

Chaire *Atomes et rayonnement*

Cours 2022-23

Jean Dalibard



COLLÈGE
DE FRANCE
— 1530 —

Prochains séminaires

Vendredi 10 mars : *États comprimés de spin pour la métrologie*

Alice SINATRA, Laboratoire Kastler Brossel, Sorbonne Université, ENS, Collège de France, CNRS, Paris

Vendredi 17 mars : *Quantum Networks of the First Kind*

Gerhard REMPE, Max-Planck Institute of Quantum Optics, Garching, Allemagne

Vendredi 24 mars : *Émulation du modèle de Hubbard étendu aux interactions à longue portée*

François DUBIN, Centre de Recherche sur l'Hétéro-Epitaxie et ses Applications, CNRS, Sophia-Antipolis

<http://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index.html>

Forces à longue portée dans les gaz quantiques :

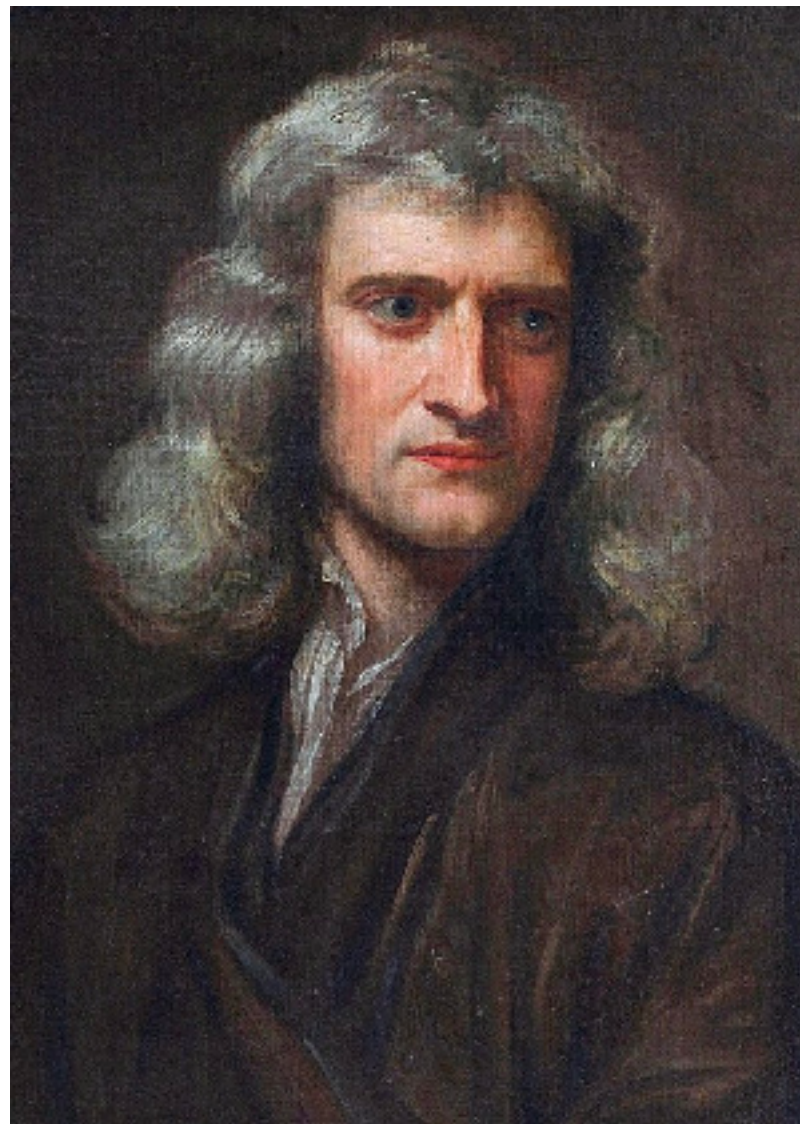
le problème à trois corps et l'effet Efimov

Jean Dalibard
Chaire Atomes et rayonnement
Année 2022-23



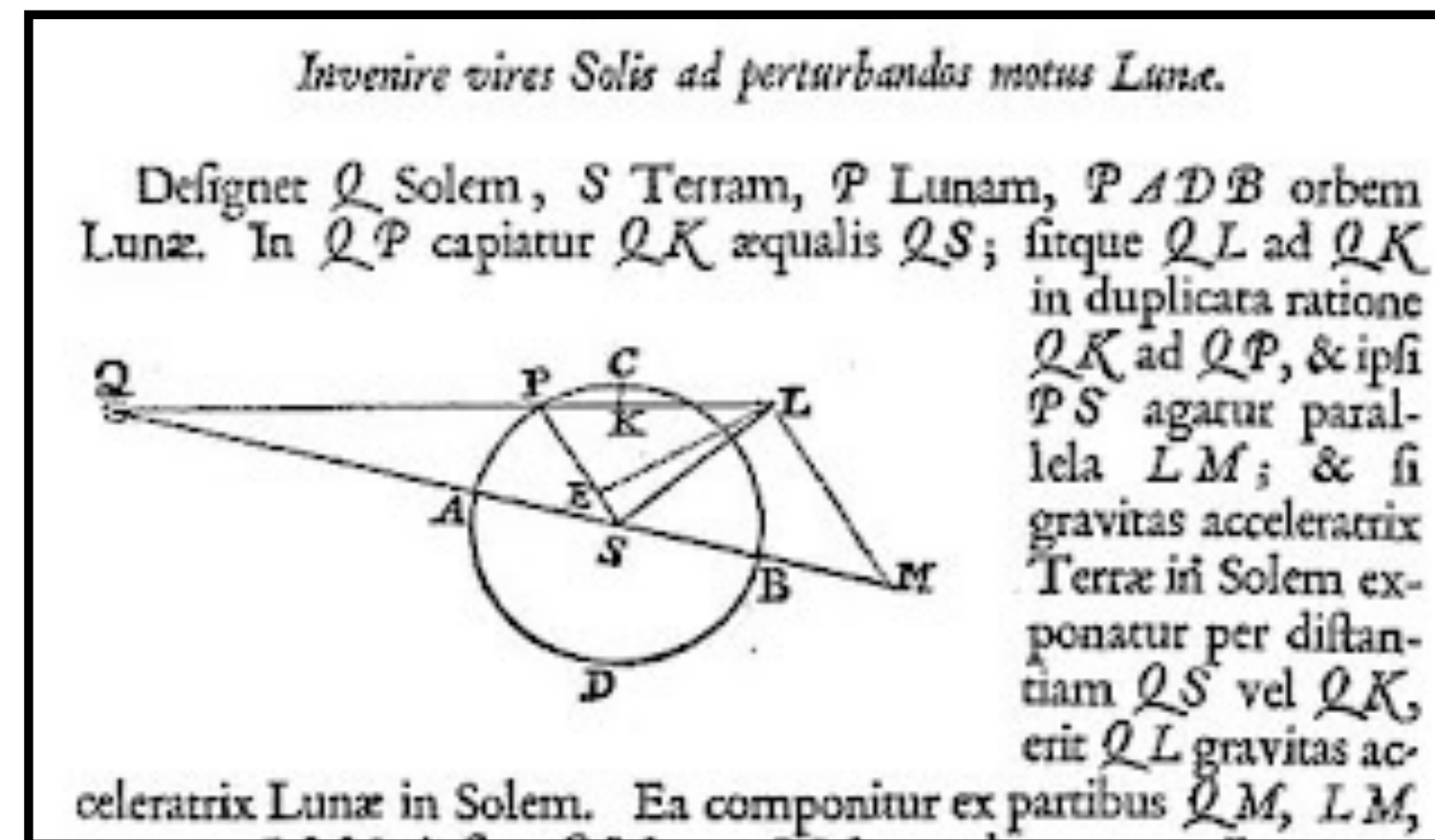
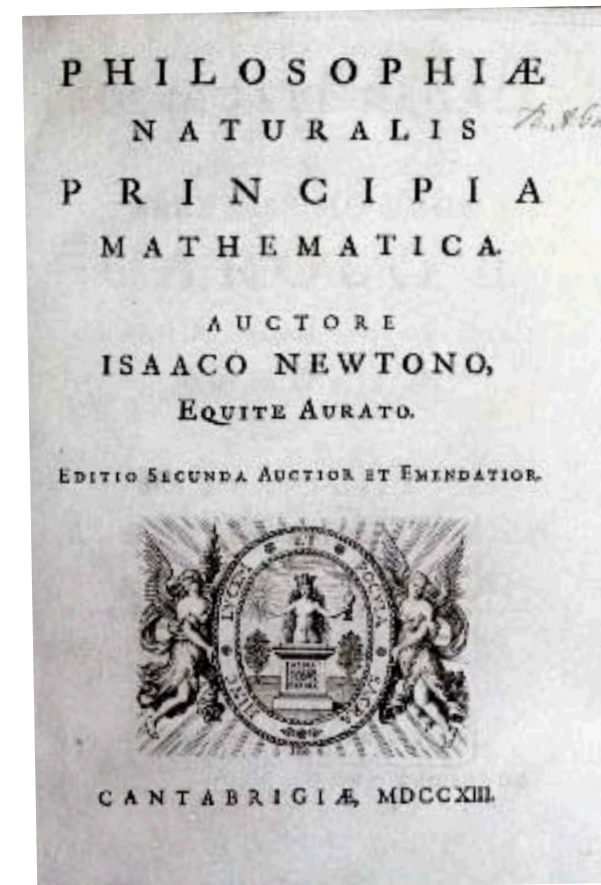
COLLÈGE
DE FRANCE
—1530—

Le problème à trois corps



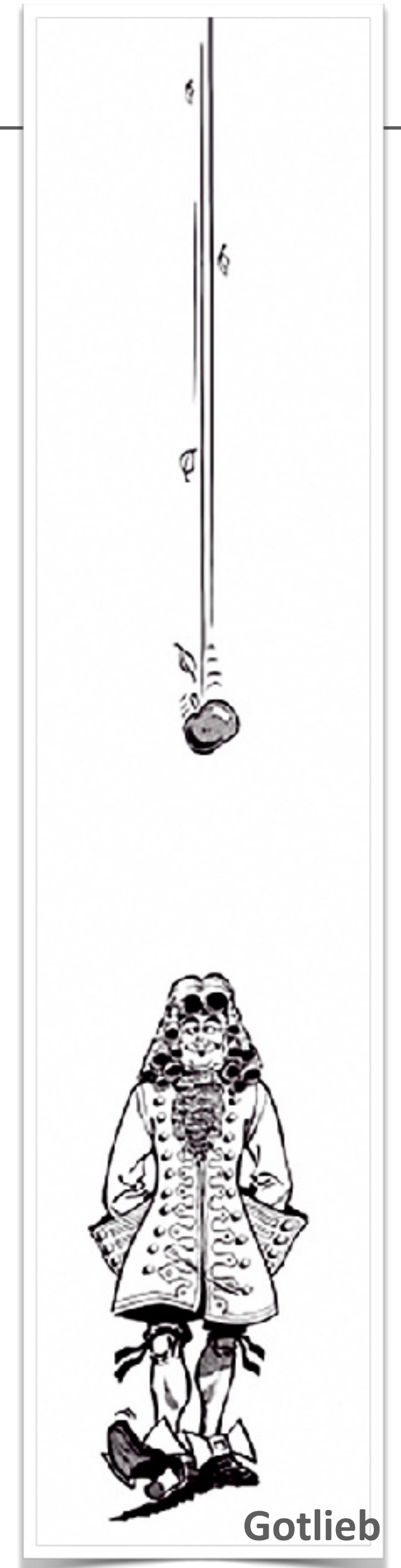
Newton, 1642-1727

...his head never ached but with his studies on the moon ...

