et al. 2011).

#### 1-4 Le cas d'un potentiel en "vrai" Dirac

Une méthode communément utilisée (*cf.* chapitre 3) pour décrire un potentiel de portée négligeable consiste à utiliser une véritable distribution de Dirac  $\bar{g} \delta(\mathbf{r})$ , associée à la coupure  $k_{\max}$  dans l'espace des moments, et à choisir

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\bar{g}} + \frac{mk_{\max}}{2\pi^2 \hbar^2}, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{\bar{a}} + \frac{2k_{\max}}{\pi}, \quad (22)$$

où  $g = 4\pi \hbar^2 a/m$  est la constante de couplage "physique" et  $\bar{g} = 4\pi \hbar^2 \bar{a}/m$  la constante de couplage "nue".

La contrainte (22) s'obtient en imposant à la fonction propre  $\psi_0(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}$  d'énergie nulle pour  $\hat{p}^2/2m_r + \hat{V}_{\text{pp}}$  d'être également fonction propre d'énergie nulle pour  $\hat{p}^2/2m_r + \bar{g} \delta(\mathbf{r})$  :

$$-\frac{\hbar^2}{m} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) + \bar{g} \delta(\mathbf{r}) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = 0 \quad (23)$$

soit

$$\delta(\mathbf{r}) \left[ \frac{4\pi \hbar^2}{m} + \bar{g} \left( \frac{2}{k_{\max}} - \frac{1}{a} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

où l'on a utilisé  $\nabla^2(1/r) = -4\pi \delta(\mathbf{r})$  et  $\frac{1}{r}|_0 = 2k_{\max}/\pi$  [*cf.* (18)].

Dans un calcul, les résultats intermédiaires peuvent faire intervenir la constante de couplage "nue"  $\bar{g}$  et/ou la coupure  $k_{\max}$ , mais les quantités physiques doivent être calculées en prenant la limite  $k_{\max} \rightarrow \infty$  et elles doivent s'exprimer à l'aide de  $g$  uniquement. Quand ce n'est pas possible, cela signifie que l'on est en présence d'un problème dont la réponse dépend explicitement de la portée  $b$  du potentiel.

On constate que l'énergie d'interaction (19) s'écrit dans ces conditions

$$\text{Fermions : } E_{\text{int}} = \frac{\hbar^4 C}{m^2 \bar{g}} \quad (25)$$

et une expression similaire pour des bosons hors effet Efimov :

$$\text{Bosons sans Efimov : } E_{\text{int}} = \frac{\hbar^4 C}{2m^2 \bar{g}} \quad (26)$$

Ce n'est donc pas une quantité physique, tout comme l'énergie cinétique (6) qui fait explicitement intervenir  $k_{\text{max}}$ . En revanche, l'énergie totale ne fait intervenir que la constante de couplage physique  $g$ .

Vérifions maintenant que l'on peut retrouver directement le résultat (25-26) pour un potentiel en "vrai" Dirac. Considérons des bosons sans spin pour simplifier les notations. L'hamiltonien s'écrit dans ces conditions

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cin}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (27)$$

avec

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\bar{g}}{2} \hat{K} \quad \text{et} \quad \hat{K} = \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3r \quad (28)$$

d'où l'énergie d'interaction

$$E_{\text{int}} = \langle \hat{H}_{\text{int}} \rangle = \frac{\bar{g}}{2} \langle \hat{K} \rangle. \quad (29)$$

La quantité  $\langle \hat{K} \rangle$  fait intervenir la valeur de la fonction  $\mathcal{G}_2(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  quand les quatre points sont identiques, soit pour un système uniforme :

$$\langle \hat{K} \rangle = L^3 \mathcal{G}_2(0, 0; 0, 0). \quad (30)$$

Reprenons l'expression (14) de  $\mathcal{G}_2$  aux courtes distances. On voit apparaître de nouveau la "valeur en 0" de la fonction  $1/r$ , que nous avons donnée en (18). Reportons cette valeur dans l'expression (2) de  $\mathcal{G}_2$  :

$$\mathcal{G}_2(0, 0) = \frac{C}{(4\pi)^2 L^3} \left( \frac{2k_{\text{max}}}{\pi} - \frac{1}{a} \right)^2 = \frac{\hbar^4 C}{L^3 m^2} \frac{1}{\bar{g}^2}. \quad (31)$$

La fonction de corrélation  $\mathcal{G}_2$  prise en  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$  n'est donc pas une quantité physique pour un gaz en interaction, puisqu'elle fait intervenir le couplage nu  $\bar{g}$  et non le couplage physique  $g$ . Elle diverge quand on prend la limite  $k_{\text{max}} \rightarrow \infty$ . La situation pour un gaz en interaction est donc radicalement différente du cas du gaz parfait (NARASCHEWSKI & GLAUBER 1999).

Revenons maintenant à l'énergie d'interaction (29)

$$E_{\text{int}} = \frac{\bar{g}}{2} \langle \hat{K} \rangle = \frac{\bar{g}}{2} L^3 \frac{\hbar^4 C}{L^3 m^2} \frac{1}{\bar{g}^2}. \quad (32)$$

Ce résultat coïncide bien avec celui annoncé en (26).

Pour résumer, l'utilisation du couple  $(\bar{g}, k_{\text{max}})$ , suivi de la limite  $k_{\text{max}} \rightarrow \infty$  sous la condition (22) reliant  $\bar{g}, k_{\text{max}}$  au couplage réel  $g$  permet donc de mener les calculs de manière relativement simple et transparente. C'est la méthode que nous allons utiliser dans la partie suivante consacrée à la spectroscopie radio-fréquence.

## 2 Contact et spectroscopie radio-fréquence

### 2-1 Position du problème

La spectroscopie radio-fréquence est un moyen puissant pour analyser les propriétés d'un gaz quantique. Alors que pour un atome isolé, le spectre d'absorption n'est composé que de raies discrètes, le spectre d'un gaz en interaction est généralement un continuum dont la forme de raie, le centre de gravité et les ailes renseignent sur la nature des états à  $N$  particules pouvant exister au sein du fluide.

Nous allons nous intéresser ici au cas d'un gaz de fermions de spin 1/2. L'idée est d'éclairer le gaz avec une onde électromagnétique de pulsation  $\omega$  qui peut induire une transition depuis un des deux états internes atomiques,  $\uparrow$  par exemple, vers un troisième état que nous noterons  $e$  (figure 2). Le fait de choisir une onde "radio-fréquence", donc de grande longueur d'onde, entraîne que le passage de  $\uparrow$  vers  $e$  ne s'accompagne d'aucun transfert d'impulsion, contrairement à ce qui se passerait si on utilisait un faisceau lumineux (spectroscopie de Bragg). Les classes d'impulsion dont nous allons parler dans la suite sont celles qui sont naturellement peuplées dans l'état stationnaire du gaz, en particulier lors de l'interaction entre deux atomes proches.

Nous allons étudier ici la variation avec  $\omega$  du taux de transfert  $\Gamma(\omega)$ , et nous allons regarder deux grandeurs :

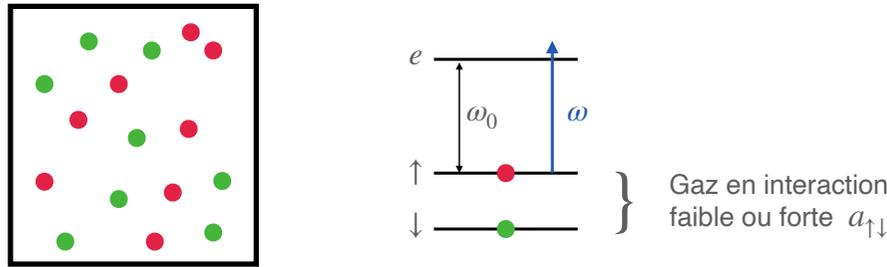


FIGURE 2. Principe de la spectroscopie radio-fréquence pour un gaz de Fermi à deux composantes. Une onde radio-fréquence couple un des deux états de spin, ici  $\uparrow$ , à un troisième état interne noté  $e$ .

- La position moyenne de la résonance fait intervenir le contact et s'écrit dans la limite des grandes longueurs de diffusion  $|a_{\uparrow\downarrow}|, |a_{e\downarrow}| \gg b$  :

$$\langle \omega \rangle \equiv \frac{\int \omega \Gamma(\omega) d\omega}{\int \Gamma(\omega) d\omega} \approx \omega_0 + \left( \frac{1}{a_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{a_{e\downarrow}} \right) \frac{\hbar C}{4\pi m N_{\uparrow}} \quad (33)$$

où  $\omega_0$  désigne la fréquence de transition  $\uparrow e$  d'un atome isolé (on supposera ici  $\omega_0 > 0$  pour fixer les idées).

- Quand les atomes dans l'état  $e$  n'interagissent pas avec les atomes  $\downarrow$  ( $a_{e\downarrow}=0$ ), le déplacement moyen (33) diverge. On peut montrer que cela est dû à l'apparition d'une aile à grand désaccord de  $\Gamma(\omega)$ , qui fait elle aussi intervenir le contact :

$$\frac{\Gamma(\omega)}{\int \Gamma(\omega) d\omega} \approx \frac{1}{4\pi^2 N_{\uparrow}} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \frac{C}{(\omega - \omega_0)^{3/2}} \quad (34)$$

Nous verrons que cette aile est étroitement liée à la décroissance en  $1/k^4$  de la distribution en impulsion.

Ces résultats ont été obtenus à la suite d'une succession de travaux décrits dans YU & BAYM (2006), BAYM, PETHICK et al. (2007), PUNK & ZWARGER (2007), HAUSSMANN, PUNK et al. (2009) et PIERI, PERALI et al. (2009) et BRAATEN, KANG et al. (2010).

## 2-2 Le centre de gravité du spectre

Le calcul du taux  $\Gamma(\omega)$  se fait en utilisant la règle d'or de Fermi, ou d'une manière équivalente, la théorie de la réponse linéaire. La perturbation créée par l'onde radio fréquence se décrit par l'opérateur

$$\hat{H}_{\text{rf}}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{-i\omega t} \hat{Y} + \text{H.c.} \quad \text{avec} \quad \hat{Y} = \int \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) d^3r, \quad (35)$$

où  $\Omega$  est la fréquence de Rabi de la radio-fréquence, proportionnelle à son champ électromagnétique oscillant. Nous avons fait ici l'approximation RWA ("champ tournant") en ne gardant que la partie quasi-résonnante (en  $e^{-i\omega t}$  avec  $\omega > 0$ ) pour le passage de  $\uparrow$  vers  $e$ .

Le taux de transfert s'écrit alors [voir par exemple COHEN-TANNOUDJI, DIU et al. (1973), XIII-C-3]

$$\Gamma(\omega) = \frac{\pi}{2} \Omega^2 \sum_{\Phi_f} |\langle \Phi_f | \hat{Y} | \Phi_i \rangle|^2 \delta[\omega - (E_f - E_i)/\hbar]. \quad (36)$$

Dans cette expression, l'état  $|\Phi_i\rangle$ , d'énergie  $E_i$ , représente l'état initial avec  $N_{\uparrow}$  et  $N_{\downarrow}$  particules dans les deux états de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$ , et aucune particule dans l'état  $e$ . La somme porte sur tous les états  $|\Phi_f\rangle$  (d'énergie  $E_f$ ) possibles. Ces états ont  $N_{\uparrow} - 1$  particules dans l'état  $\uparrow$ , 1 particule dans l'état  $e$ , et toujours  $N_{\downarrow}$  particules dans l'état  $\downarrow$ .

Pour montrer (33), intéressons-nous d'abord au dénominateur  $\int \Gamma(\omega) d\omega$ . L'intégrale sur  $\omega$  de la distribution de Dirac donne 1; en utilisant la relation de fermeture  $\hat{1} = \sum_{\Phi_f} |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f|$ , nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \int \Gamma(\omega) d\omega &= \frac{\pi}{2} \Omega^2 \langle \Phi_i | \hat{Y}^\dagger \hat{Y} | \Phi_i \rangle \\ &= \frac{\pi}{2} \Omega^2 \int \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_{\uparrow}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}') | \Phi_i \rangle d^3r d^3r'. \end{aligned} \quad (37)$$

Pour des fermions, on a la relation d'anti-commutation  $[\hat{\Psi}_e(\mathbf{r}), \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}')]_+ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Comme l'état  $|\Phi_i\rangle$  ne contient pas de particule dans l'état  $e$ , on en déduit :

$$\int \Gamma(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \Omega^2 \int \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_{\uparrow}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle d^3r = \frac{\pi}{2} \Omega^2 N_{\uparrow}. \quad (38)$$

Le calcul du numérateur de (33),  $\int \omega \Gamma(\omega) d\omega$ , est légèrement plus compliqué. On utilise la présence de  $\delta[\omega - (E_f - E_i)/\hbar]$  pour établir

$$\hbar\omega \langle \Phi_i | \hat{Y}^\dagger | \Phi_f \rangle = (E_f - E_i) \langle \Phi_i | \hat{Y}^\dagger | \Phi_f \rangle = \langle \Phi_i | [\hat{Y}^\dagger, \hat{H}] | \Phi_f \rangle, \quad (39)$$

où  $\hat{H}$  désigne l'hamiltonien en absence de couplage radio-fréquence. Cela conduit à (toujours en utilisant une relation de fermeture sur  $|\Phi_f\rangle$ ) :

$$\int \omega \Gamma(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2\hbar} \Omega^2 \int \langle \Phi_i | [\hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r}), \hat{H}] \hat{\Psi}_e^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}') | \Phi_i \rangle d^3r d^3r', \quad (40)$$

où l'hamiltonien contient l'énergie interne  $\hbar\omega_0$  de l'état  $e$ , les termes d'énergie cinétique pour les trois composantes  $\uparrow, \downarrow$  et  $e$ , et les trois termes d'interaction  $\uparrow\downarrow, e\downarrow$  et  $e\uparrow$ .