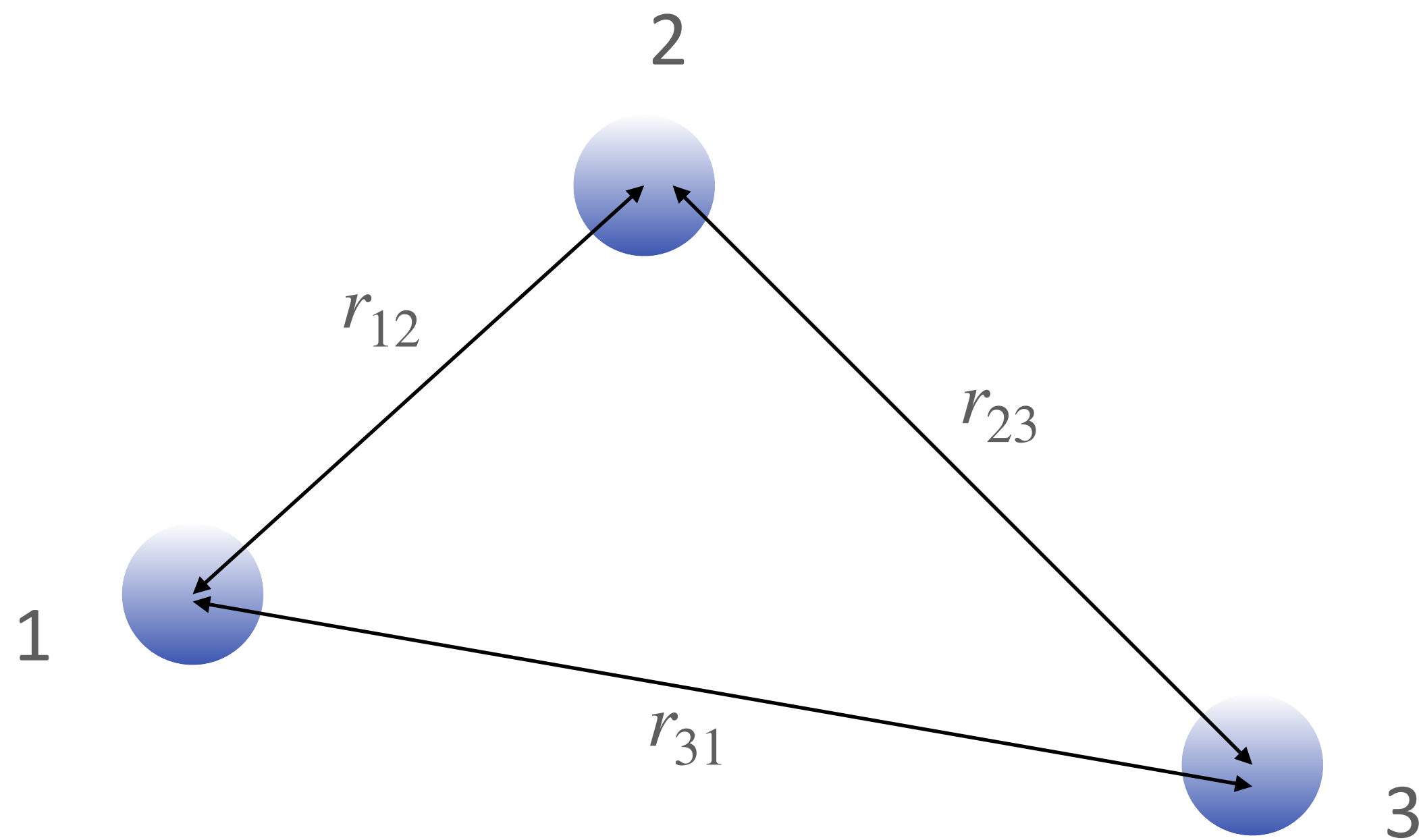


$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} \right)$$

Euler, d'Alembert, Clairault, Lagrange, Laplace, Poisson, Jacobi, Cauchy, Poincaré,...



Notre terrain de jeu pour ce cours



Ces trois particules interagissent par un potentiel binaire à courte portée :

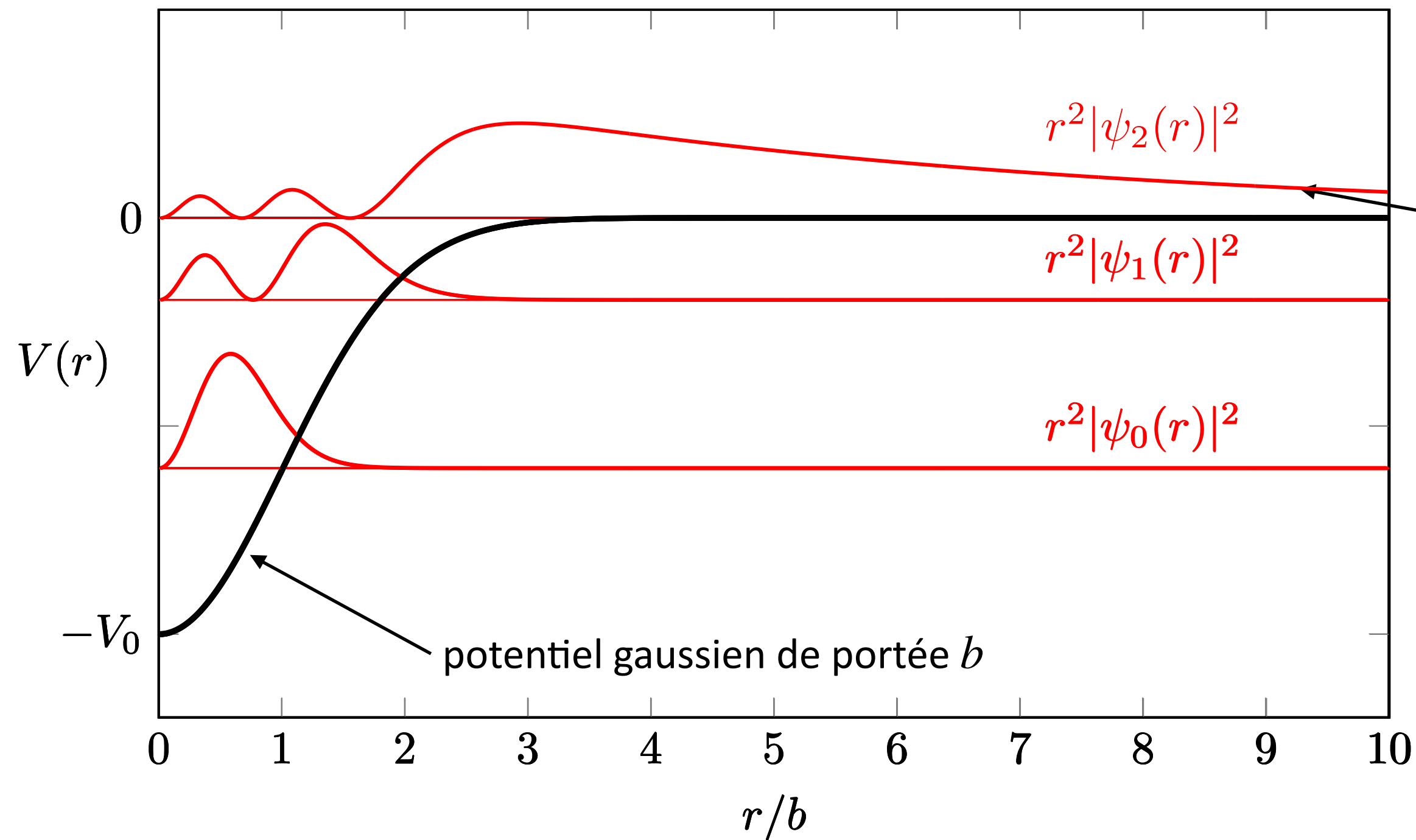
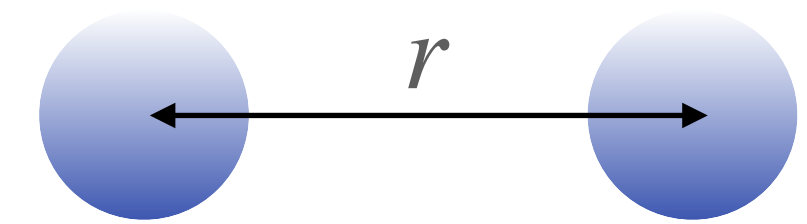
$$b \ll r_{ij}$$

(presque) assimilable à un potentiel de contact :

$$V_{ij} = g \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

a priori très différent du potentiel gravitationnel en $1/r_{ij}$ (longue portée)

Interaction binaire résonnante



Résonance :
un état lié est sur le point d'apparaître
ou il vient juste d'apparaître

Son extension est alors $\gg b$

Interaction binaire
à courte portée,
mais résonnante



Interaction effective
à trois corps à longue portée :

$$V(R) \propto \frac{1}{R^2}$$

propriété
"émergente"

$$R : \text{hyperrayon} \propto (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)^{1/2}$$

Le problème à trois corps quantique

Précurseur : L.H. Thomas (1935)

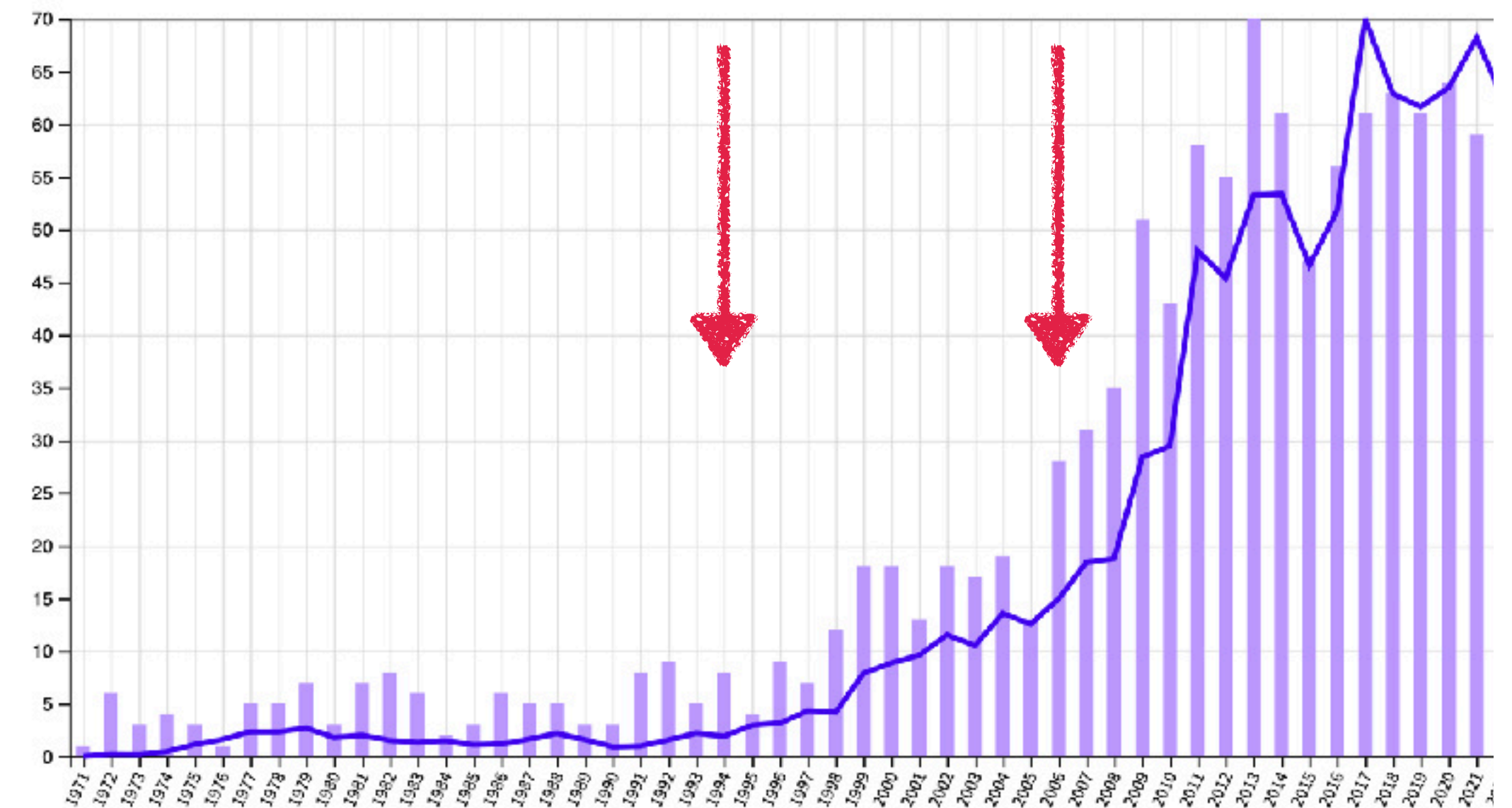
Qu'est-ce qui lie le noyau de tritium (p-n-n) ?

Etape clé : Vitaly Efimov (1970-73)

Le problème peut être résolu exactement pour une interaction résonnante : résultat "universel"

Application à $\alpha + \alpha + \alpha \leftrightarrow {}^{12}\text{C}^$?*

citations annuelles de Efimov (1970)



1994-2015 : expériences sur le trimère d'hélium

2006-2023 : expériences sur les gaz d'atomes froids : ${}^{133}\text{Cs}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^{39}\text{K}$, ${}^{85}\text{Rb}$

La richesse de l'effet Efimov

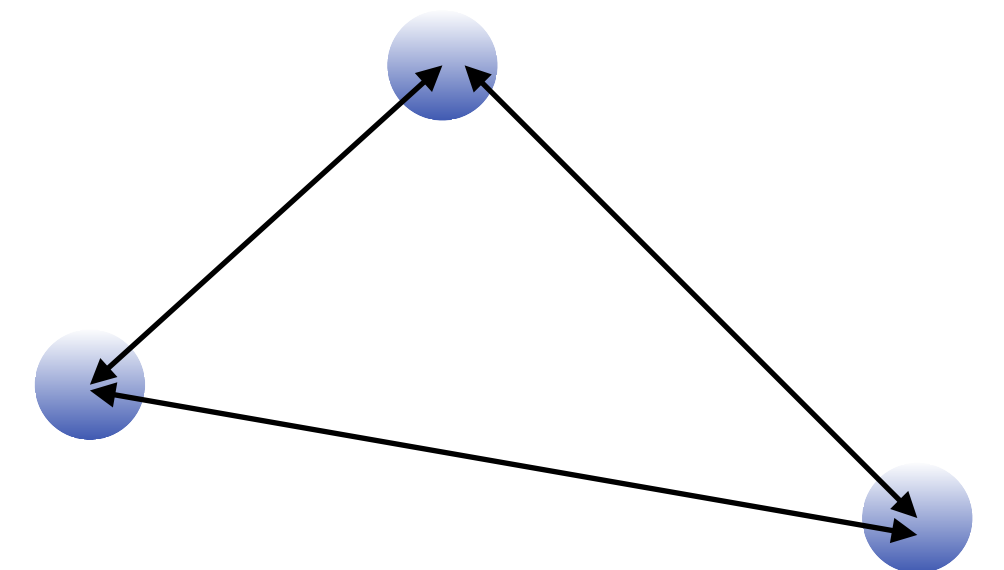
Spécificité du potentiel en $1/R^2$: Invariance d'échelle \implies Universalité

Si on connaît un état $\Psi(\mathbf{R})$ d'énergie E , on en connaît automatiquement (en principe) une infinité d'autres !