Constatons pour commencer que les commutateurs de  $\hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_e(\mathbf{r})$  avec les termes d'énergie cinétique ainsi qu'avec le couplage  $e\uparrow$  ont une contribution nulle pour l'état initial considéré.

Nous allons traiter ici les termes d'interaction en utilisant de "vrais" potentiels en Dirac, selon la procédure expliquée en §1-4. Nous introduisons pour cela les couplages nus  $\bar{g}_{\uparrow\downarrow}, \bar{g}_{e\downarrow}, \bar{g}_{e\uparrow}$  associés à la même coupure  $k_{\max}$  dans l'espace des impulsions. Dans le calcul du commutateur intervenant dans (40), les seules contributions non nulles viennent de l'énergie interne  $\hbar\omega_0$  de  $e$  et des couplages  $e\downarrow$  et  $\uparrow\downarrow$ . On arrive alors à

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 + \frac{1}{\hbar N_\uparrow} (\bar{g}_{e\downarrow} - \bar{g}_{\uparrow\downarrow}) \langle \hat{K}_{\text{int}} \rangle. \quad (41)$$

L'opérateur  $\hat{K}$ , défini par :

$$\hat{K} = \int \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) d^3r \quad (42)$$

est la version fermionique de l'opérateur introduit en (28) pour des bosons. Il a pour moyenne  $\hbar^4 C / (m^2 \bar{g}_{\uparrow\downarrow}^2)$  [cf. (30,31)], ce qui conduit à :

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 + \frac{\bar{a}_{e\downarrow}}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} \left( \frac{1}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\bar{a}_{e\downarrow}} \right) \frac{\hbar C}{4\pi m N_\uparrow}. \quad (43)$$

En utilisant l'identité entre couplages nus ( $\bar{g}, \bar{a}$ ) et couplages physiques ( $g, a$ ) :

$$\frac{1}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{\bar{a}_{e\downarrow}} = \frac{1}{a_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{a_{e\downarrow}}, \quad (44)$$

cette relation peut encore s'écrire :

$$\langle \omega \rangle = \omega_0 + \frac{\bar{a}_{e\downarrow}}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} \left( \frac{1}{a_{\uparrow\downarrow}} - \frac{1}{a_{e\downarrow}} \right) \frac{\hbar C}{4\pi m N_\uparrow} \quad (45)$$

Finalement, nous pouvons écrire le rapport  $\bar{a}_{e\downarrow}/\bar{a}_{\uparrow\downarrow}$  comme :

$$\frac{\bar{a}_{e\downarrow}}{\bar{a}_{\uparrow\downarrow}} = \frac{k_{\max} - \frac{\pi}{2a_{\uparrow\downarrow}}}{k_{\max} - \frac{\pi}{2a_{e\downarrow}}} \rightarrow 1 \quad \text{quand } k_{\max} \rightarrow \infty. \quad (46)$$

On arrive alors au résultat annoncé en (33). Rappelons que la limite  $k_{\max} \rightarrow \infty$  doit être comprise physiquement comme  $k_{\max} \sim 1/b$  puisqu'au delà de cette valeur, la portée du potentiel doit être prise en compte. Le résultat (46) n'est donc physiquement pertinent que si les longueurs de diffusion sont telles que  $|a_{\uparrow\downarrow}|, |a_{e\downarrow}| \gg b$ . On pourra consulter l'article de BAYM, PETHICK et al. (2007) pour une discussion des situations où cette inégalité n'est pas satisfaite.

On pourrait s'étonner de ne pas voir apparaître de terme d'interaction proportionnel à  $g_{e\uparrow}$  dans ce qui précède. La raison en est que l'action de la radio-fréquence consiste à faire basculer chacun des  $N_\uparrow$  atomes depuis l'état  $|\uparrow\rangle$  vers l'état  $\cos\theta |\uparrow\rangle + \sin\theta |e\rangle$  (avec  $\theta \ll 1$  dans notre approche perturbative). Ces  $N_\uparrow$  atomes restent tous dans le même état interne, ce sont donc des fermions polarisés et ils n'interagissent pas entre eux (GUPTA, HADZIBABIC et al. 2003). La situation serait bien sûr différente si on considérait des bosons.

### 2-3 L'aile du spectre radio-fréquence

Nous considérons dans ce paragraphe le cas où les atomes dans l'état  $e$  n'interagissent pas avec les atomes en  $\uparrow$  et  $\downarrow$ . En particulier, le fait de poser  $a_{e\downarrow} = 0$  entraîne la divergence de (33). Nous voulons montrer ici que cette divergence de l'intégrale  $\int \omega \Gamma(\omega) d\omega$  provient de l'apparition d'une aile en  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$ , dont l'expression est donnée en (34).

Puisque les atomes dans l'état  $e$  évoluent librement, la forme des états finaux possibles  $\Phi_f$  intervenant dans la règle d'or de Fermi (36) est simple : ce sont des états produits  $|e : \mathbf{k}\rangle \otimes |\Phi_f^{(N-1)}\rangle$ , d'énergie  $E_f = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_f^{(N-1)}$ .

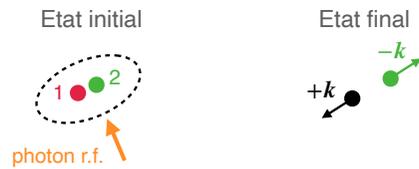


FIGURE 3. Processus contribuant à l'aile en  $(\omega - \omega_0)^{3/2}$  du spectre radio-fréquence.

Un élément de matrice générique intervenant dans (36) s'écrit alors :

$$\langle \Phi_f | \hat{Y} | \Phi_i \rangle = \int \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{L^3}} \langle \Phi_f^{(N-1)} | \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle d^3r. \quad (47)$$

Quand  $\omega - \omega_0$  est grand, un atome isolé  $\uparrow$  est quasiment insensible à la radio-fréquence. Les états finaux dominants sont ceux où la radio-fréquence fait basculer l'état interne d'un atome  $\uparrow$ , initialement très proche d'un atome  $\downarrow$ . Selon la valeur de  $a$ , ces deux atomes pouvaient, avant la bascule, former un état lié ou alors être dans un état de collision. Dans les deux cas, l'impulsion du centre de masse de cette paire était faible, alors que les distributions en impulsion de chacun des deux partenaires (ou de manière équivalente, la distribution en impulsion de la variable relative) pouvaient être larges.

Lors de la bascule de  $\uparrow$  vers  $e$ , l'impulsion totale de la paire est inchangée et reste donc négligeable. L'énergie initiale totale de la paire,  $E_i$ , est supposée faible devant le désaccord  $\hbar(\omega - \omega_0)$ , même si ses deux composantes, cinétique et interaction (qui sont de signes opposés), sont chacune comparables à ce désaccord<sup>2</sup>. Une fois le photon radio-fréquence absorbé et l'atome  $\uparrow$  passé dans l'état  $e$ , les deux atomes n'interagissent plus (figure 3). Ils se partagent de manière égale l'excès d'énergie  $\hbar(\omega - \omega_0)$ , chacun des deux atomes gagnant l'énergie cinétique  $\hbar^2 k^2 / 2m$ . La distribution  $\delta[\omega - (E_f - E_i)/\hbar]$  peut alors être approchée par  $\delta(\omega - \omega_0 - \hbar k^2 / m)$ .

2. Un raisonnement voisin apparaît dans l'analyse de l'augmentation d'énergie induite par des pertes d'atomes dans un gaz en interaction (BOUCHOULE, DUBOIS et al. 2021). La perte d'atomes membres de paires de courte elongation conduit à une divergence du taux d'accroissement de l'énergie pour un potentiel de portée nulle.

Une fois cette approximation faite, on peut utiliser de nouveau une relation de fermeture sur les états  $|\Phi_f^{(N-1)}\rangle$ . La somme des carrés des éléments de matrice du type (47) fait apparaître

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\Omega^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\Phi_f^{(N-1)}} |\langle e : \mathbf{k} | \otimes \langle \Phi_f^{(N-1)} | \hat{Y} | \Phi_i \rangle|^2 \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) \quad (48)$$

ou encore

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\Omega^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}}{L^3} \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle \times \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) d^3r d^3r'. \quad (49)$$

On reconnaît la distribution en impulsion pour l'état  $\uparrow$  :

$$n_\uparrow(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \langle \Phi_i | \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) | \Phi_i \rangle d^3r d^3r' \quad (50)$$

de sorte que  $\Gamma(\omega)$  s'écrit :

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\pi\Omega^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int n_\uparrow(\mathbf{k}) \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) d^3k. \quad (51)$$

Il suffit alors d'insérer la loi asymptotique  $n_\uparrow(\mathbf{k}) \approx C/k^4$  pour arriver à

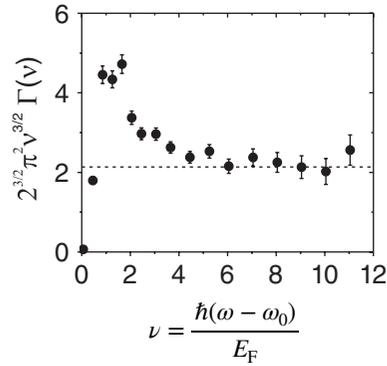
$$\int n_\uparrow(\mathbf{k}) \delta\left(\omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{m}\right) d^3k = 2\pi C \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^{3/2}} \quad (52)$$

et

$$\Gamma(\omega) \approx \frac{\Omega^2}{8\pi} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \frac{C}{(\omega - \omega_0)^{3/2}} \quad (53)$$

ce qui correspond à la prédiction (34).

Notons qu'en pratique,  $a_{e\downarrow}$  n'est jamais rigoureusement nulle. BRAATEN, KANG et al. (2010) montrent que pour  $\omega \gtrsim \hbar/ma_{e\downarrow}^2$ , la décroissance lente en  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$  bascule vers une décroissance plus rapide en  $(\omega - \omega_0)^{-5/2}$ , qui assure la convergence de l'intégrale donnant le déplacement moyen de la raie [voir aussi CHIN & JULIENNE (2005)]. Les corrections liées à la portée  $b \sim R_{vdW}$  du potentiel peuvent aussi jouer un rôle dans ce domaine des très grands désaccords.



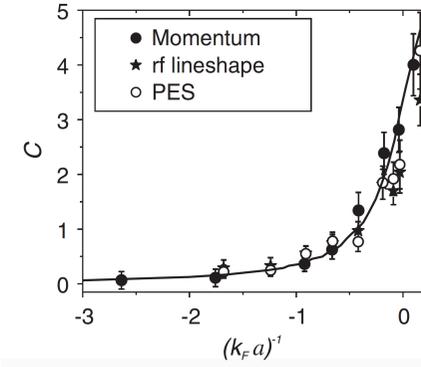
**FIGURE 4.** Variation de  $\nu^{3/2} \Gamma(\nu)$ , où  $\Gamma(\nu)$  est le taux de transfert de  $|\uparrow\rangle$  vers  $|e\rangle$  par une radio-fréquence désaccordée de  $\nu$  par rapport à la résonance,  $\nu$  étant exprimé ici en unité de  $E_F/2\pi\hbar$ . Le plateau observé pour les grandes valeurs de  $\nu$  permet de déterminer le contact pour la valeur de  $a$  choisie  $[(k_F a)^{-1} = -0.03$  pour ces données]. Figure extraite de STEWART, GAEBLER et al. (2010).

### 3 Études expérimentales sur le gaz de Fermi

#### 3-1 Spectroscopie radio-fréquence

Nous avons présenté au chapitre précédent une première partie des résultats obtenus par le groupe de Boulder en 2010, à partir de la distribution en impulsion d'un gaz de fermions de  $^{40}\text{K}$  avec  $|\downarrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -9/2\rangle$  et  $|\uparrow\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -7/2\rangle$  (STEWART, GAEBLER et al. 2010). Décrivons maintenant la deuxième étude menée par ce groupe au moyen de la spectroscopie radio-fréquence, effectuée depuis l'état  $|\uparrow\rangle$  vers l'état  $|e\rangle \equiv |F = 9/2, m_F = -5/2\rangle$ . Le taux de transfert d'atomes en fonction du désaccord  $\omega - \omega_0$  est montré en figure 4. On constate que ce taux varie bien comme  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$  aux grands désaccords, et le coefficient de proportionnalité fournit une autre détermination du contact.

La figure 5 regroupe les deux jeux de données pour le contact, obtenus à partir de la distribution en impulsion et de la spectroscopie radio-fréquence. Un troisième jeu de données a été obtenu avec la technique de



**FIGURE 5.** Récapitulation des valeurs obtenues pour le contact (en unité de  $Nk_F$ ) par la mesure de la distribution en impulsion (points noirs) et de la spectroscopie radio-fréquence (étoiles). Le troisième jeu de données utilise la spectroscopie de photo-émission (PES). La courbe continue est la prédiction théorique de WERNER, TARRUELL et al. (2009). Figure extraite de STEWART, GAEBLER et al. (2010).

spectroscopie de photo-émission que nous ne décrivons pas ici. Toutes ces données sont compatibles entre elles et leur variation avec  $1/a$  est en bon accord avec la discussion qualitative du chapitre précédent.

Récemment, le groupe du MIT dirigé par M. Zwierlein a approfondi l'étude du contact au point unitaire  $a = \pm\infty$  par spectroscopie radio-fréquence (MUKHERJEE, PATEL et al. 2019). Les chercheurs du MIT ont varié la température du gaz pour étudier le comportement du contact quand on croise la transition entre l'état superfluide et l'état normal ( $T_c \approx 0.17 T_F$ ). Ces mesures, tracées en figure 6 (haut), ont été effectuées dans un gaz uniforme, confiné dans un potentiel lumineux en forme de boîte, ce qui permet d'éviter l'élargissement du spectre dû aux variations de densité dans un piège harmonique. Les spectres obtenus fournissent de nombreux renseignements sur la physique en jeu. Par exemple, le déplacement du maximum de la raie donne accès à l'énergie des paires de Cooper dont la formation devient énergétiquement favorable pour  $T \lesssim 0.5 T_F$ . Pour le spectre obtenu à la plus basse température, on voit clairement une aile en  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$  (figure 6, bas), avec aux très grands désaccords une décroissance un peu plus rapide liée aux interactions non nulles entre les atomes

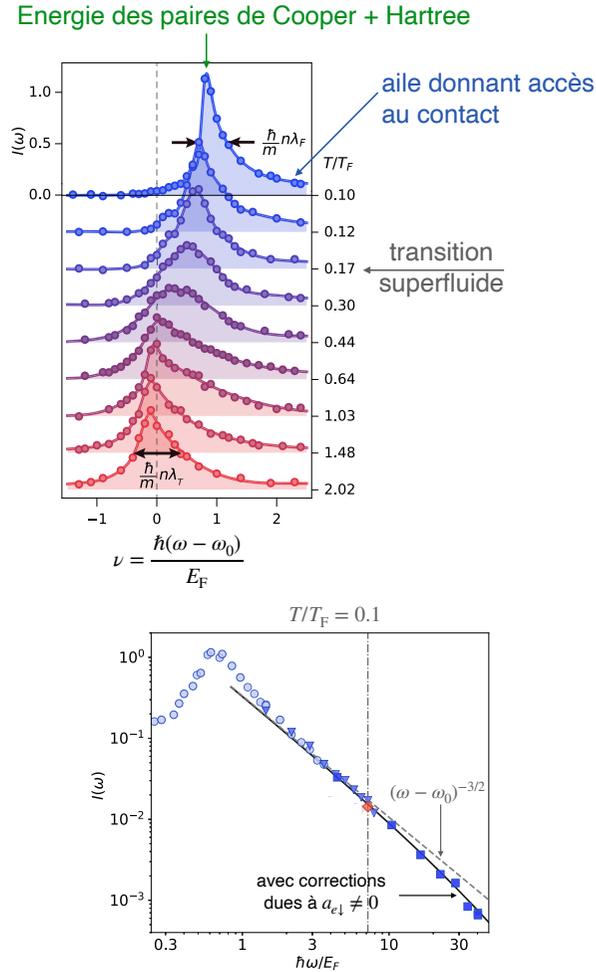
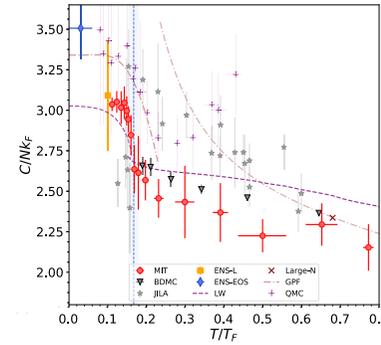


FIGURE 6. Haut : série de spectres radio-fréquence mesurés sur un gaz de Fermi unitaire ( $|a| = +\infty$ ) pour différentes températures. Bas : spectre mesuré à basse température avec l'aile en  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$ , et des corrections liées aux interactions résiduelles entre  $e$  et  $\downarrow$ . L'analyse de ces données donne  $C = 3.07$  (6). Figures extraites de MUKHERJEE, PATEL *et al.* (2019).

MIT : contact déduit de l'aile du spectre r.f.



Swinburne : contact déduit de l'aile de  $S(\mathbf{q}, \omega)$

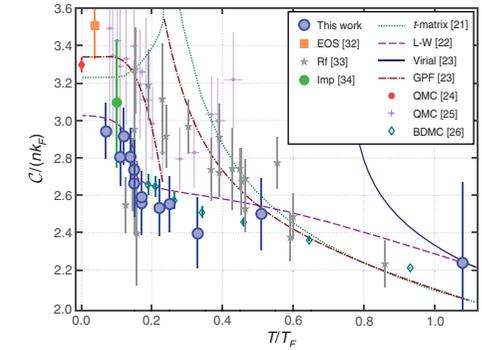


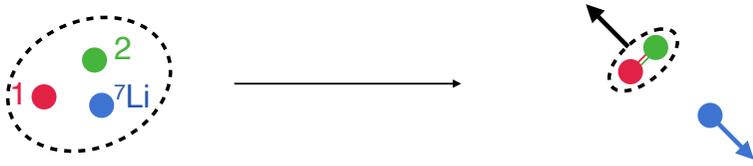
FIGURE 7. Valeurs du contact pour un gaz de Fermi équilibré dans le régime unitaire, en fonction de la température. Figure de gauche extraite de MUKHERJEE, PATEL *et al.* (2019). Figure de droite extraite de CARCY, HOINKA *et al.* (2019). Les données théoriques BDMC (bold-diagrammatic Monte Carlo) ont été obtenues par ROSSI, OHGOE *et al.* (2018). La valeur de LAURENT, PIERCE *et al.* (2017) discutée en §3-2 est indiquée par un carré orange (point vert) sur le graphe de gauche (droite).

dans l'état  $e$  et les atomes  $\downarrow$  [voir la discussion après l'équation (53)].

Le contact déduit de l'analyse de l'aile du spectre radio-fréquence par le groupe du MIT est montré en figure 7, avec les résultats obtenus simultanément par le groupe de Swinburne utilisant la mesure du facteur de structure dynamique  $S(\mathbf{q}, \omega)$ . Les résultats des deux groupes sont en excellent accord et indiquent en particulier la valeur  $C/Nk_F \approx 3$  à la limite de la température nulle.

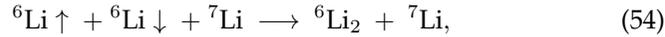
### 3-2 Mesure du contact par pertes d'atomes

LAURENT, PIERCE *et al.* (2017) ont développé une approche originale pour mesurer le contact dans un gaz de  ${}^6\text{Li}$  de spin  $1/2$  confiné dans un piège optique, en y insérant quelques atomes de  ${}^7\text{Li}$  jouant le rôle d'impuretés (voir aussi voir aussi SPIEGELHALDER, TRENKWALDER *et al.* (2009b) et KHRAMOV, HANSEN *et al.* (2012)). Le principe de la mesure consiste à



**FIGURE 8.** *Processus de formation de dimères assisté par une impureté. À l'issue du processus, l'énergie libérée est convertie en énergie cinétique. Cette énergie est suffisamment grande pour que l'impureté s'échappe du piège confinant les particules.*

étudier comment les impuretés favorisent la formation de dimères  ${}^6\text{Li}_2$ . On s'intéresse donc au processus à trois corps :



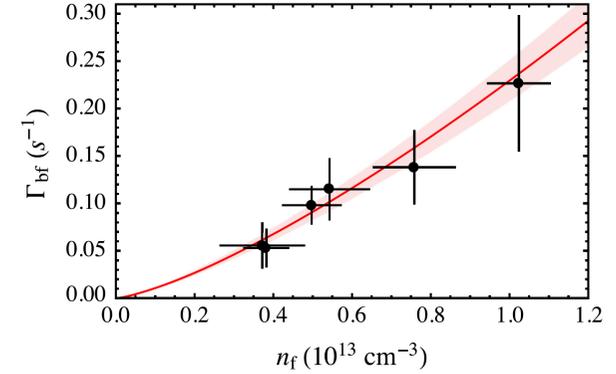
la présence de l'impureté permettant d'assurer la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans ce processus.

Comme le dimère qui est formé a une extension faible ( $b \sim R_{\text{vdW}}$ ), le taux avec lequel ce processus se produit renseigne sur la densité de probabilité pour avoir les deux atomes de  ${}^6\text{Li}$  proches, à une distance  $\sim b$  l'un de l'autre : c'est précisément la quantité à laquelle le contact donne accès. Comme l'atome de  ${}^7\text{Li}$  possède une grande énergie cinétique après la formation du dimère, il s'échappe du piège. Le taux de pertes des atomes de  ${}^7\text{Li}$  permet donc de remonter à la valeur du contact dans le gaz de  ${}^6\text{Li}$ .

Pour un traitement quantitatif du problème, on introduit l'opérateur à trois corps :

$$\iiint g(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_\uparrow, \mathbf{r}_\downarrow) \hat{\Psi}_d^\dagger \left( \frac{\mathbf{r}_\uparrow + \mathbf{r}_\downarrow}{2} \right) \hat{\Psi}_i^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{\Psi}_i(\mathbf{r}_i) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}_\uparrow) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}_\downarrow) d^3r_i d^3r_\uparrow d^3r_\downarrow. \quad (55)$$

On voit apparaître dans cet opérateur la densité d'impuretés au point  $\mathbf{r}_i$ ,  $\hat{n}_i(\mathbf{r}_i) = \hat{\psi}_i^\dagger(\mathbf{r}_i)\hat{\psi}_i(\mathbf{r}_i)$ ; par ailleurs, le dimère est créé au milieu du segment joignant les deux fermions  $\uparrow$  et  $\downarrow$  initialement présents. La fonction  $g$ , qui dépend des détails des potentiels d'interaction entre les trois atomes, ne prend des valeurs significatives que lorsque les trois atomes sont dans un même volume d'extension  $\sim b$ .



**FIGURE 9.** *Variation du taux de pertes des impuretés de  ${}^7\text{Li}$  en fonction de la densité du gaz de fermions de  ${}^6\text{Li}$ . Ces données ont été prises à résonance ( $a = \infty$  pour l'interaction entre fermions  $\uparrow$  et  $\downarrow$ ) et la ligne rouge continue indique la loi de variation  $n^{4/3}$  attendue. Figure extraite de LAURENT, PIERCE et al. (2017).*

Pour calculer le taux de production de dimères (et donc de perte d'impuretés), on peut utiliser une approche basée sur la règle d'or de Fermi. Le traitement est détaillé dans le *Supplemental Material* de LAURENT, PIERCE et al. (2017) et il est proche de ce que nous avons développé pour le calcul du spectre radio-fréquence. On arrive au résultat

$$\dot{N}_i = -\gamma(C/L^3) N_i, \quad (56)$$

où le coefficient  $\gamma$  fait intervenir la fonction de couplage  $g$  intervenant dans (55), mais ne dépend pas de la valeur de la longueur de diffusion  $a$  pour le gaz de fermions.

La stratégie adoptée par LAURENT, PIERCE et al. (2017) a consisté à calibrer d'abord le coefficient  $\gamma$  en effectuant des mesures du taux de pertes  $\dot{N}_i$  dans un régime où le contact est bien connu. En pratique, ces mesures de calibration ont été faites pour  $a$  petit et positif, favorisant un gaz de dimères. La température était choisie nettement au dessus de la température de dégénérescence, de sorte que la distribution du gaz dans le piège était bien décrite par une simple loi de Boltzmann.

Une fois le coefficient  $\gamma$  connu, LAURENT, PIERCE et al. (2017) ont placé leur gaz de  ${}^6\text{Li}$  à résonance ( $a = \infty$ ) pour étudier le contact dans un régime

d'interaction forte à une température aussi basse que possible, en pratique  $T/T_F \approx 0.1$ . Nous avons vu plus haut [voir par exemple la figure 7] que dans le régime unitaire, on attend pour le contact la loi suivante

$$\frac{C}{L^3} = 2\pi\eta k_F n \propto n^{4/3}. \quad (57)$$

D'après (56), cette même loi en  $n^{4/3}$  est attendue pour le taux de perte d'impuretés. On vérifie sur la figure 9 que c'est effectivement le cas. L'ajustement des données expérimentales fournit la valeur  $2\pi\eta \approx 3.1(4)$  pour le coefficient figurant dans (57), en bon accord avec les résultats montrés en figure 7.

### 3-3 Le contact en onde $p$

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux interactions en onde  $s$ , caractérisées par une longueur de diffusion  $a$ , et nous avons introduit le contact comme la quantité thermodynamique conjuguée de  $a$  (ou plus précisément  $1/a$ ), à un facteur multiplicatif près. Cet intérêt porté aux interactions en onde  $s$  est justifié : que l'on prenne un gaz de bosons polarisés ou un gaz de fermions de spin  $1/2$ , le canal de moment cinétique  $\ell = 0$  est généralement dominant par rapport à tous les autres à basse température. Rappelons que cela est dû à la barrière centrifuge  $\hbar^2\ell(\ell+1)/mr^2$  qui existe dans tous les canaux  $\ell \neq 0$ . Cette barrière est notablement plus grande que l'énergie des particules, de sorte que la diffusion dans ces canaux est généralement négligeable.