Existence d'états "borroméens"



Possibilité de lier les trois particules même si le potentiel binaire n'est pas assez fort pour en lier deux seulement



Cours 1 :

Le potentiel en $1/r^2$ et son invariance d'échelle

Essin & Griffith (2006):

It violates every rule in the book, and discredits all the intuition we are trying to instill in our students

1.

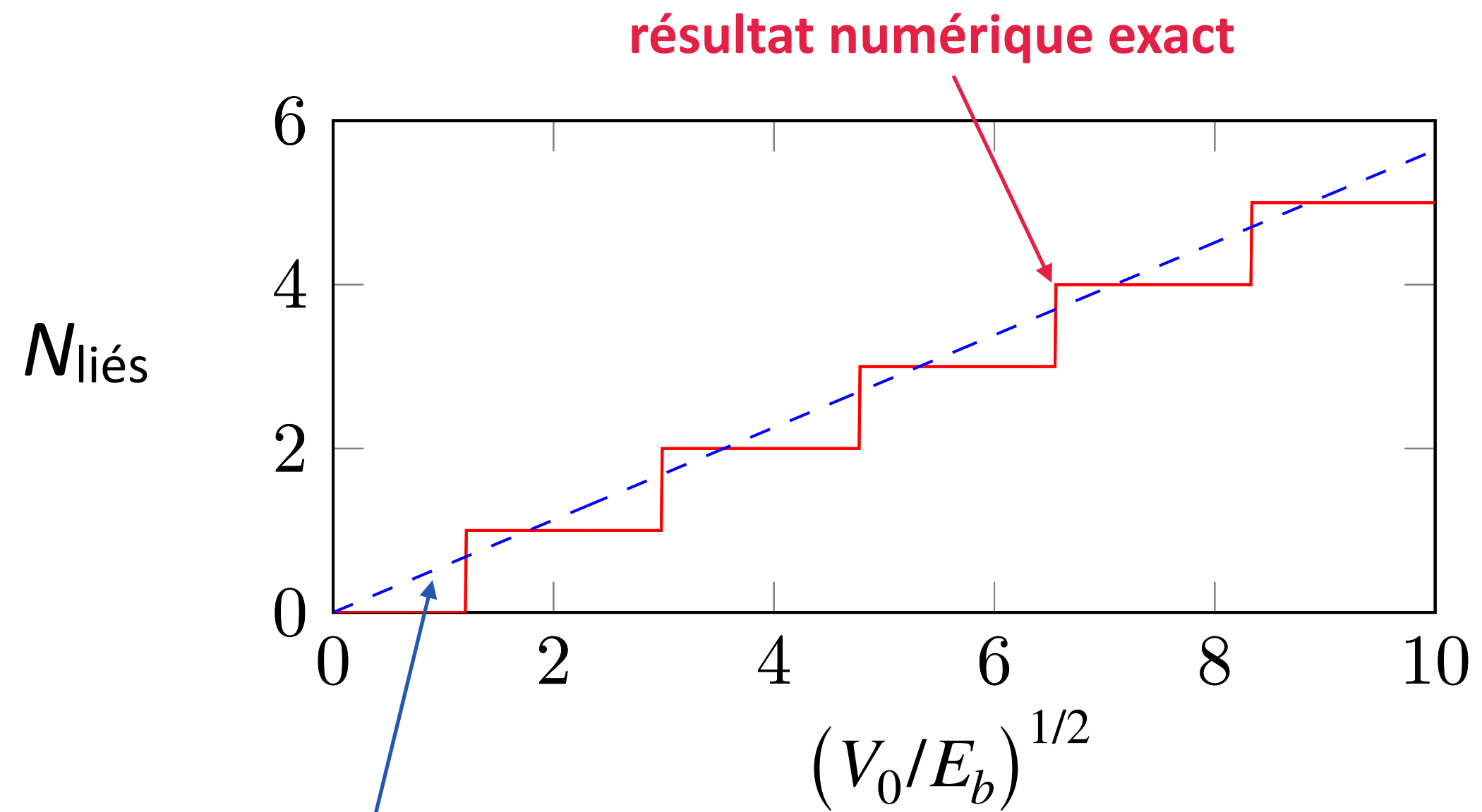
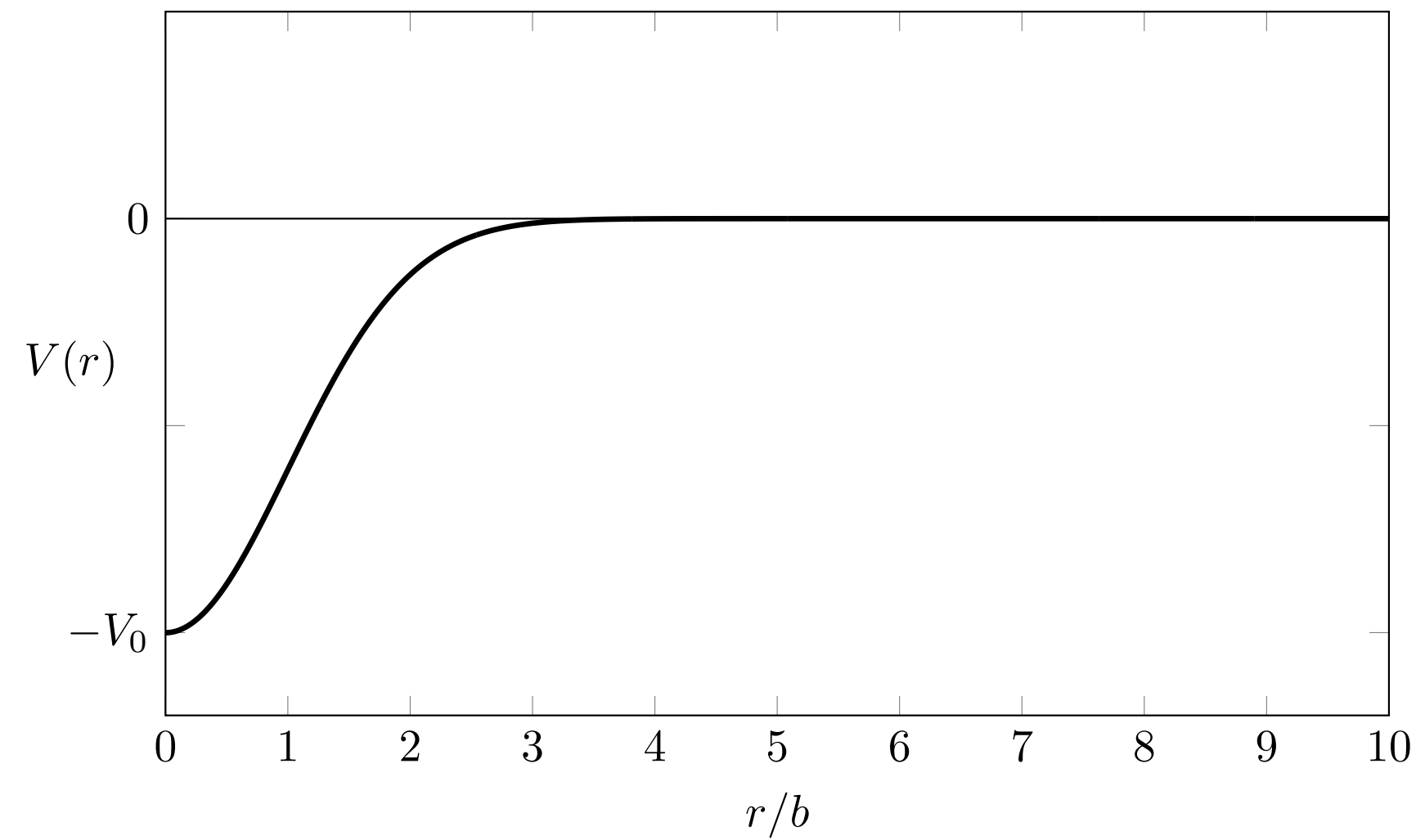
Le problème à deux corps

Le problème à deux corps

- Séparation “centre de masse” + “variable relative”
- Invariance par rotation
- Approximation WKB pour l'énergie des états liés et leur nombre

Estimation du nombre d'états liés

Exemple du puits gaussien de portée b : $V(r) = -V_0 \exp(-r^2/2b^2)$



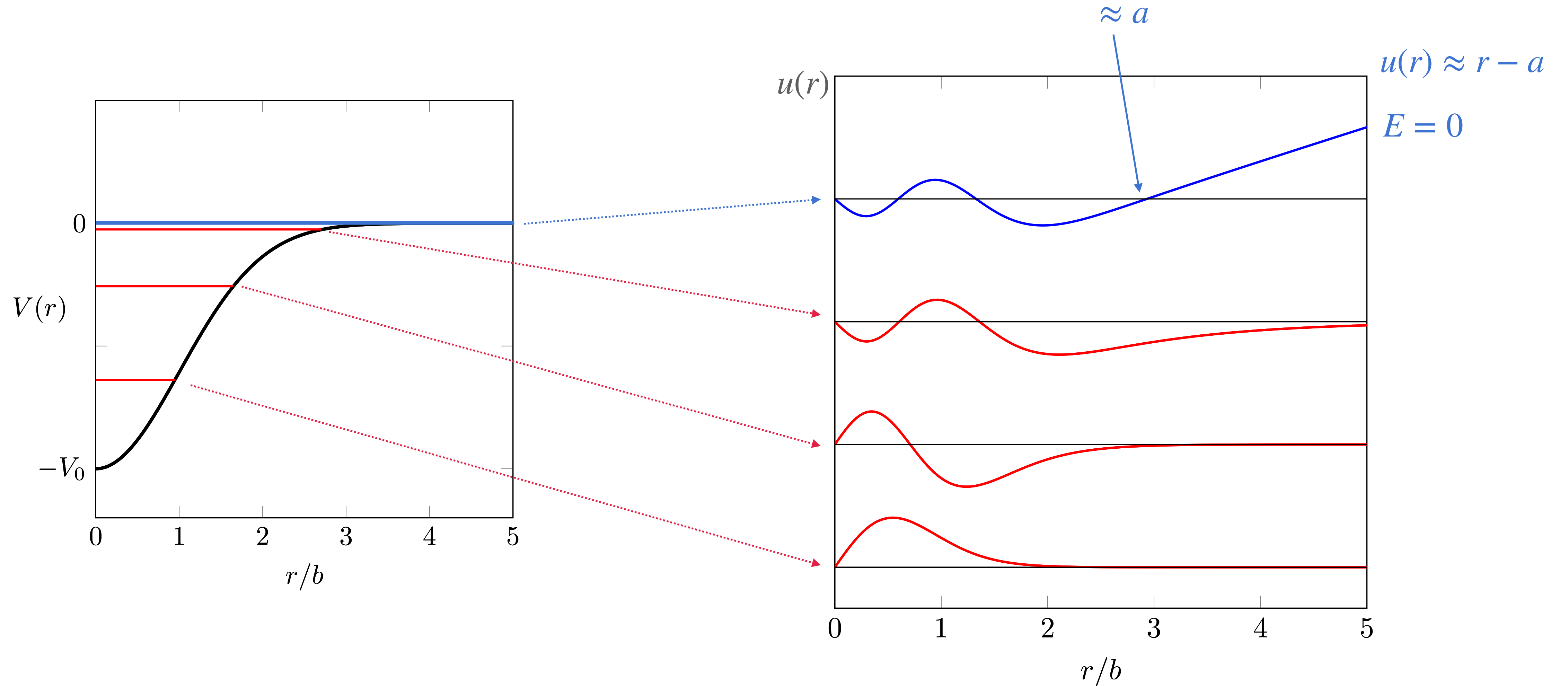
résultat semi-classique $\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} k_{E=0}(r) dr$

$$E_b = \frac{\hbar^2}{mb^2}$$

Solution d'énergie nulle et longueur de diffusion

$$r \gg b : \quad \psi(r) \propto \frac{1}{r} - \frac{1}{a}$$

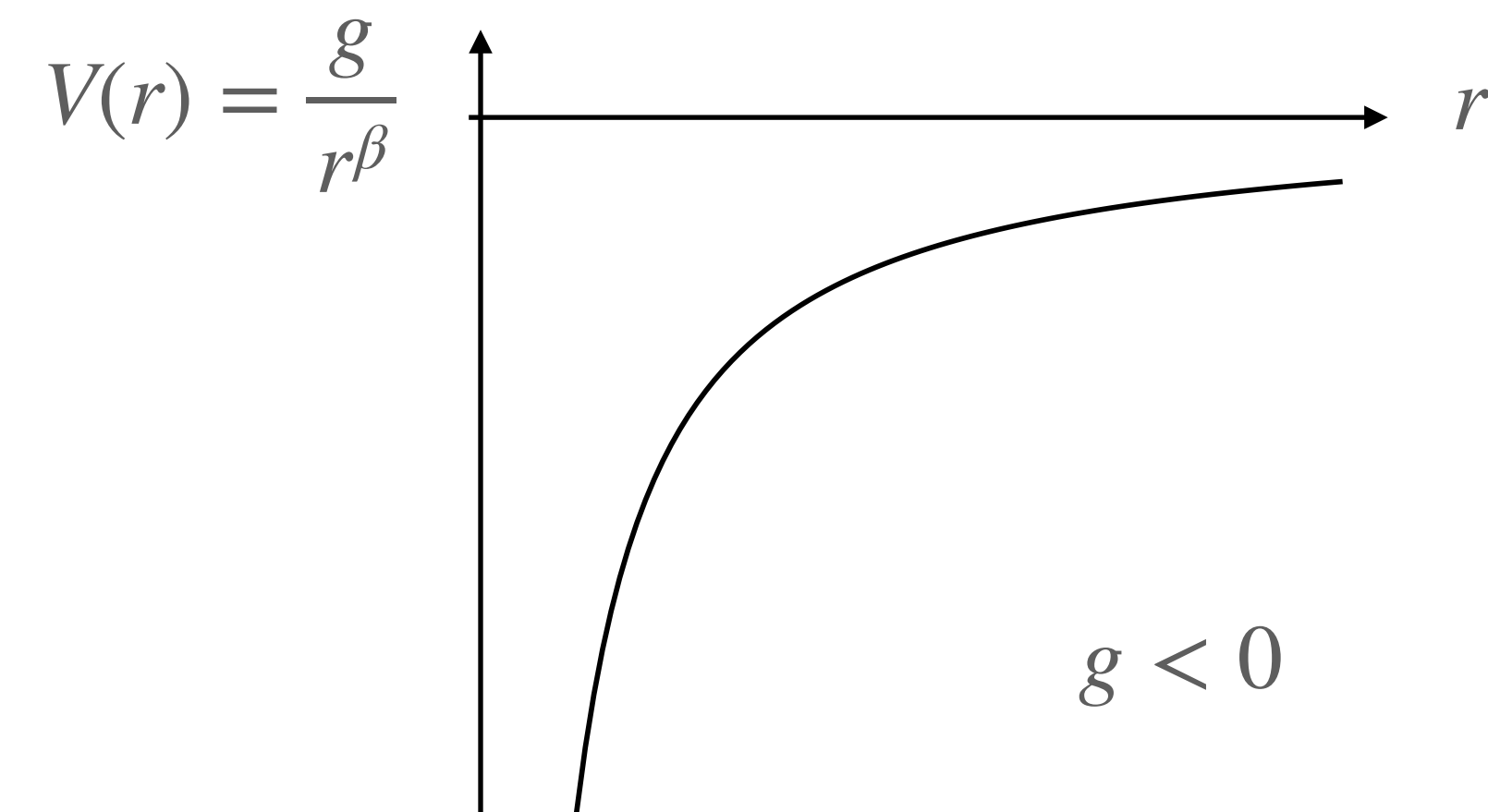
Solution d'énergie nulle : un exemple



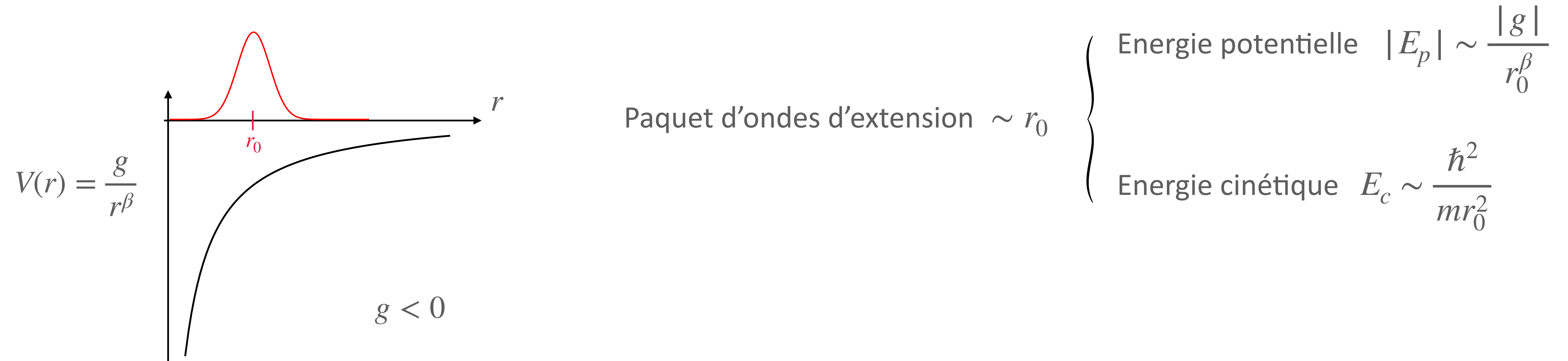
Sturm-Liouville : le nombre de nœuds de la solution $E = 0$ donne le nombre d'états liés ($E < 0$)

2.

Les potentiels en loi de puissance



Une échelle naturelle de longueur pour $V(r) = \frac{g}{r^\beta}$



Les deux énergies sont comparables pour $r_* = \left(\frac{m |g|}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{\beta-2}}$

Cette échelle de longueur émerge naturellement pour tout exposant β , sauf pour $\beta = 2$

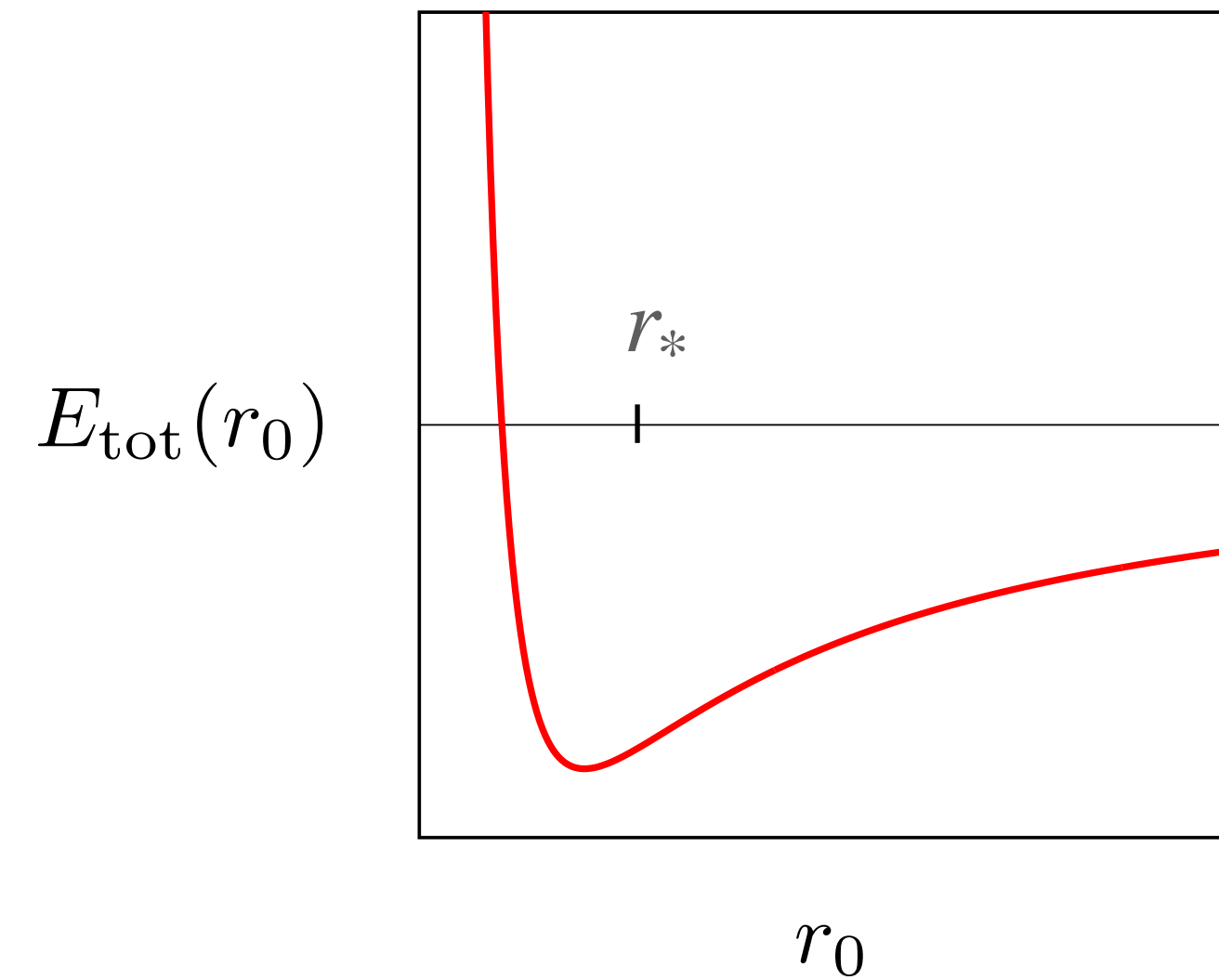
... première manifestation de l'invariance d'échelle de $V(r) = g/r^2$

Minimisation de l'énergie dans $V(r) = g/r^\beta$

Cas des exposants faibles : $\beta < 2$ (en particulier le potentiel de Coulomb avec $\beta = 1$, $g = -e^2$)

$$E_p \sim -\frac{|g|}{r_0^\beta}$$

$$E_c \sim \frac{\hbar^2}{mr_0^2}$$



$$r_* = \left(\frac{m|g|}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{\beta-2}}$$

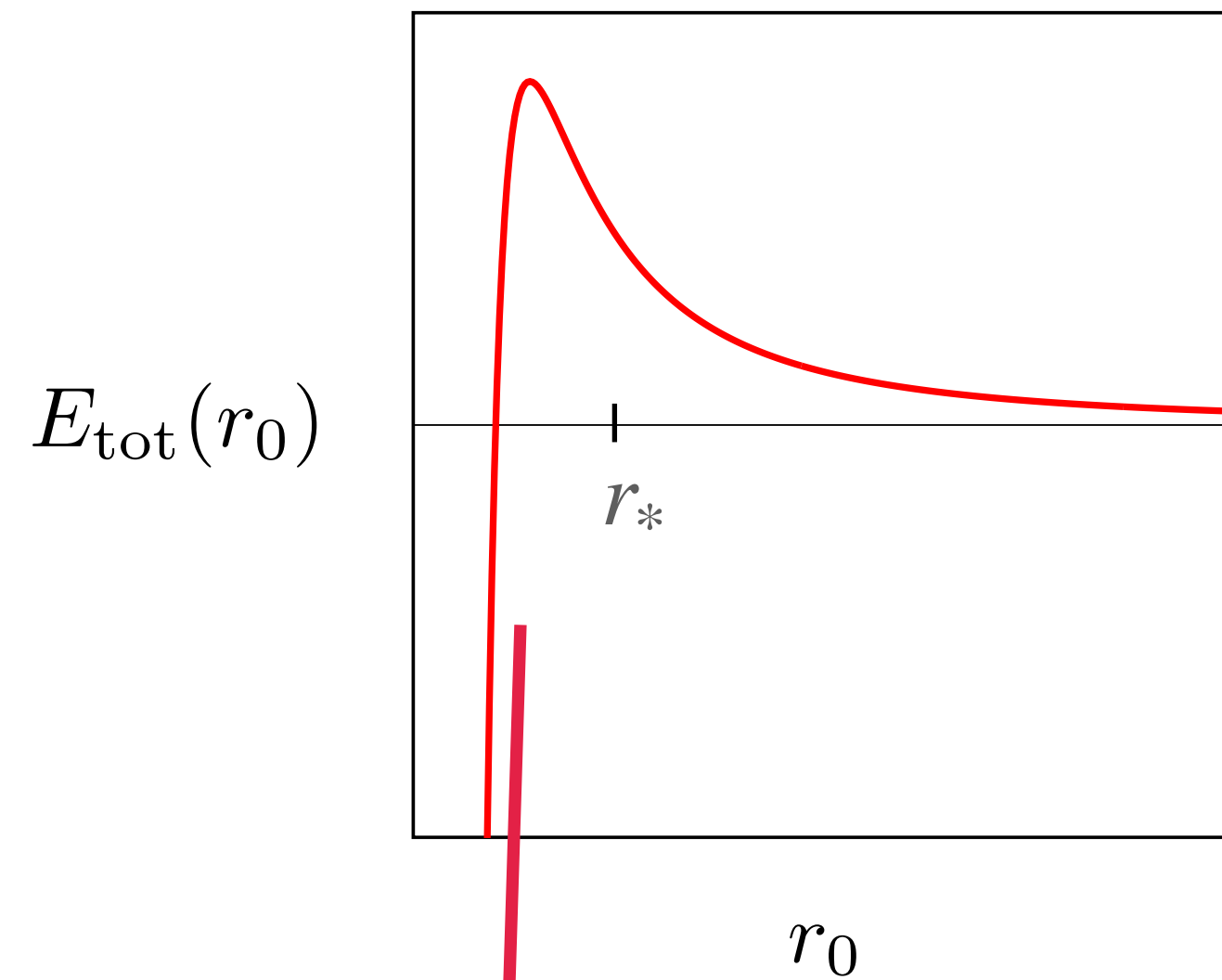
Il existe un état fondamental pour l'hamiltonien, avec une extension $\sim r_*$