Il existe néanmoins des situations où la diffusion dans un canal autre que l'onde  $s$  peut jouer un rôle important. Considérons par exemple un gaz de Fermi polarisé, de sorte qu'il n'y a pas de collision en onde  $s$ . Supposons de plus que l'on tire parti d'une résonance de diffusion pour le canal en onde  $p$ , c'est-à-dire  $\ell = 1$ . Une telle résonance peut se produire s'il y a un état quasi-lié d'énergie proche de 0 dans le puits formé par le potentiel de van der Waals attractif et la barrière centrifuge répulsive (voir figure 10) : on parle alors de résonance de forme. Cette résonance peut également être induite par un couplage entre deux canaux de collision, l'un ouvert, l'autre fermé, selon le schéma habituel des résonances de Fano–Feshbach.

Nous avons discuté dans le cours 2021 les caractéristiques principales

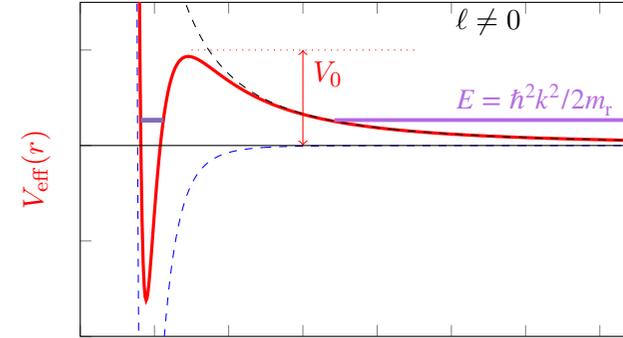


FIGURE 10. Résonance pour le canal en onde  $\ell \neq 0$  due à la présence d'un état quasi-lié.

d'un processus de diffusion en onde  $p$  :

- Dans la région  $b \ll r \ll 1/k$ , la forme attendue pour la partie radiale  $\chi(r)$  de la fonction d'onde  $\psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$  est une combinaison linéaire de  $r^{-2}$  et de  $r^1$  (à comparer à la combinaison de  $r^{-1}$  et  $r^0$  pour l'onde  $s$ ). On introduit le volume de diffusion  $v$  pour fixer le poids relatif de ces deux termes (il joue un rôle similaire à celui de la longueur de diffusion  $a$  pour l'onde  $s$ ) :

$$b \ll r \ll 1/k : \quad \chi(r) \propto \frac{1}{r^2} - \frac{r}{3v}. \quad (58)$$

- L'amplitude de diffusion en onde  $p$  se met sous la forme  $f(k, \theta) = 3 \cos(\theta) f_1(k)$  avec :

$$\text{onde } p : \quad \frac{1}{f_1(k)} = -\frac{1}{k^2 v} + \frac{k_e}{2} - ik + \dots \quad (59)$$

Le terme dominant fait lui aussi intervenir le volume de diffusion  $v$ . Le terme suivant  $k_e/2$  est un terme de portée effective et le dernier terme écrit ici, l'imaginaire pur  $-ik$ , est une conséquence de l'unitarité du processus de diffusion (théorème optique).

Notons que la situation est notablement différente du cas de l'onde  $s$  :

$$\text{onde } s : \quad \frac{1}{f_0(k)} = -\frac{1}{a} - ik + \frac{1}{2} r_e k^2 + \dots \quad (60)$$

où le terme de portée effective était a priori petit devant  $-ik$ , lui-même petit devant la contribution de la longueur de diffusion. Pour un système en interaction en onde  $p$ , il est préférable de garder les deux paramètres indépendants  $v$  et  $k_e$  pour obtenir une caractérisation fidèle. Notons également que pour une résonance de Fano–Feshbach induite par un champ magnétique extérieur  $B$ , ce champ brise l’invariance par rotation du problème ; il faut alors introduire  $v_m$  et  $k_{e,m}$  avec  $m = -1, 0, +1$  correspondant aux trois orientations possibles du moment cinétique par rapport à  $B$ .

La variation en  $1/r^2$  de la fonction d’onde relative (58) suggère

- que la fonction de corrélation à deux corps sera dominée à courte distance (tout en respectant  $b \ll r$ ) par un terme en  $1/r^4$  ;
- que l’amplitude de probabilité pour trouver l’impulsion  $\mathbf{k}$  sera proportionnelle à la transformée de Fourier de  $1/r^2$ , c’est-à-dire  $1/k$ , soit une distribution de probabilité en impulsion en  $1/k^2$ .

Les analyses détaillées menées par YOSHIDA & UEDA (2015), YU, THYWISSSEN et al. (2015) et YU, THYWISSSEN et al. (2016) confirment cette intuition. En introduisant la variable conjuguée au volume de diffusion

$$C_{v,m} = -\frac{8\pi m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial(1/v_m)} \right)_{S,N,V,k_e} \quad (61)$$

on trouve alors pour la distribution de paires à courte distance<sup>3</sup> :

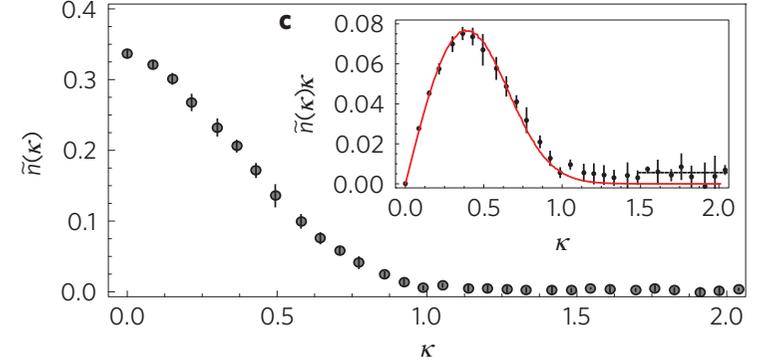
$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi L^3} \frac{1}{r^4} \sum_m |Y_{1,m}(\hat{\mathbf{r}})|^2 C_{v,m}, \quad (63)$$

où la fonction  $Y_{1,m}(\hat{\mathbf{r}})$  est l’harmonique sphérique dépendant des variables angulaires  $(\theta, \varphi)$  repérant la direction du vecteur unitaire aligné avec  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . De même, on trouve pour la distribution en impulsion

$$n(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_m |Y_{1,m}(\hat{\mathbf{k}})|^2 C_{v,m}. \quad (64)$$

3. Dans le cas où les trois contacts  $C_m$  sont égaux, la relation suivante sur les harmoniques sphériques est utile :

$$\sum_m |Y_{1,m}(\mathbf{u})|^2 = \frac{3}{4\pi}. \quad (62)$$

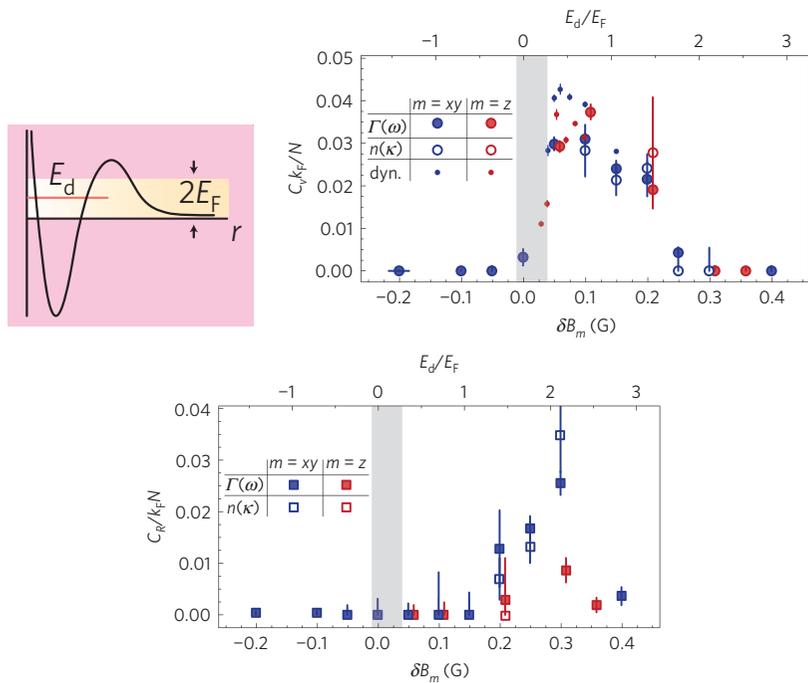


**FIGURE 11.** Distribution en impulsion d’un gaz de fermions polarisés ( $^{40}\text{K}$ ) au voisinage d’une résonance de Feshbach en onde  $p$  pour  $v_{m=\pm 1}$  ( $B = 198.3\text{ G}$ ). Cette distribution est mesurée par temps de vol, avec intégration le long de l’axe  $z$  d’imagerie (choisi parallèle au champ magnétique). La loi attendue en  $1/k^2$  se traduit donc ici par une variation en  $1/\kappa$ , avec  $\kappa \propto (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ , du fait de l’intégration le long de l’axe du faisceau imageur. Figure extraite de LUCIUK, TROTZKY et al. (2016).

YU, THYWISSSEN et al. (2015) discutent de plus l’introduction du contact  $C_{k_e}$  lié au terme de portée effective  $k_e$ , qui vient par exemple ajouter une composante en  $r^{-2}$  à la fonction de distribution de paires et une composante en  $k^{-4}$  à la distribution en impulsion [consulter également YU, THYWISSSEN et al. (2016) pour des termes correctifs].

On notera que la distribution en impulsion (64) n’est pas normalisable, la décroissance en  $k^{-2}$  à l’infini étant trop lente. La prise en compte d’une coupure en  $k$  est donc indispensable pour lui donner un sens. Comme l’expliquent YOSHIDA & UEDA (2015), cette divergence est liée au fait que contrairement au cas de l’onde  $s$ , il n’existe pas de limite physique de potentiel à portée nulle conduisant à une interaction résonante en onde  $p$  (voir aussi PRICOUPENKO (2006)).

La mise en évidence d’une composante en  $k^{-2}$  dans la distribution en impulsion a été faite dans le groupe de Toronto dirigé par J. Thywissen (LUCIUK, TROTZKY et al. 2016) et le résultat est montré sur la figure 11.



**FIGURE 12.** Contacts  $C_v$  et  $C_{k_e}$ , associés aux paramètres  $v$  et  $k_e$  ( $C_{k_e}$  est noté ici  $C_R$ ) mesurés par spectroscopie radio-fréquence et à partir de la distribution en impulsion. Figure extraite de LUCIUK, TROTZKY et al. (2016).

L'ensemble des données de LUCIUK, TROTZKY et al. (2016), obtenues à la fois par spectroscopie radio-fréquence et par mesure de  $n(k)$ , est reporté sur la figure 12 pour les deux contacts  $C_v$  et  $C_{k_e}$ . Comme attendu, on constate que ces contacts prennent des valeurs significatives dans le cas où un état quasi-lié est proche de l'énergie caractéristique des atomes, c'est-à-dire l'énergie de Fermi.

## 4 Contact à deux corps pour le gaz de Bose

### 4-1 Les différents régimes pour le gaz de Bose

Nous nous intéressons ici au cas d'un gaz de bosons sans spin ou polarisés, avec des interactions en onde  $s$  caractérisées par la longueur de diffusion  $a$ . Comme toujours pour ce cours, le gaz sera supposé dilué de sorte que  $nb^3 \ll 1$ , où  $b$  est la portée du potentiel. L'extension des résultats de Tan au cas des bosons a été menée dès la fin des années 2000 par COMBESCOT, ALZETTO et al. (2009) (qui ont négligé les effets à trois corps), puis par BRAATEN, KANG et al. (2011), WERNER & CASTIN (2012a) et SMITH, BRAATEN et al. (2014) (qui les ont pris en compte). Les premières expériences sur les gaz de Bose ont été menées dans le groupe de Boulder par WILD, MAKOTYN et al. (2012) et seront décrites en §4-3.

Nous allons commencer par récapituler les différents régimes possibles :

- Le cas d'un gaz en interaction faible,  $na^3 \ll 1$  avec  $a > 0$ . À basse température, ce cas peut être décrit par l'approximation de Bogoliubov ; à plus haute température, la méthode Hartree-Fock ou le développement du viriel sont utilisables.

Sur le plan théorique, si le potentiel d'interaction entre atomes est complètement répulsif, avec une portée  $b \sim a$  (c'est le cas pour un potentiel de sphères dures par exemple), aucune instabilité n'est à craindre. Sur le plan pratique, il y a toujours des états liés dans le potentiel interatomique pour les espèces utilisées au laboratoire, ce qui peut induire des pertes<sup>4</sup> d'atomes qui s'échappent du piège sous forme de molécules diatomiques. Ces molécules sont formées lors d'une collision à trois corps, dans laquelle deux partenaires forment l'état lié et le troisième emporte l'énergie libérée lors de la création du dimère. Rappelons que ces pertes sont absentes pour le gaz de

4. En fait, ces pertes sont elles-mêmes un processus intéressant, présentant un caractère d'universalité, comme montré théoriquement par BRAATEN & HAMMER (2013a) et LAURENT, LEYRONAS et al. (2014), et étudié expérimentalement par REM, GRIER et al. (2013), FLETCHER, GAUNT et al. (2013) et EISMANN, KHAYKOVICH et al. (2016). Par ailleurs, ces pertes peuvent conduire à une mise en défaut des relations de Tan, comme montré dans le cas uni-dimensionnel par BOUCHOULE & DUBAIL (2021).

Fermi de spin 1/2 car le principe de Pauli interdit d'avoir trois fermions proches l'un de l'autre si seulement deux états de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  sont disponibles.

Heureusement, comme expliqué au chapitre 3 (§1.1), la condition  $na^3 \ll 1$  garantit qu'il existe une plage de temps durant laquelle le gaz a atteint son état d'équilibre sans que les pertes mentionnées ci-dessus ne jouent un rôle appréciable.