Minimisation de l'énergie dans $V(r) = g/r^\beta$ (suite)

Cas des exposants élevés : $\beta > 2$ (en particulier le potentiel de van der Waals avec $\beta = 6$, $g = -C_6$)

$$E_p \sim -\frac{|g|}{r_0^\beta}$$

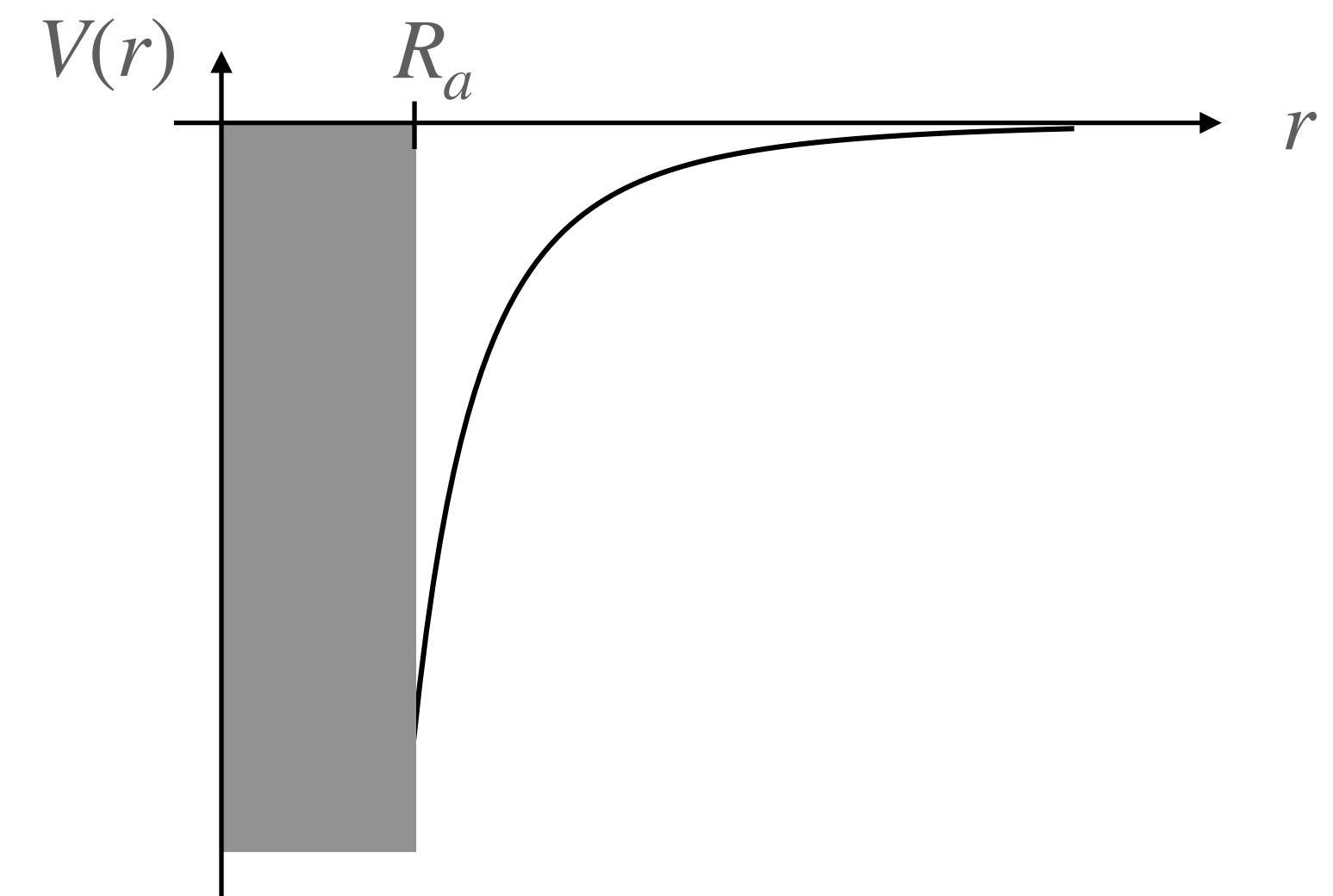
$$E_c \sim \frac{\hbar^2}{mr_0^2}$$



Chute vers
le centre !

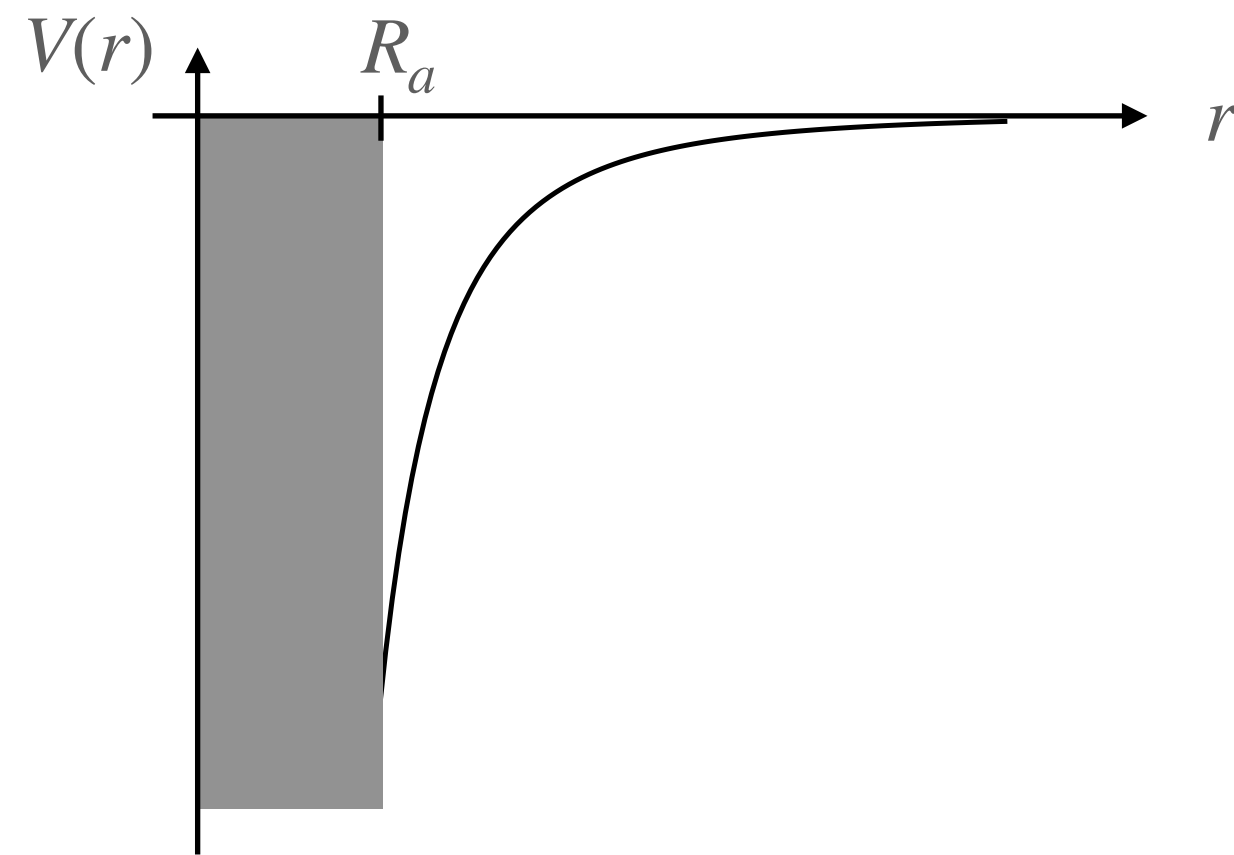
Pas d'état d'équilibre stable !

Il faut régulariser le potentiel
au voisinage de $r = 0$, par
exemple avec un cœur dur



Combien d'états liés dans $V(r) = g/r^\beta$?

avec un cœur dur en R_a si $\beta > 2$



Estimation WKB à partir de l'énergie nulle :

$$N_{\text{lies}} \approx \frac{1}{\pi} \int_{R_a}^{+\infty} k_{E=0}(r) dr \quad \text{avec} \quad \frac{\hbar^2 k^2(r)}{2m} - \frac{|g|}{r^\beta} = 0$$

On doit calculer l'intégrale

$$\int_{R_a}^{+\infty} \frac{dr}{r^{\beta/2}}$$

$\beta < 2$: diverge à l'infini : nombre infini d'états liés

Coulomb: $E_n = E_1/n^2$, n entier positif

$\beta > 2$: converge à l'infini : nombre fini d'états liés

van der Waals, on peut parler du "dernier" état lié

Bilan provisoire pour $V(r) = g/r^\beta$

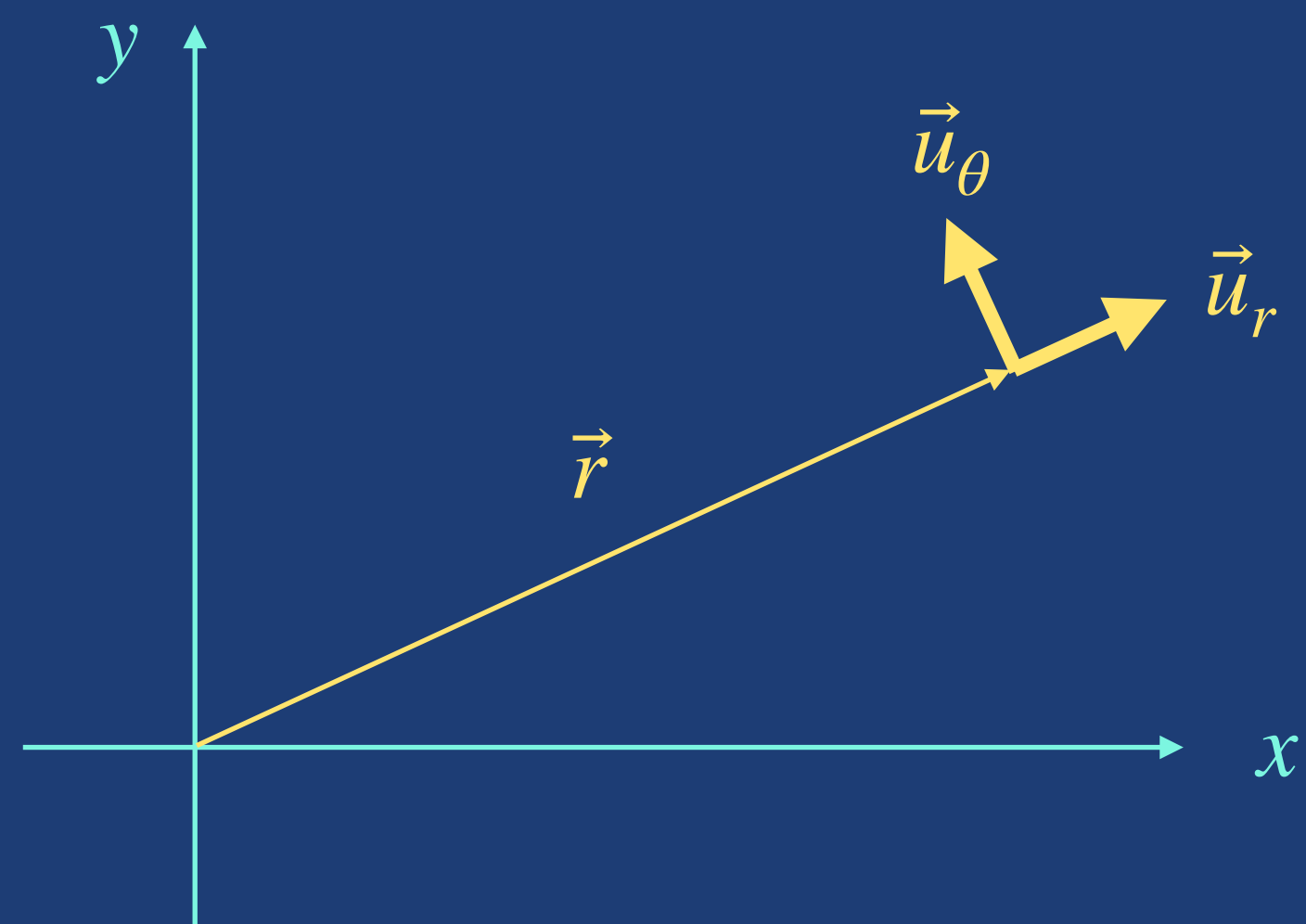
Exposant β	Comportement à l'origine	Nombre d'états liés	Exemple
$\beta < 2$	régulier	infini	Coulombien
$\beta > 2$	non régulier	fini (après régularisation)	van der Waals

Que se passe-t-il pour $\beta = 2$???