- Le cas d'une interaction faible ( $n|a|^3 \ll 1$ ) avec  $a < 0$ . À basse température et à trois dimensions, l'utilisation de la théorie de champ moyen conduit à une instabilité dynamique du gaz et à son effondrement.
- Le régime d'interaction forte,  $n|a|^3 \gtrsim 1$ ,  $a$  pouvant être positif ou négatif. Dans ce cas, qui nécessite  $|a| \gg b$ , une série d'états faiblement liés à trois corps peut apparaître, ces états étant en nombre infini pour  $a = \pm\infty$  : c'est le problème bien connu d'EFIMOV (1971) [voir NAIDON & ENDO (2017) pour une revue]. Ces états peuvent avoir une grande extension et il est facile de les former lors des collisions dans le gaz. La contribution de ces états doit donc être prise en compte dans la détermination de l'équilibre thermodynamique du système.

Pour caractériser la thermodynamique du système, il faut alors introduire, en plus du contact à deux corps, un autre paramètre appelé *contact à trois corps* (BRAATEN, KANG et al. 2011 ; WERNER & CASTIN 2012a ; SMITH, BRAATEN et al. 2014). La première mesure expérimentale de ce contact à trois corps a été faite par FLETCHER, LOPES et al. (2017). Nous ne discuterons pas ces expériences ici car leur explication nécessite la mise en place d'un formalisme spécifique, que nous reportons à un prochain cours.

Par ailleurs, dans ce régime, la formation de dimères mentionnée plus haut devient problématique. Dans le régime proche de  $T = 0$ , le gaz n'a pas le temps d'atteindre son état d'équilibre avant d'avoir perdu une fraction significative de ses constituants. L'étude de l'équilibre thermodynamique d'un gaz de Bose en interaction forte ne peut donc se faire que dans le régime non dégénéré (LI & HO 2012 ; FLETCHER, GAUNT et al. 2013 ; REM, GRIER et al. 2013 ; CHEVY & SALOMON 2016).

	$T = 0$	Non dégénéré $n\lambda^3 \ll 1$
Hors résonance	$(4\pi na)^2$	$2 \times (4\pi na)^2$
À résonance	$\sim n^{4/3}$	$32\pi(n\lambda)^2$

**TABLE 1.** Valeurs prédites pour le contact à deux corps par unité de volume  $C/L^3$  d'un gaz de Bose.

## 4-2 Prédictions pour le contact à deux corps

Nous avons reporté dans la table 1 les valeurs attendues pour le contact à deux corps d'un gaz de Bose dans les régimes mentionnés ci-dessus. Dans le cas de la température nulle et hors résonance, on a affaire à un condensat de Bose–Einstein "ordinaire". La valeur du contact se déduit directement de la prédiction de champ moyen pour l'énergie du condensat :

$$E_{\text{chp. moy.}} = \frac{1}{2}gnN \quad \text{avec} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad \Rightarrow \quad C = (4\pi a)^2 nN. \quad (65)$$

Restons dans le cas non résonant et passons au cas non dégénéré. En utilisant le développement du viriel, nous avons vu au chapitre 1, §2.3, que l'énergie d'interaction est simplement doublée par rapport à la valeur (65). Le contact est donc lui aussi doublé, cette augmentation étant simplement une signature de l'effet de groupement découvert par HANBURY-BROWN & TWISS (1956).

Passons maintenant au cas résonant. La valeur à température nulle est simplement indiquée ici sous forme de la loi d'échelle  $\sim n^{4/3}$  (DIEDERIX, HEIJST et al. 2011 ; SYKES, CORSON et al. 2014 ; SMITH, BRAATEN et al. 2014), mais est difficile à tester expérimentalement. En effet, comme expliqué en §4-1, il n'est pas possible de produire le gaz dans un état d'équilibre dans ce régime, compte tenu du taux élevé de pertes à trois corps. En revanche, la prédiction de la dernière case du tableau, correspondant à un gaz non dégénéré en interaction résonnante, est testable expérimentalement (FLETCHER, LOPES et al. 2017). Nous allons maintenant expliquer brièvement comment arriver à cette valeur.

Nous utilisons le développement du viriel, déjà abordé au chapitre 1 de ce cours, qui donne le développement du grand potentiel  $\Omega$  en puissances

de la fugacité  $z = \exp(\mu/k_B T)$  :

$$\Omega = -PV = -\frac{k_B TV}{\lambda^3} \sum_{j=1}^{\infty} b_j(T) z^j \quad (66)$$

que nous allons tronquer à l'ordre 2 inclus. Nous allons utiliser la définition thermodynamique du contact (rappelons que  $b_1(T) = 1$  pour toute température) :

$$C = \frac{8\pi a^2 m}{\hbar^2} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial a} \right)_{T,V,\mu} = -16\pi^2 n N \lambda a^2 \left( \frac{\partial b_2}{\partial a} \right)_T \quad (67)$$

où nous avons utilisé  $z = n\lambda^3$  à cet ordre du calcul.

Reprenons maintenant la partie de  $b_2(T)$  liée aux interactions et calculée au chapitre 1 :

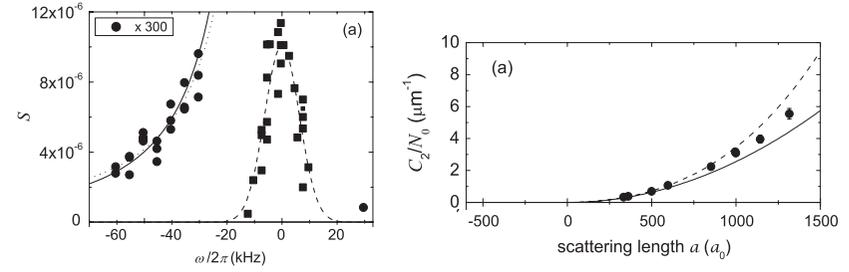
$$b_2^{(\text{int})} = \frac{2^{3/2}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\delta_0}{dk} e^{-\hbar^2 k^2 / m k_B T} dk + \Theta(a) 2^{3/2} e^{-E_{\text{lie}} / k_B T}. \quad (68)$$

On rappelle que la première contribution provient du continuum formé par les états de diffusion; elle fait intervenir le déphasage  $\delta_0(k)$  d'une collision en onde  $s$ , donné par :

$$\frac{d\delta_0}{dk} = \frac{-a}{1 + k^2 a^2}. \quad (69)$$

La seconde contribution, due à l'éventuel état lié intervenant dans la résonance, d'énergie  $E_{\text{lie}} = -\hbar^2 / ma^2$ , n'est présente que dans le domaine  $a > 0$ , d'où la fonction de Heaviside  $\Theta(a)$ .

Le calcul consiste à prendre la dérivée de  $b_2$  par rapport à  $a$ , puis considérer la limite  $a = \pm\infty$ . Il ne pose pas de difficultés de principe, même s'il est un peu long [voir par exemple BRAATEN & HAMMER (2013b)]. On arrive à la même valeur dans les deux limites  $a \rightarrow -\infty$  (pas d'état lié) et  $a \rightarrow +\infty$  (l'état lié contribue). Cette valeur est indiquée dans le tableau 1. Notons que bien que le contact  $C(a)$  lui-même soit continu et fini en  $1/a = 0$ , ses dérivées à gauche et à droite ne coïncident pas du fait de la singularité introduite par la fonction  $\Theta(a)$ . La courbe  $C(a)$  présente donc un point anguleux à résonance.



**FIGURE 13.** Gauche : spectre radio-fréquence mesuré sur un condensat de  $^{85}\text{Rb}$ . On déduit la valeur du contact de l'aile de ce spectre, ajustée par une loi en  $\omega^{-3/2}$ . Droite : variation du contact avec la longueur de diffusion  $a$ . Figure extraite de WILD, MAKOTYN et al. (2012).

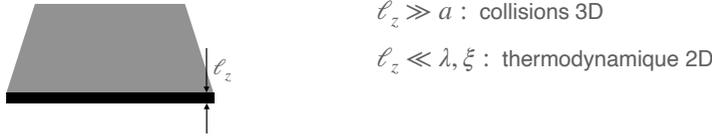
### 4-3 Contact à deux corps et spectroscopie radiofréquence

La première détermination expérimentale du contact  $C$  pour des bosons a été menée par WILD, MAKOTYN et al. (2012) sur un gaz de  $^{85}\text{Rb}$  condensé. Grâce à une résonance de Feshbach ( $B = 155$  G), la longueur de diffusion  $a$  a été variée entre  $300 a_0$  et  $1300 a_0$ , soit de 3 à 13 fois la portée  $b \sim R_{\text{vdW}}$  du potentiel de van der Waals. Cette détermination s'est appuyée sur la spectroscopie radio-fréquence, similaire à celle décrite pour les fermions en §2, avec la recherche d'une composante en  $(\omega - \omega_0)^{-3/2}$  dans l'aile du spectre [cf. §2-3]. Un résultat typique est montré en figure 13 (gauche).

WILD, MAKOTYN et al. (2012) ont ensuite étudié (toujours dans la limite de température nulle) la variation du contact avec la longueur de diffusion  $a$ . En utilisant le lien entre contact et  $\partial E / \partial a$ , on déduit du résultat de LEE, HUANG et al. (1957) la valeur attendue pour  $C$  :

$$C = (4\pi a)^2 n N_0 \left( 1 + \frac{64}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{na^3} \right). \quad (70)$$

Le résultat expérimental est tracé en figure 13 (droite). En trait plein, on a tracé la prédiction de champ moyen (uniquement le "1" dans la parenthèse ci-dessus). En ligne tiretée, on montre la prédiction incluant la correction en  $\sqrt{na^3}$ . Pour ces données, la densité moyenne est  $\sim 6 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  et la valeur maximale de  $\sqrt{na^3}$  est  $\sim 0.04$ . L'origine précise de l'écart entre les



**FIGURE 14.** Gaz quasi-bidimensionnel utilisé pour la mesure du contact à deux corps par ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021).

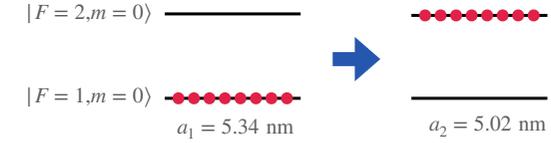
données expérimentales et la prédiction (70) n'est pas connue, mais WILD, MAKOTYN et al. (2012) mentionnent la dépendance de la valeur de  $C$  mesurée avec  $\dot{B}$ . La quantité  $\dot{B}$  désigne ici la vitesse avec laquelle le champ magnétique est amené à sa valeur finale pour fixer la valeur de la longueur de diffusion. On peut donc suspecter que de légers effets hors équilibre sont venus perturber ces mesures.

WILD, MAKOTYN et al. (2012) ont également recherché une signature du contact à trois corps dans leur données. Ce contact devrait se manifester par une aile en  $G(\omega)/\omega^2$ , où  $G(\omega)$  est une fonction log-périodique dépendant du paramètre à trois corps introduit par l'effet Efimov. Toutefois, aucune contribution mesurable de cette physique à trois corps n'a été observée dans cette expérience.

#### 4-4 Mesure par spectroscopie de Ramsey

ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021) ont effectué une mesure du contact d'un gaz de Bose dans le cas non résonant, en balayant une vaste plage de températures allant du régime quasi non-dégénéré (densité dans l'espace des phases  $\mathcal{D} \sim 2$ ) jusqu'au cas d'un condensat pratiquement pur ( $\mathcal{D} \sim 70$ ). Cette mesure a été menée dans une configuration quasi-bidimensionnelle (figure 14) : l'épaisseur du gaz selon la dimension "gelée" est petite devant la longueur d'onde thermique et la longueur de cicatrization, mais elle reste grande devant la longueur de diffusion  $a$ , de sorte que la modélisation 3D adoptée jusqu'ici continue à être pertinente.

La procédure expérimentale tire parti du fait que les longueurs de diffusion décrivant les interactions entre atomes dans un gaz de  $^{87}\text{Rb}$  sont toutes voisines les unes des autres pour les différents états internes possibles com-



**FIGURE 15.** Transfert entre deux états internes de  $^{87}\text{Rb}$  permettant de déterminer la valeur du contact à deux corps.

posant le niveau électronique fondamental. Partant d'un gaz dans l'état interne  $|1\rangle = |F = 1, m = 0\rangle$  ( $a_{11} = 100.9 a_0$ ), ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021) ont mesuré l'énergie  $\Delta E$  à fournir au gaz<sup>5</sup> pour le faire basculer entièrement vers l'état  $|2\rangle = |F = 2, m = 0\rangle$  ( $a_{22} = 94.9 a_0$ ) [cf. figure 15]. Le contact se déduit alors directement de la définition thermodynamique :

$$C = \frac{8\pi m a^2}{\hbar^2} \left( \frac{\partial E}{\partial a} \right)_{N,V,S} \approx \frac{8\pi m a^2}{\hbar^2} \frac{\Delta E}{\Delta a} \quad (71)$$

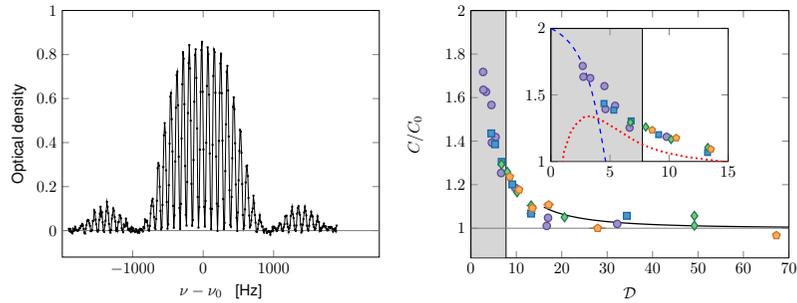
avec  $\Delta a = a_2 - a_1$ . La transition s'effectue (à peu près) à entropie constante du fait de la faible variation de  $a$ .