3.

Le potentiel en $1/r^2$ en mécanique classique

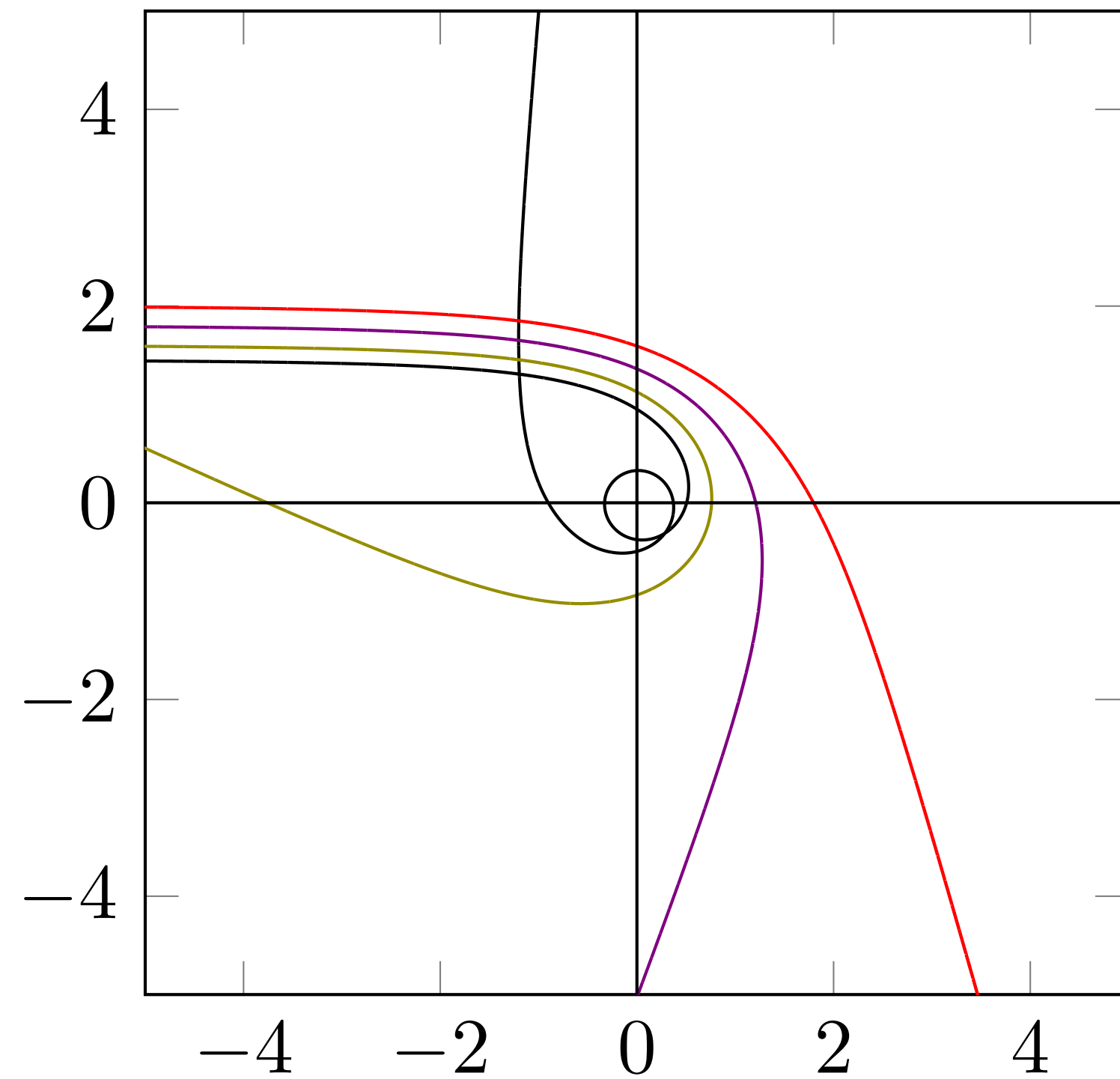
Mouvement classique dans un potentiel central



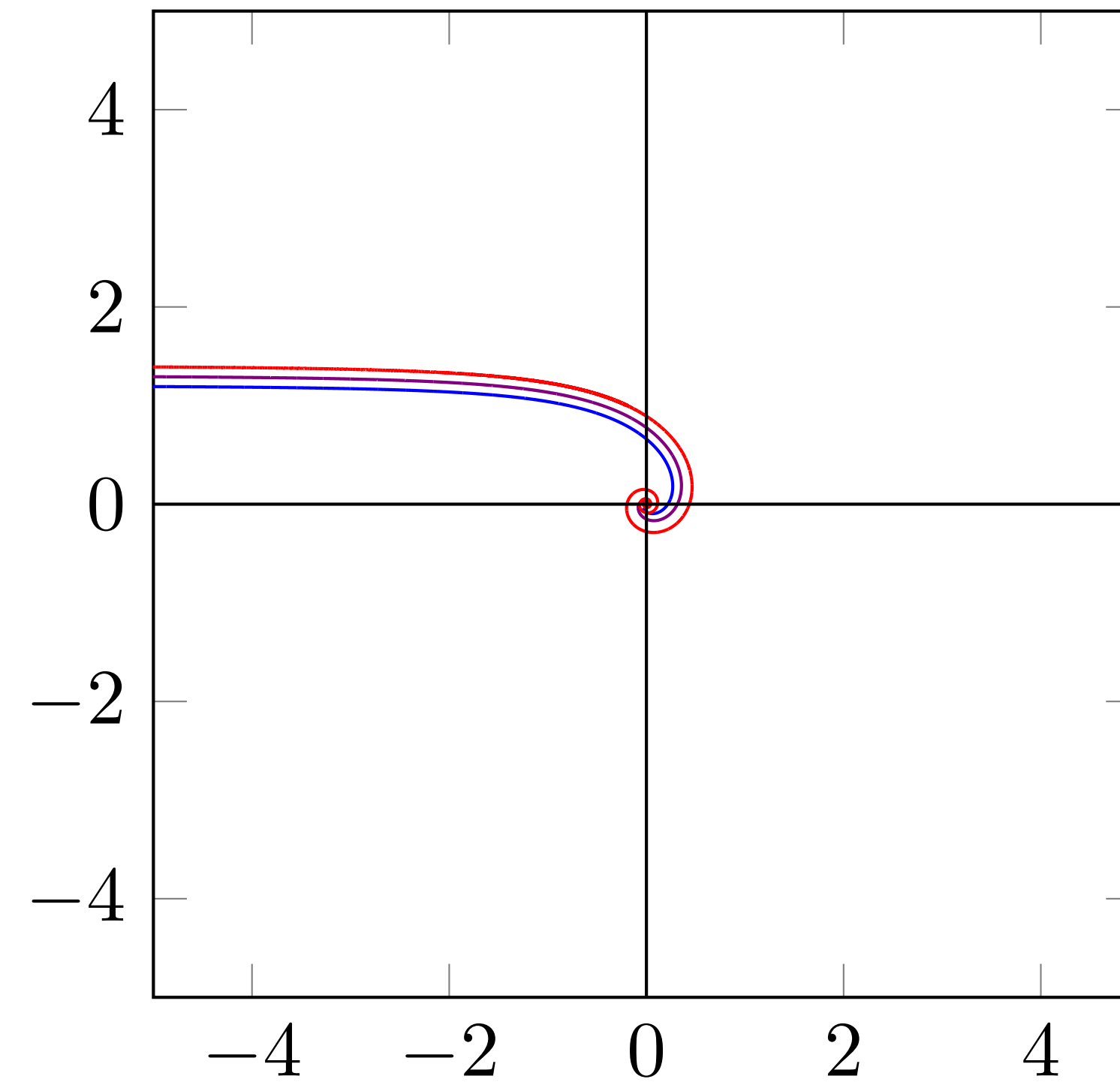
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Exemples de trajectoires dans le potentiel $-|g|/r^2$

Moment cinétique critique : $L_c = \sqrt{2m|g|}$

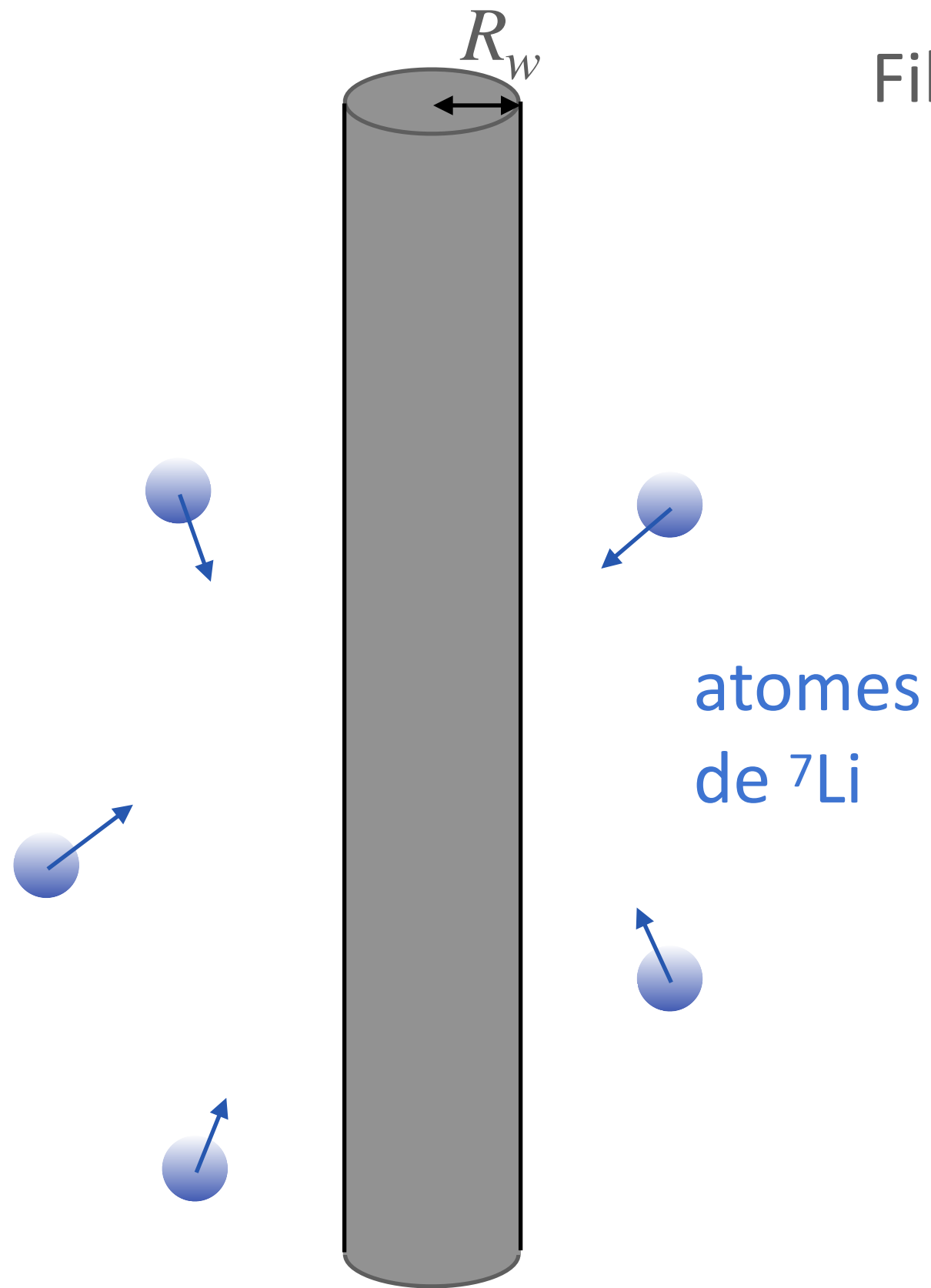


$L/L_c = 1.025, 1.13, 1.27, 1.41$



$L/L_c = 0.85, 0.92, 0.99$

L'expérience de Denschlag et al.



Fil uniformément chargé, avec une charge électrique linéique Λ

champ électrique radial : $\mathcal{E} = \frac{\Lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r$

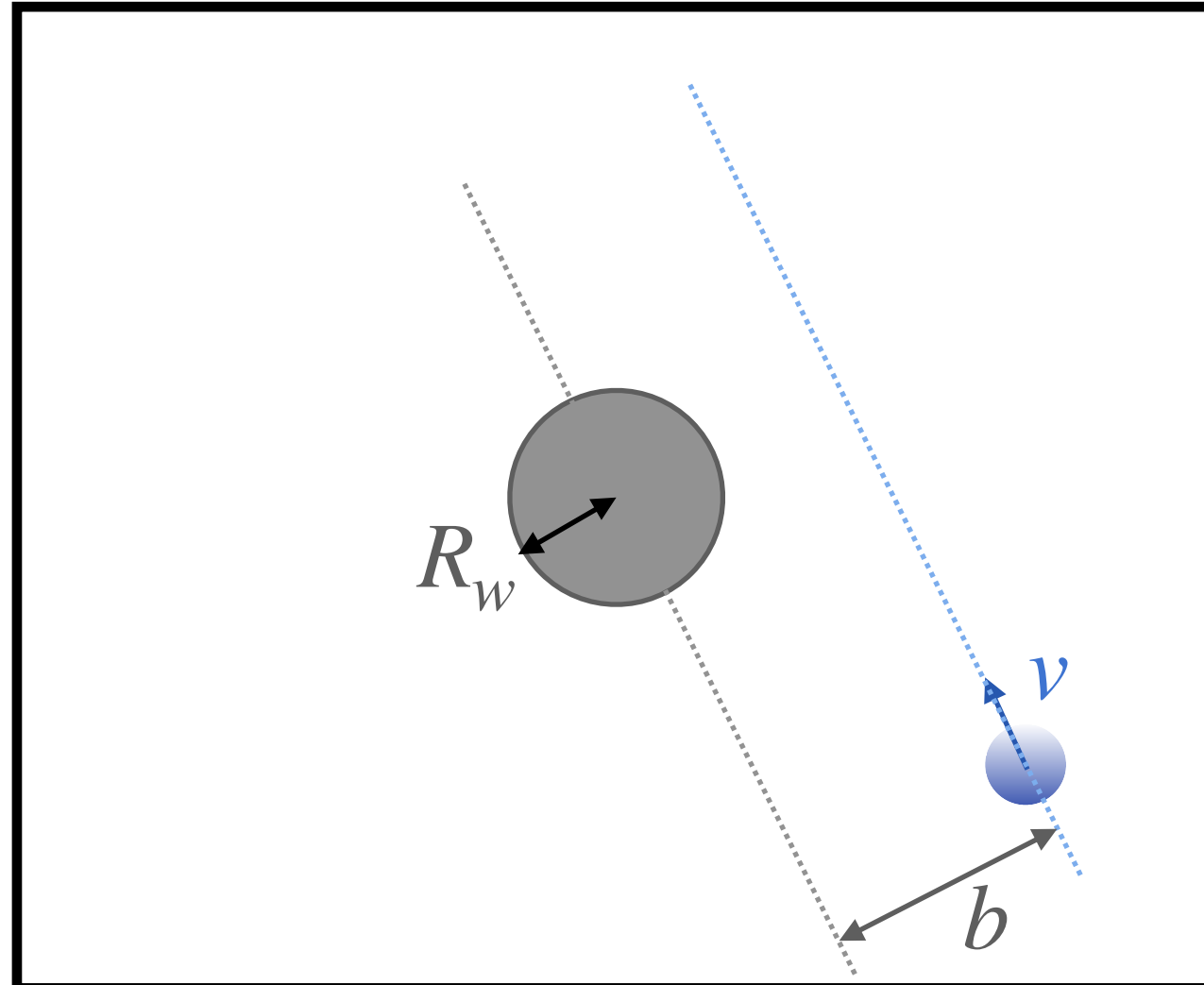
atome de polarisabilité α_a : énergie $E = -\frac{1}{2}\alpha_a \mathcal{E}^2$

$$r > R_w : \quad E = \frac{g}{r^2} \quad \text{avec} \quad g = -\frac{\alpha_a}{2} \left(\frac{\Lambda}{2\pi\epsilon_0} \right)^2$$

L'expérience de Denschlag et al. (suite)

$$g = -\frac{\alpha_a}{2} \left(\frac{\Lambda}{2\pi\epsilon_0} \right)^2$$

vue de dessus

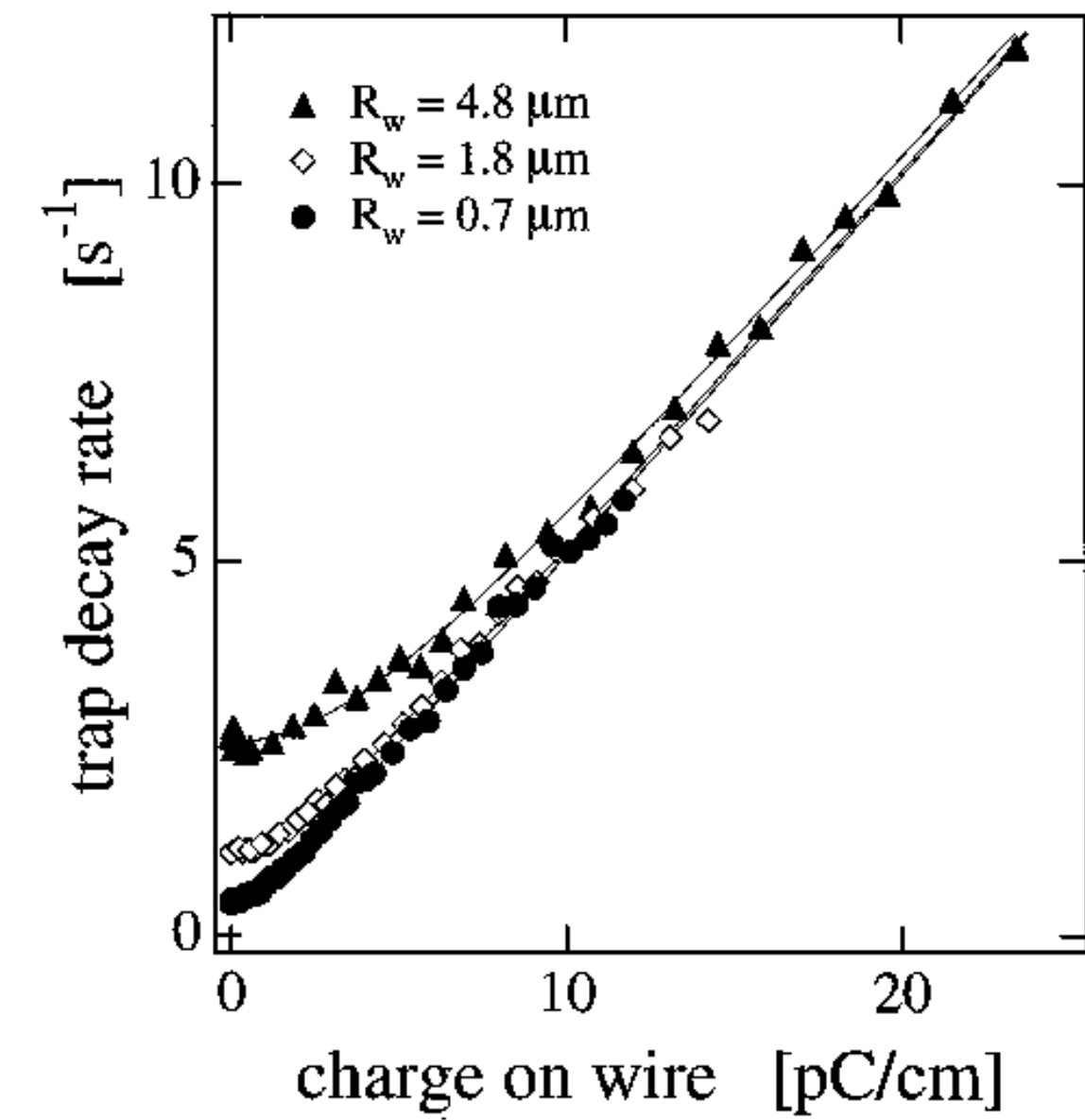
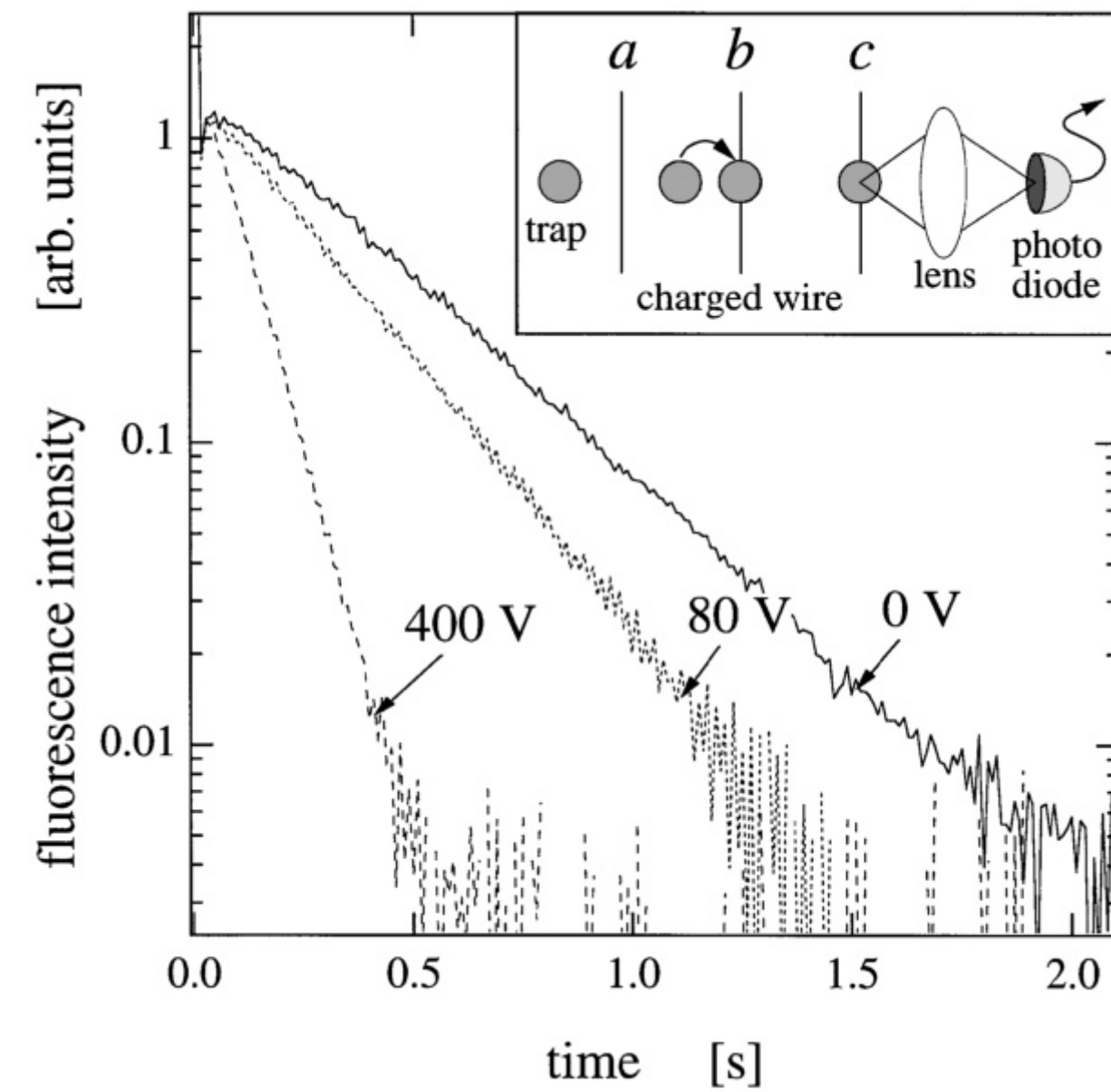
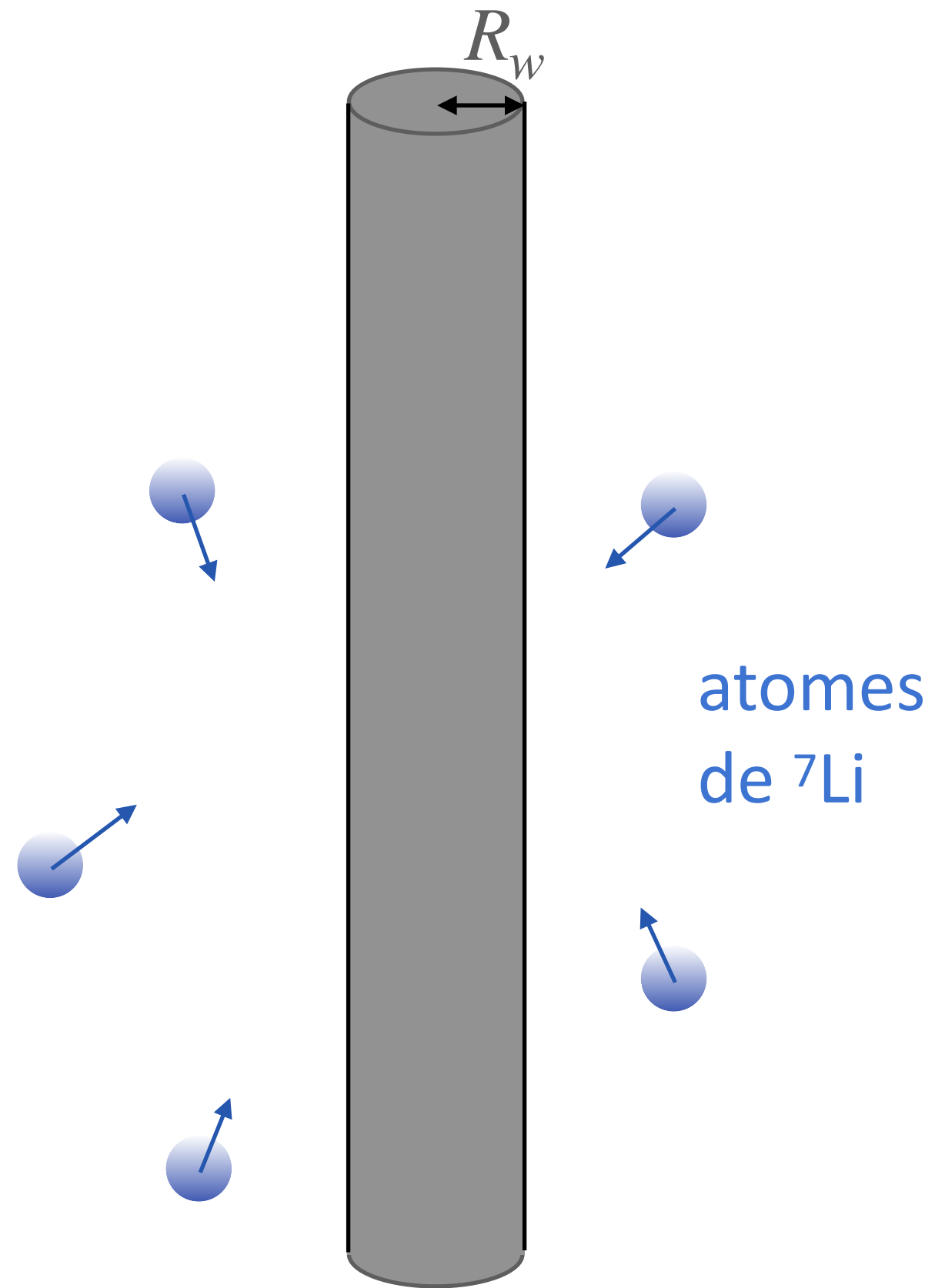