Le transfert de  $|1\rangle$  vers  $|2\rangle$  est effectué par une méthode de Ramsey, comportant deux brèves impulsions micro-onde  $\pi/2$  séparées par un temps d'attente de durée  $\tau = 10$  ms. On balaye la fréquence  $\nu$  de la micro-onde induisant le transfert et on cherche pour quelle valeur de  $\nu$  le transfert est optimal. Un exemple de signal de Ramsey est montré en figure 16, gauche. On peut vérifier qu'au sommet de la frange centrale (dont la position dépend de la densité du gaz), le transfert de  $|1\rangle$  vers  $|2\rangle$  est effectivement total.

Le lien avec le contact s'établit<sup>6</sup> grâce à (71) et le résultat est montré en figure 16, droite. Les résultats de ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021)

5. après soustraction de l'énergie  $Nh\nu_0$ , où  $h\nu_0$  est le changement d'énergie interne pour un atome isolé.

6. Pour appliquer le résultat (71), il est important que les trois longueurs de diffusion  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  soient voisines, c'est-à-dire que l'on soit proche de la symétrie SU(2) pour ce système à deux états. Cette contrainte sur  $a_{12}$  provient du fait que pendant la durée d'attente  $\tau$  entre les deux pulses, les deux états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  sont simultanément présents dans le piège [voir ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021) pour une description détaillée de l'évolution du gaz durant cette phase].



**FIGURE 16.** *Gauche : Signal de spectroscopie de Ramsey, permettant de déterminer l'énergie à fournir à un gaz de  $^{87}\text{Rb}$  pour faire basculer son état interne de  $|F = 1, m = 0\rangle$  vers  $|F = 2, m = 0\rangle$  et changer ainsi sa longueur de diffusion de  $\Delta a = a_{22} - a_{11}$ . Droite : Valeur du contact déduite de (71), tracée en unité du contact  $C_0$  calculé par l'approximation de Bogoliubov. La courbe tiretée donne le résultat du développement du viriel (REN 2004). La courbe pointillée correspond aux prédictions d'une théorie de champ classique (PROKOF'EV & SVISTUNOV 2002). Figure extraite de ZOU, BAKKALI-HASSANI et al. (2021).*

sont en bon accord avec les théories existantes dans les deux cas limites du gaz non dégénéré (développement du viriel) et du gaz fortement dégénéré (méthode de champ classique ou approximation de Bogoliubov). Dans la zone critique où se produit la transition superfluide (densité dans l'espace des phases  $\sim 8$ ), il n'existe à notre connaissance pas de théorie ayant reproduit ces résultats expérimentaux.

# Références

- ALTMAYER, A, S RIEDL, C KOHSTALL, MJ WRIGHT, R GEURSEN, M BARTENSTEIN, C CHIN, J HECKER-DENSCHLAG & R GRIMM (2007), « Precision measurements of collective oscillations in the BEC-BCS crossover », in *Physical review letters* 98.4, p. 040401.
- BAYM, Gordon, CJ PETHICK, Zhenhua YU & Martin W ZWIERLEIN (2007), « Coherence and clock shifts in ultracold Fermi gases with resonant interactions », in *Physical review letters* 99.19, p. 190407.
- BELIAEV, ST (1958a), « Application of the methods of quantum field theory to a system of bosons », in *SOVIET PHYSICS JETP-USSR* 7.2, p. 289-299.
- (1958b), « Energy spectrum of a non-ideal Bose gas », in *Sov. Phys. JETP* 7.2, p. 299-307.
- BETH, Erich & George E UHLENBECK (1937), « The quantum theory of the non-ideal gas. II. Behaviour at low temperatures », in *Physica* 4.10, p. 915-924.
- BLUME, D. & K. M. DAILY (2009), « Universal relations for a trapped four-fermion system with arbitrary  $s$ -wave scattering length », in *Phys. Rev. A* 80 (5), p. 053626.
- BOGOLIUBOV, N. N. (1947), « On the theory of superfluidity », in *J. Phys. (USSR)* 11, p. 23.
- BOOKJANS, Eva M., Christopher D. HAMLEY & Michael S. CHAPMAN (2011), « Strong Quantum Spin Correlations Observed in Atomic Spin Mixing », in *Phys. Rev. Lett.* 107 (21), p. 210406.
- BÖTTCHER, Fabian, Jan-Niklas SCHMIDT, Matthias WENZEL, Jens HERTKORN, Mingyang GUO, Tim LANGEN & Tilman PFAU (2019), « Transient supersolid properties in an array of dipolar quantum droplets », in *Physical Review X* 9.1, p. 011051.
- BÖTTCHER, Fabian, Jan-Niklas SCHMIDT, Jens HERTKORN, Kevin NG, Sean GRAHAM, Mingyang GUO, Tim LANGEN & Tilman PFAU (2021), « New states of matter with fine-tuned interactions : quantum droplets and dipolar supersolids », in *Reports on Progress in Physics* 84, p. 012403.
- BOUCHOULE, I. & J. DUBAIL (2021), « Breakdown of Tan's Relation in Lossy One-Dimensional Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 126 (16), p. 160603.
- BOUCHOULE, Isabelle, Léa DUBOIS & Léo-Paul BARBIER (2021), « Losses in interacting quantum gases : Ultraviolet divergence and its regularization », in *Phys. Rev. A* 104 (3), p. L031304.
- BRAATEN, Eric (2011), « Universal Relations for Fermions with Large Scattering Length », in *BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, sous la dir. de Wilhelm ZWERGER, Springer.
- BRAATEN, Eric & H.-W. HAMMER (nov. 2013a), « Universal Relation for the Inelastic Two-Body Loss Rate »en, in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 46.21arXiv : 1302.5617, p. 215203.
- BRAATEN, Eric & HW HAMMER (2013b), « Universal relation for the inelastic two-body loss rate », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 46.21, p. 215203.
- BRAATEN, Eric, Daekyoung KANG & Lucas PLATTER (2010), « Short-Time Operator Product Expansion for rf Spectroscopy of a Strongly Interacting Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 104 (22), p. 223004.
- (2011), « Universal Relations for Identical Bosons from Three-Body Physics », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (15), p. 153005.
- BRAATEN, Eric, Masaoki KUSUNOKI & Dongqing ZHANG (2008), « Scattering Models for Ultracold Atoms », in *Annals of Physics* 323.7, p. 1770-1815.
- BRAATEN, Eric & Lucas PLATTER (mai 2008), « Exact Relations for a Strongly Interacting Fermi Gas from the Operator Product Expansion »en, in *Physical Review Letters* 100.20, p. 205301.
- BRODSKY, I. V., M. Yu. KAGAN, A. V. KLAPTSOV, R. COMBESCOT & X. LEYRONAS (2006), « Exact diagrammatic approach for dimer-dimer scat-

- tering and bound states of three and four resonantly interacting particles », in *Phys. Rev. A* 73 (3), p. 032724.
- CABRERA, CR, L TANZI, J SANZ, B NAYLOR, P THOMAS, P CHEINEY & L TARRUELL (2018), « Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates », in *Science* 359.6373, p. 301-304.
- CAMPANA, LS, A Caramico D'AURIA, L CESARE & U ESPOSITO (1979), « On the validity of the Bogoliubov approximation for a high-density Bose model », in *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* 24.5, p. 147-150.
- CARCY, C., S. HOINKA, M. G. LINGHAM, P. DYKE, C. C. N. KUHN, H. HU & C. J. VALE (2019), « Contact and Sum Rules in a Near-Uniform Fermi Gas at Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* 122 (20), p. 203401.
- CARLEN, Eric A, Markus HOLZMANN, Ian JAUSLIN & Elliott H LIEB (2021), « Simplified approach to the repulsive Bose gas from low to high densities and its numerical accuracy », in *Physical Review A* 103.5, p. 053309.
- CASTIN, Y. & R. DUM (1998), « Low-temperature Bose-Einstein condensates in time-dependent traps : Beyond the  $U(1)$  symmetry-breaking approach », in *Phys. Rev. A* 57 (4), p. 3008-3021.
- CASTIN, Yvan, Christophe MORA & Ludovic PRICOUPEK (2010), « Four-Body Efimov Effect for Three Fermions and a Lighter Particle », in *Phys. Rev. Lett.* 105 (22), p. 223201.
- CASTIN, Yvan & Félix WERNER (2011), « Single-particle momentum distribution of an Efimov trimer », in *Phys. Rev. A* 83 (6), p. 063614.
- CASTIN, Yvan & Félix WERNER (mai 2013), « Troisième coefficient du viriel du gaz de Bose unitaire », in *Canadian Journal of Physics* 91, p. 382-389.
- CAYLA, Hugo, Salvatore BUTERA, Cécile CARCY, Antoine TENART, Gaétan HERCÉ, Marco MANCINI, Alain ASPECT, Iacopo CARUSOTTO & David CLÉMENT (2020), « Hanbury Brown and Twiss Bunching of Phonons and of the Quantum Depletion in an Interacting Bose Gas », in *Physical Review Letters* 125.16, p. 165301.
- CEPERLEY, D., G. V. CHESTER & M. H. KALOS (1978), « Monte Carlo study of the ground state of bosons interacting with Yukawa potentials », in *Phys. Rev. B* 17 (3), p. 1070-1081.
- CHEINEY, P, CR CABRERA, J SANZ, B NAYLOR, L TANZI & L TARRUELL (2018), « Bright soliton to quantum droplet transition in a mixture of Bose-Einstein condensates », in *Physical review letters* 120.13, p. 135301.
- CHEVY, F., V. BRETIN, P. ROSENBUSCH, K. W. MADISON & J. DALIBARD (2001), « Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 88, p. 250402.
- CHEVY, F & C SALOMON (2016), « Strongly correlated Bose gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 49.19, p. 192001.
- CHIN, Cheng & Paul S. JULIENNE (jan. 2005), « Radio-frequency transitions on weakly bound ultracold molecules » en, in *Physical Review A* 71.1, p. 012713.
- CHOMAZ, L, S BAIER, D PETTER, MJ MARK, F WÄCHTLER, Luis SANTOS & F FERLAINO (2016), « Quantum-fluctuation-driven crossover from a dilute Bose-Einstein condensate to a macrodroplet in a dipolar quantum fluid », in *Physical Review X* 6.4, p. 041039.
- CHOMAZ, L, D PETTER, P ILZHÖFER, G NATALE, A TRAUTMANN, C POLITI, G DURASTANTE, RMW VAN BIJNEN, A PATSCHEIDER, M SOHMEN et al. (2019), « Long-lived and transient supersolid behaviors in dipolar quantum gases », in *Physical Review X* 9.2, p. 021012.
- COHEN-TANNOUDJI, C., B. DIU & F. LALOË (1973), *Mécanique Quantique*, Hermann.
- COHEN-TANNOUDJI, Claude, Bernard DIU & Franck LALOË (2021), *Mécanique quantique-Tome 3*, EDP sciences.
- COMBESCOT, R., F. ALZETTO & X. LEYRONAS (2009), « Particle distribution tail and related energy formula », in *Phys. Rev. A* 79 (5), p. 053640.
- DALIBARD, Jean (2021), « Les interactions entre atomes froids (I) : de l'universalité de van der Waals aux résonances de Fano-Feshbach », <https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/CdF/2021/total-fr.pdf>.
- DIEDERIX, J. M., T. C. F. van HEIJST & H. T. C. STOOFF (2011), « Ground state of a resonantly interacting Bose gas », in *Phys. Rev. A* 84 (3), p. 033618.
- DONNELLY, R. J., J. A. DONNELLY & R. N. HILLS (1981), « Specific heat and dispersion curve for helium II », in *Journal of Low Temperature Physics* 44.5, p. 471-489.
- DRUT, Joaquín E., Timo A. LÄHDE & Timour TEN (2011), « Momentum Distribution and Contact of the Unitary Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 106 (20), p. 205302.
- DUAN, L.-M., A. SØRENSEN, J. I. CIRAC & P. ZOLLER (2000), « Squeezing and Entanglement of Atomic Beams », in *Phys. Rev. Lett.* 85 (19), p. 3991.
- EFIMOV, V (1971), « Weakly-bound states of three resonantly-interacting particles », in *Sov. J. Nucl. Phys* 12.589, p. 101.
- EISMANN, Ulrich, Lev KHAYKOVICH, Sébastien LAURENT, Igor FERRIER-BARBUT, Benno S. REM et al. (2016), « Universal Loss Dynamics in a Unitary Bose Gas », in *Phys. Rev. X* 6 (2), p. 021025.

- ENDO, Shimpei (2020), « Virial expansion coefficients in the unitary Fermi gas », in *SciPost Physics Proceedings* 3, p. 049.
- ENDO, Shimpei & Yvan CASTIN (2015), « Absence of a four-body Efimov effect in the  $2 + 2$  fermionic problem », in *Phys. Rev. A* 92 (5), p. 053624.
- (2016a), « The interaction-sensitive states of a trapped two-component ideal Fermi gas and application to the virial expansion of the unitary Fermi gas », in *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 49.26, p. 265301.
- (2016b), « Unitary boson-boson and boson-fermion mixtures : third virial coefficient and three-body parameter on a narrow Feshbach resonance », in *The European Physical Journal D* 70.11, p. 238.
- EVRARD, Bertrand, An QU, Jean DALIBARD & Fabrice GERBIER (2021), « From Many-Body Oscillations to Thermalization in an Isolated Spinor Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 126 (6), p. 063401.
- FEDICHEV, PO, MW REYNOLDS & GV SHLYAPNIKOV (1996), « Three-body recombination of ultracold atoms to a weakly bound s level », in *Physical review letters* 77.14, p. 2921.
- FERRIER-BARBUT, Igor (2019), « Ultradilute quantum droplets », in *Physics Today* 72.4, p. 46-52.
- FERRIER-BARBUT, Igor, Holger KADAU, Matthias SCHMITT, Matthias WENZEL & Tilman PFAU (2016), « Observation of quantum droplets in a strongly dipolar Bose gas », in *Physical review letters* 116.21, p. 215301.
- FEYNMAN, R. P. (1954), « Atomic Theory of the Two-Fluid Model of Liquid Helium », in *Phys. Rev.* 94 (2), p. 262-277.
- FLETCHER, Richard J., Alexander L. GAUNT, Nir NAVON, Robert P. SMITH & Zoran HADZIBABIC (2013), « Stability of a Unitary Bose Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 111 (12), p. 125303.
- FLETCHER, Richard J, Raphael LOPES, Jay MAN, Nir NAVON, Robert P SMITH, Martin W ZWIERLEIN & Zoran HADZIBABIC (2017), « Two-and three-body contacts in the unitary Bose gas », in *Science* 355.6323, p. 377-380.
- FOLDY, Leslie L (1961), « Charged boson gas », in *Physical Review* 124.3, p. 649.
- GARCIA-COLIN, Leopoldo S (1960), « Pair Distribution Function of a Hard Sphere Bose System Calculated by the Pseudo-Potential Method », in *Journal of Mathematical Physics* 1.2, p. 87-96.
- GARDINER, C. W. (1997), « Particle-number-conserving Bogoliubov method which demonstrates the validity of the time-dependent Gross-Pitaevskii equation for a highly condensed Bose gas », in *Phys. Rev. A* 56 (2), p. 1414-1423.
- GAVORET, J & Ph NOZIERES (1964), « Structure of the perturbation expansion for the Bose liquid at zero temperature », in *Annals of Physics* 28.3, p. 349-399.
- GAVORET, Jean (1963), « Application de la théorie des perturbations à l'étude d'un liquide de Bose au zéro absolu », in *Annales de Physique*, t. 13, 8, EDP Sciences, , p. 441-491.
- GIRARDEAU, M (1962), « Ground state of the charged Bose gas », in *Physical Review* 127.5, p. 1809.
- GLYDE, H. R., R. T. AZUAH & W. G. STIRLING (2000), « Condensate, momentum distribution, and final-state effects in liquid  $^4\text{He}$  », in *Phys. Rev. B* 62 (21), p. 14337-14349.
- GLYDE, H. R., S. O. DIALLO, R. T. AZUAH, O. KIRICHEK & J. W. TAYLOR (2011), « Atomic momentum distribution and Bose-Einstein condensation in liquid  $^4\text{He}$  under pressure », in *Phys. Rev. B* 84 (18), p. 184506.
- GRIFFIN, Allan (1993), *Excitations in a Bose-condensed liquid*, 4, Cambridge University Press.
- GROSS, C., T. ZIBOLD, E. NICKLAS, J. ESTÈVE & M. K. OBERTHALER (2010), « Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit », in *Nature* 464, 1165 EP -.
- GUARRERA, Vera, Peter WÜRTZ, Arne EWERBECK, Andreas VOGLER, Giovanni BARONTINI & Herwig OTT (2011), « Observation of local temporal correlations in trapped quantum gases », in *Physical review letters* 107.16, p. 160403.
- GUGGENHEIM, E Ao (1945), « The principle of corresponding states », in *The Journal of Chemical Physics* 13.7, p. 253-261.
- GUO, Zhichao, Fan JIA, Lintao LI, Yinfeng MA, Jeremy M. HUTSON, Xiaoling CUI & Dajun WANG (2021), « Lee-Huang-Yang effects in the ultracold mixture of  $^{23}\text{Na}$  and  $^{87}\text{Rb}$  with attractive interspecies interactions », in *Phys. Rev. Research* 3 (3), p. 033247.
- GUPTA, S, Z HADZIBABIC, MW ZWIERLEIN, CA STAN, K DIECKMANN, CH SCHUNCK, EGM VAN KEMPEN, BJ VERHAAR & W KETTERLE (2003), « Radio-frequency spectroscopy of ultracold fermions », in *Science* 300.5626, p. 1723-1726.
- HALINEN, Jani, Vesa APAJA & Mikko SAARELA (2000), « Role of short-and long-range interactions in quantum Bose fluids », in *Physica B : Condensed Matter* 284, p. 3-4.

- HANBURY-BROWN, R. & R. Q. TWISS (1956), « Correlation between photons in two coherent beams of light », in *Nature* 177, p. 27-29.
- HAUSSMANN, R. (1994), « Properties of a Fermi liquid at the superfluid transition in the crossover region between BCS superconductivity and Bose-Einstein condensation », in *Phys. Rev. B* 49 (18), p. 12975-12983.
- HAUSSMANN, Rudolf, Matthias PUNK & Wilhelm ZWERGER (2009), « Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms », in *Physical Review A* 80.6, p. 063612.
- HO, Tin-Lun & Erich J. MUELLER (2004), « High Temperature Expansion Applied to Fermions near Feshbach Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* 92 (16), p. 160404.
- HO, Tin-Lun & Qi ZHOU (2010), « Obtaining the phase diagram and thermodynamic quantities of bulk systems from the densities of trapped gases », in *Nature Physics* 6.2, p. 131-134.
- HOFMANN, Johannes & Wilhelm ZWERGER (2017), « Deep Inelastic Scattering on Ultracold Gases », in *Phys. Rev. X* 7 (1), p. 011022.
- HOHENBERG, P. C. & P. M. PLATZMAN (1966), « High-Energy Neutron Scattering from Liquid He<sup>4</sup> », in *Phys. Rev.* 152 (1), p. 198-200.
- HOLZMANN, Markus & Yvan CASTIN (1999), « Pair correlation function of an inhomogeneous interacting Bose-Einstein condensate », in *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics* 7.3, p. 425-432.
- HOU, Y. & J. E. DRUT (2020), « Fourth- and Fifth-Order Virial Coefficients from Weak Coupling to Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* 125 (5), p. 050403.
- HOU, Y, KJ MORRELL, AJ CZEJDO & JE DRUT (2021), « Fourth-and fifth-order virial expansion of harmonically trapped fermions at unitarity », in *Physical Review Research* 3.3, p. 033099.
- HUGENHOLTZ, N. M. & D. PINES (1959), « Ground-State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons », in *Phys. Rev.* 116 (3), p. 489-506.
- KAPLAN, David B. & Sichun SUN (2011), « New Field-Theoretic Method for the Virial Expansion », in *Phys. Rev. Lett.* 107 (3), p. 030601.
- KHRAMOV, Alexander Y., Anders H. HANSEN, Alan O. JAMISON, William H. DOWD & Subhadeep GUPTA (2012), « Dynamics of Feshbach molecules in an ultracold three-component mixture », in *Phys. Rev. A* 86 (3), p. 032705.
- KLEMP, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS & J. J. ARLT (2010), « Parametric Amplification of Vacuum Fluctuations in a Spinor Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 104 (19), p. 195303.
- KU, Mark JH, Ariel T SOMMER, Lawrence W CHEUK & Martin W ZWIERLEIN (2012), « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », in *Science* 335.6068, p. 563-567.
- LANDAU, L. D. & E. M. LIFSHITZ (1975), *Physique Statistique*, Editions Mir.
- LARSEN, David M (1963), « Binary mixtures of dilute bose gases with repulsive interactions at low temperature », in *Annals of Physics (New York)(US)* 24.
- LAURENT, Sébastien, Xavier LEYRONAS & Frédéric CHEVY (2014), « Momentum Distribution of a Dilute Unitary Bose Gas with Three-Body Losses », in *Phys. Rev. Lett.* 113 (22), p. 220601.
- LAURENT, Sébastien, Matthieu PIERCE, Marion DELEHAYE, Tarik YEFSAH, Frédéric CHEVY & Christophe SALOMON (2017), « Connecting Few-Body Inelastic Decay to Quantum Correlations in a Many-Body System : A Weakly Coupled Impurity in a Resonant Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 118 (10), p. 103403.
- LAW, C. K., H. PU & N. P. BIGELOW (1998), « Quantum Spin Mixing in Spinor Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 81, p. 5257.
- LEBOWITZ, J. L. & O. PENROSE (1964), « Convergence of Virial Expansions », in *Journal of Mathematical Physics* 5.7, p. 841-847.
- LEE, Tsin D, Kerson HUANG & Chen N YANG (1957), « Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties », in *Physical Review* 106.6, p. 1135.
- LEGGETT, A. J. (2001), « Bose-Einstein condensation in the alkali gases », in *Rev. Mod. Phys.* 73, p. 333.
- (2006), *Quantum Liquids*, Oxford University Press.
- LEYRONAS, X. (2011), « Virial expansion with Feynman diagrams », in *Phys. Rev. A* 84 (5), p. 053633.
- LI, Weiran & Tin-Lun HO (2012), « Bose Gases near Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* 108 (19), p. 195301.
- LIEB, Elliott H, Robert SEIRINGER, Jan Philip SOLOVEJ & Jakob YNGVASON (2005), *The mathematics of the Bose gas and its condensation*, t. 34, Springer Science & Business Media.
- LIU, Xia-Ji (2013), « Virial expansion for a strongly correlated Fermi system and its application to ultracold atomic Fermi gases », in *Physics Reports* 524.2, p. 37-83.

- LIU, Xia-Ji, Hui HU & Peter D. DRUMMOND (2009), « Virial Expansion for a Strongly Correlated Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 102 (16), p. 160401.
- LOPES, Raphael, Christoph EIGEN, Nir NAVON, David CLÉMENT, Robert P. SMITH & Zoran HADZIBABIC (2017a), « Quantum Depletion of a Homogeneous Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 119 (19), p. 190404.
- LOPES, Raphael, Christoph EIGEN, Adam BARKER, Konrad G. H. VIEBAHN, Martin Robert-de SAINT-VINCENT, Nir NAVON, Zoran HADZIBABIC & Robert P. SMITH (2017b), « Quasiparticle Energy in a Strongly Interacting Homogeneous Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 118 (21), p. 210401.
- LUCIUK, Christopher, Stefan TROTZKY, Scott SMALE, Zhenhua YU, Shizhong ZHANG & Joseph H THYWISSEN (2016), « Evidence for universal relations describing a gas with p-wave interactions », in *Nature Physics* 12.6, p. 599-605.
- MIAS, George I., Nigel R. COOPER & S. M. GIRVIN (2008), « Quantum noise, scaling, and domain formation in a spinor Bose-Einstein condensate », in *Phys. Rev. A* 77 (2), p. 023616.
- MINARDI, F, F ANCILOTTO, A BURCHIANTI, C D'ERRICO, C FORT & M MODUGNO (2019), « Effective expression of the Lee-Huang-Yang energy functional for heteronuclear mixtures », in *Physical Review A* 100.6, p. 063636.
- MINGUZZI, A., P. VIGNOLO & M.P. TOSI (2002), « High-momentum tail in the Tonks gas under harmonic confinement », in *Physics Letters A* 294, p. 222-226.
- MOHLING, F. & A. SIRLIN (1960), « Low-Lying Excitations in a Bose Gas of Hard Spheres », in *Phys. Rev.* 118 (2), p. 370-378.
- MORONI, S., D. E. GALLI, S. FANTONI & L. REATTO (1998), « Variational theory of bulk  $^4\text{He}$  with shadow wave functions : Ground state and the phonon-maxon-roton spectrum », in *Phys. Rev. B* 58 (2), p. 909-924.
- MUKHERJEE, Biswaroop, Parth B. PATEL, Zhenjie YAN, Richard J. FLETCHER, Julian STRUCK & Martin W. ZWIERLEIN (2019), « Spectral Response and Contact of the Unitary Fermi Gas », in *Phys. Rev. Lett.* 122 (20), p. 203402.
- NAIDON, Pascal & Shimpei ENDO (mai 2017), « Efimov physics : a review », in *Reports on Progress in Physics* 80.5, p. 056001.
- NARASCHEWSKI, M & RJ GLAUBER (1999), « Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases », in *Physical Review A* 59.6, p. 4595.
- NASCIMBÈNE, Sylvain, Nir NAVON, KJ JIANG, Frédéric CHEVY & Christophe SALOMON (2010), « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », in *Nature* 463.7284, p. 1057-1060.
- NATION, PD, JR JOHANSSON, MP BLENCOWE & Franco NORI (2012), « Colloquium : Stimulating uncertainty : Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits », in *Reviews of Modern Physics* 84.1, p. 1.
- NAVON, Nir, Swann PIATECKI, Kenneth GÜNTER, Benno REM, Trong Canh NGUYEN, Frédéric CHEVY, Werner KRAUTH & Christophe SALOMON (2011), « Dynamics and thermodynamics of the low-temperature strongly interacting Bose gas », in *Physical review letters* 107.13, p. 135301.
- NGAMPRUETIKORN, Vudtiwat, Meera M. PARISH & Jesper LEVINSSEN (2015), « High-temperature limit of the resonant Fermi gas », in *Phys. Rev. A* 91 (1), p. 013606.
- NOZIÈRES, P. & D. PINES (1990), *The Theory of Quantum Liquids, Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley.
- OLSHANII, Maxim & Vanja DUNJKO (2003), « Short-Distance Correlation Properties of the Lieb-Liniger System and Momentum Distributions of Trapped One-Dimensional Atomic Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 91 (9), p. 090401.
- OLSHANII, Maxim & Ludovic PRICOUPENKO (2001), « Rigorous Approach to the Problem of Ultraviolet Divergencies in Dilute Bose Gases », in *Phys. Rev. Lett.* 88 (1), p. 010402.
- PAPP, SB, JM PINO, RJ WILD, S RONEN, Carl E WIEMAN, Deborah S JIN & Eric A CORNELL (2008), « Bragg spectroscopy of a strongly interacting  $^85\text{Rb}$  Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* 101.13, p. 135301.
- PARTRIDGE, G. B., K. E. STRECKER, R. I. KAMAR, M. W. JACK & R. G. HULET (2005), « Molecular Probe of Pairing in the BEC-BCS Crossover », in *Phys. Rev. Lett.* 95 (2), p. 020404.
- PETHICK, Christopher & Henrik SMITH (2008), *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2nd ed, Cambridge; New York : Cambridge University Press.
- PETROV, D. S. (jan. 2003), « Three-body problem in Fermi gases with short-range interparticle interaction », in *Physical Review A* 67.1, p. 010703.
- (2004), « Three-Boson Problem near a Narrow Feshbach Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* 93, p. 143201.
- PETROV, D. S., C. SALOMON & G. V. SHLYAPNIKOV (2004), « Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms », in *Phys. Rev. Lett.* 93 (9), p. 090404.

- PETROV, DS (2015), « Quantum mechanical stabilization of a collapsing Bose-Bose mixture », in *Physical Review Letters* 115.15, p. 155302.
- PEZZÈ, Luca, Augusto SMERZI, Markus K. OBERTHALER, Roman SCHMIED & Philipp TREUTLEIN (2018), « Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles », in *Rev. Mod. Phys.* 90 (3), p. 035005.
- PIERI, Pierbiagio, Andrea PERALI & Giancarlo Calvanese STRINATI (2009), « Enhanced paraconductivity-like fluctuations in the radiofrequency spectra of ultracold Fermi atoms », in *Nature Physics* 5.10, p. 736-740.
- PITAEVSKII, L. & S. STRINGARI (2016), *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, 2nd edition, Oxford : Oxford University Press.
- PITAEVSKII, L. P. & A. ROSCH (1997), « Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions », in *Phys. Rev. A* 55, R853.
- PRICOUPENKO, Ludovic (2006), « Modeling Interactions for Resonant  $p$ -Wave Scattering », in *Phys. Rev. Lett.* 96 (5), p. 050401.
- PROKOF'EV, N. V. & B. V. SVISTUNOV (2002), « Two-dimensional weakly interacting Bose gas in the fluctuation region », in *Phys. Rev. A* 66, p. 043608.
- PU, H. & P. MEYSTRE (2000), « Creating Macroscopic Atomic Einstein-Podolsky-Rosen States from Bose-Einstein Condensates », in *Phys. Rev. Lett.* 85 (19), p. 3987-3990.
- PUNK, M & W ZWERGER (2007), « Theory of rf-spectroscopy of strongly interacting fermions », in *Physical review letters* 99.17, p. 170404.
- RAKSHIT, D., K. M. DAILY & D. BLUME (2012), « Natural and unnatural parity states of small trapped equal-mass two-component Fermi gases at unitarity and fourth-order virial coefficient », in *Phys. Rev. A* 85 (3), p. 033634.
- REM, B. S., A. T. GRIER, I. FERRIER-BARBUT, U. EISMANN, T. LANGEN et al. (2013), « Lifetime of the Bose Gas with Resonant Interactions », in *Phys. Rev. Lett.* 110 (16), p. 163202.
- REN, Hai-cang (2004), « The virial expansion of a dilute Bose gas in two dimensions », in *Journal of statistical physics* 114.1-2, p. 481-501.
- RONEN, Shai (2009), « The dispersion relation of a Bose gas in the intermediate-and high-momentum regimes », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* 42.5, p. 055301.
- ROSSI, R., T. OHGOE, K. VAN HOUCKE & F. WERNER (2018), « Resummation of Diagrammatic Series with Zero Convergence Radius for Strongly Correlated Fermions », in *Phys. Rev. Lett.* 121 (13), p. 130405.
- RUPAK, Gautam (2007), « Universality in a 2-Component Fermi System at Finite Temperature », in *Phys. Rev. Lett.* 98 (9), p. 090403.
- SADLER, LE, JM HIGBIE, SR LESLIE, M VENGALATTORE & DM STAMPER-KURN (2006), « Spontaneous symmetry breaking in a quenched ferromagnetic spinor Bose-Einstein condensate », in *Nature* 443.7109, p. 312-315.
- SAGI, Yoav, Tara E DRAKE, Rabin PAUDEL & Deborah S JIN (2012), « Measurement of the homogeneous contact of a unitary Fermi gas », in *Physical review letters* 109.22, p. 220402.
- SCHMITT, Matthias, Matthias WENZEL, Fabian BÖTTCHER, Igor FERRIER-BARBUT & Tilman PFAU (2016), « Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid », in *Nature* 539.7628, p. 259-262.
- SEMEGHINI, G, G FERIOLI, L MASI, C MAZZINGHI, L WOLSWIJK, F MINARDI, M MODUGNO, G MODUGNO, M INGUSCIO & M FATTORI (2018), « Self-bound quantum droplets of atomic mixtures in free space », in *Physical review letters* 120.23, p. 235301.
- SHI, Hao, Simone CHIESA & Shiwei ZHANG (2015), « Ground-state properties of strongly interacting Fermi gases in two dimensions », in *Phys. Rev. A* 92 (3), p. 033603.
- SMITH, D. Hudson, Eric BRAATEN, Daekyoung KANG & Lucas PLATTER (2014), « Two-Body and Three-Body Contacts for Identical Bosons near Unitarity », in *Phys. Rev. Lett.* 112 (11), p. 110402.
- SOKOL, P.E. (1995), « Bose-Einstein Condensation », in , sous la dir. d'A. GRIFFIN, D. W. SNOKE & S. STRINGARI, Cambridge University Press, chap. 4. Bose-Einstein condensation in liquid helium.
- SPIEGELHALDER, F. M., A. TRENKWALDER, D. NAIK, G. HENDL, F. SCHRECK & R. GRIMM (2009a), « Collisional Stability of  $^{40}\text{K}$  Immersed in a Strongly Interacting Fermi Gas of  $^6\text{Li}$  », in *Phys. Rev. Lett.* 103 (22), p. 223203.
- (2009b), « Collisional Stability of  $^{40}\text{K}$  Immersed in a Strongly Interacting Fermi Gas of  $^6\text{Li}$  », in *Phys. Rev. Lett.* 103 (22), p. 223203.
- STEINHAEUER, J., R. OZERI, N. KATZ & N. DAVIDSON (2002), « Excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate », in *Phys. Phys. Lett.* 88.12, p. 120407.
- STEWART, JT, JP GAEBLER, TE DRAKE & DS JIN (2010), « Verification of universal relations in a strongly interacting Fermi gas », in *Physical Review Letters* 104.23, p. 235301.
- STRINGARI, S (2004), « Collective oscillations of a trapped superfluid Fermi gas near a Feshbach resonance », in *EPL (Europhysics Letters)* 65.6, p. 749.

- SYKES, AG, JP CORSON, JP D'INCAO, AP KOLLER, CH GREENE, Ana Maria REY, KRA HAZZARD & JL BOHN (2014), « Quenching to unitarity : Quantum dynamics in a three-dimensional Bose gas », in *Physical Review A* 89.2, p. 021601.
- TAN, Shina (2008a), « Energetics of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* 323.12, p. 2952-2970.
- (2008b), « Generalized virial theorem and pressure relation for a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* 323.12, p. 2987-2990.
- (2008c), « Large momentum part of a strongly correlated Fermi gas », in *Annals of Physics* 323.12, p. 2971-2986.
- (2008d), « Three-boson problem at low energy and implications for dilute Bose-Einstein condensates », in *Phys. Rev. A* 78 (1), p. 013636.
- TANZI, Luca, Eleonora LUCIONI, Francesca FAMÀ, Jacopo CATANI, Andrea FIORETTI, Carlo GABBANINI, Russell N BISSET, Luis SANTOS & Giovanni MODUGNO (2019), « Observation of a dipolar quantum gas with metastable supersolid properties », in *Physical review letters* 122.13, p. 130405.
- TENART, Antoine, Gaétan HERCÉ, Jan-Philipp BUREIK, Alexandre DAREAU & David CLÉMENT (2021), « Observation of pairs of atoms at opposite momenta in an equilibrium interacting Bose gas », in *Nature Physics*, p. 1-5.
- TIMMERMANS, Eddy (1998), « Phase separation of Bose-Einstein condensates », in *Phys. Phys. Lett.* 81.26, p. 5718.
- UHLENBECK, George E & Erich BETH (1936), « The quantum theory of the non-ideal gas I. Deviations from the classical theory », in *Physica* 3.8, p. 729-745.
- WALLS, D. F. & G. J. MILBURN (1988), *Quantum optics*, Berlin : Springer-Verlag.
- WALLS, Daniel F & Gerard J MILBURN (2007), *Quantum optics*, Springer Science & Business Media.
- WERNER, F., L. TARRUELL & Y. CASTIN (avr. 2009), « Number of closed-channel molecules in the BEC-BCS crossover »en, in *The European Physical Journal B* 68.3, p. 401-415.
- WERNER, Félix (août 2008), « Virial theorems for trapped cold atoms »en, in *Physical Review A* 78.2, p. 025601.
- WERNER, Félix & Yvan CASTIN (2006), « Unitary Quantum Three-Body Problem in a Harmonic Trap », in *Phys. Rev. Lett.* 97 (15), p. 150401.
- WERNER, Félix & Yvan CASTIN (nov. 2012a), « General relations for quantum gases in two and three dimensions. II. Bosons and mixtures », in *Physical Review A* 86.5, p. 053633.
- (juill. 2012b), « General relations for quantum gases in two and three dimensions : Two-component fermions »en, in *Physical Review A* 86.1, p. 013626.
- WILD, RJ, P MAKOTYN, JM PINO, EA CORNELL & DS JIN (2012), « Measurements of Tan's contact in an atomic Bose-Einstein condensate », in *Physical review letters* 108.14, p. 145305.
- WU, Tai Tsun (1959), « Ground State of a Bose System of Hard Spheres », in *Phys. Rev.* 115 (6), p. 1390-1404.
- XU, K., Y. LIU, D. E. MILLER, J. K. CHIN, W. SETIAWAN & W. KETTERLE (2006), « Observation of Strong Quantum Depletion in a Gaseous Bose-Einstein Condensate », in *Phys. Rev. Lett.* 96 (18), p. 180405.
- YAN, Yangqian & D. BLUME (2016), « Path-Integral Monte Carlo Determination of the Fourth-Order Virial Coefficient for a Unitary Two-Component Fermi Gas with Zero-Range Interactions », in *Phys. Rev. Lett.* 116 (23), p. 230401.
- YIN, XY & D BLUME (2015), « Trapped unitary two-component Fermi gases with up to ten particles », in *Physical Review A* 92.1, p. 013608.
- YOSHIDA, Shuhei M. & Masahito UEDA (2015), « Universal High-Momentum Asymptote and Thermodynamic Relations in a Spinless Fermi Gas with a Resonant  $p$ -Wave Interaction », in *Phys. Rev. Lett.* 115 (13), p. 135303.
- YU, Z. & G. BAYM (2006), « Spin-correlation functions in ultracold paired atomic-fermion systems : Sum rules, self-consistent approximations, and mean fields », in *Phys. Rev. A* 73 (6), p. 063601.
- YU, Zhenhua, Georg M. BRUUN & Gordon BAYM (2009), « Short-range correlations and entropy in ultracold-atom Fermi gases », in *Phys. Rev. A* 80 (2), p. 023615.
- YU, Zhenhua, Joseph H. THYWISSEN & Shizhong ZHANG (2015), « Universal Relations for a Fermi Gas Close to a  $p$ -Wave Interaction Resonance », in *Phys. Rev. Lett.* 115 (13), p. 135304.
- (2016), « Erratum : Universal Relations for a Fermi Gas Close to a  $p$ -Wave Interaction Resonance [Phys. Rev. Lett. 115, 135304 (2015)] », in *Phys. Rev. Lett.* 117 (1), p. 019901.
- ZHANG, Shizhong & Anthony J. LEGGETT (2009), « Universal properties of the ultracold Fermi gas », in *Phys. Rev. A* 79 (2), p. 023601.

ZOU, Y-Q, B BAKKALI-HASSANI, C MAURY, É LE CERF, S NASCIMBENE, J DALIBARD & J BEUGNON (2021), « Tan's two-body contact across the superfluid transition of a planar Bose gas », in *Nature communications* 12.1, p. 1-6.

ZWERGER, Wilhelm, éd. (2012), *The BCS-BEC crossover and the unitary fermi gasen*, Lecture notes in physics 836, OCLC : 844865150, Heidelberg : Springer.