Si le fil est infiniment fin, chute vers le centre si

$$L = mvb < L_c = \sqrt{2m|g|} \quad \Rightarrow \quad b < \sqrt{\frac{2|g|}{mv^2}}$$

Prise en compte de la taille finie du fil : $b < \sqrt{R_w^2 + \frac{2|g|}{mv^2}}$

Résultats expérimentaux



Denschlag, Umshaus & Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **81**, 737 (1998)

4.

Le potentiel en $1/r^2$ en mécanique quantique

L'invariance d'échelle du potentiel en g/r^2

On considère $\Psi(\mathbf{r})$, solution de l'équation de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{g}{r^2} \right) \Psi = E \Psi$$

On vérifie immédiatement que $\Phi(\mathbf{r}) = \Psi(\lambda \mathbf{r})$ (avec λ réel quelconque) est solution de

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{g}{r^2} \right) \Phi = E' \Phi \quad \text{avec } E' = \lambda^2 E$$

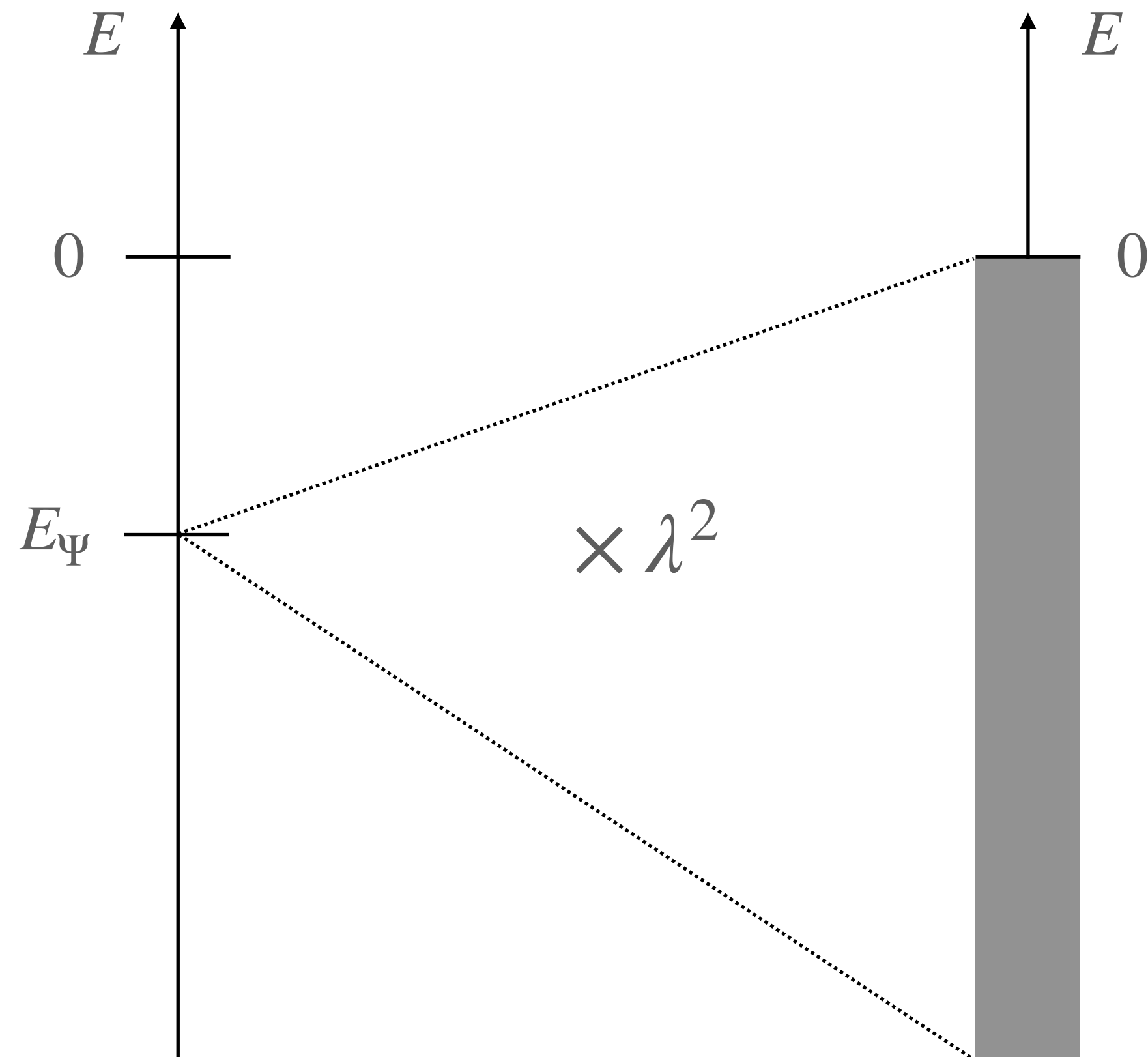
Propriété spécifique du potentiel en $1/r^2$:

même comportement de ∇^2 et $\frac{1}{r^2}$ dans le changement de variable : $\mathbf{r} \longrightarrow \lambda \mathbf{r}$

Conséquence de l'invariance d'échelle

Si $\Psi(\mathbf{r})$ est solution de $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{g}{r^2}\right)\Psi = E_\Psi\Psi$ avec une énergie E_Ψ négative (état lié),

alors le spectre en énergie n'est pas borné inférieurement !



Signature du caractère non auto-adjoint de l'hamiltonien

Il faudra régulariser le potentiel au voisinage de $r = 0$, par exemple avec un cœur dur en R_a

Brisure complète de l'invariance d'échelle ?

Pas vraiment, voir cours 2

Combien d'états liés dans le potentiel g/r^2 ?

Equation de Schrödinger pour la fonction radiale réduite $u(r) = r \psi(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{g}{r^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right] u(r) = E u(r)$$

ou encore
$$-\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\alpha}{r^2} u(r) = \epsilon u(r) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2mg}{\hbar^2} + \ell(\ell + 1) \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

On cherche la solution d'énergie nulle $-u'' + \frac{\alpha}{r^2} u = 0$ et on compte son nombre de nœuds

Recherche de la fonction d'onde d'énergie nulle

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -u'' + \frac{\alpha}{r^2}u = 0 \\ u(R_a) = 0 \end{cases} \quad \alpha = \frac{2mg}{\hbar^2} + \ell(\ell + 1)$$

Le cas $\alpha < -1/4$

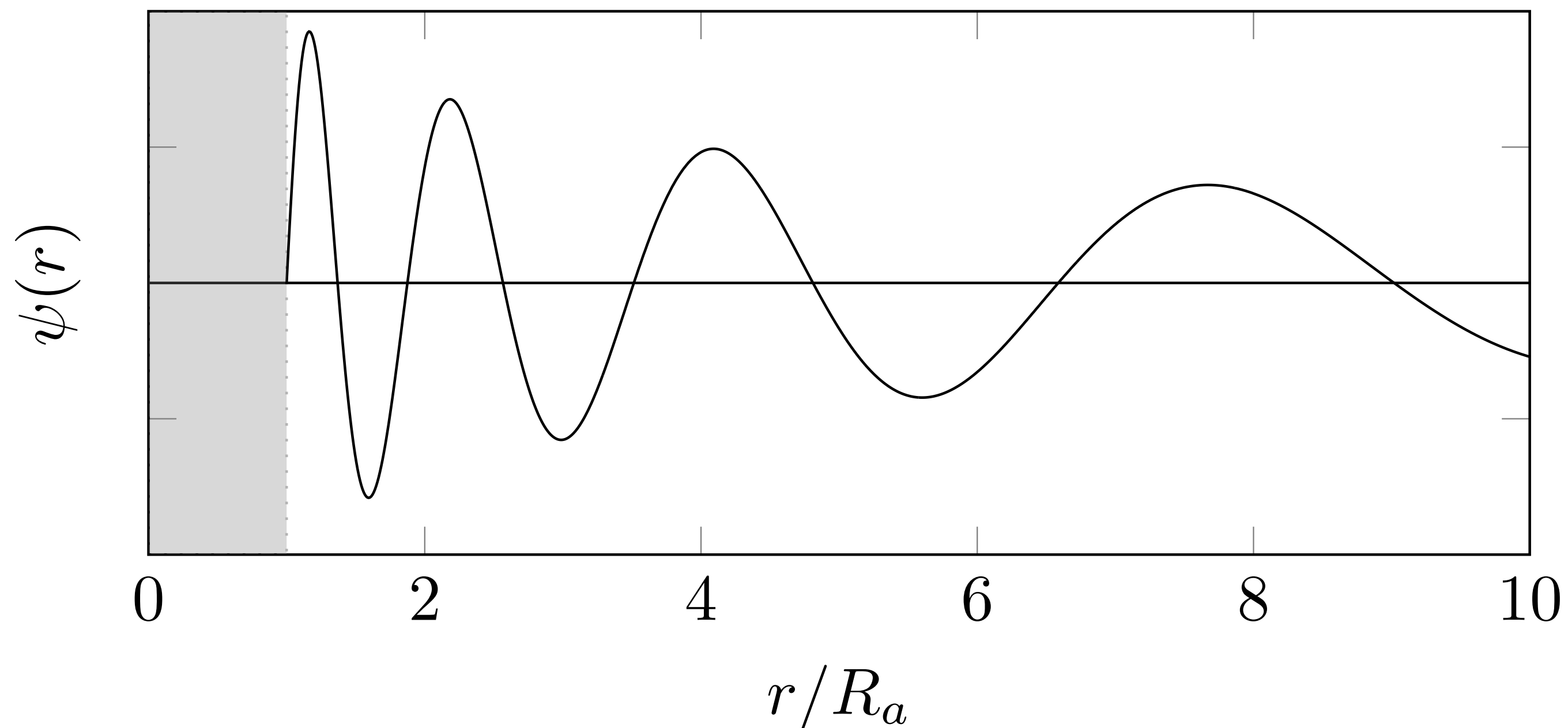
$$\alpha = \frac{2mg}{\hbar^2} + \ell(\ell + 1)$$

Solution d'énergie nulle

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sin [|s_0| \ln(r/R_a)]$$

avec

$$s_0 = \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \in i\mathbb{R}$$



Infinité de nœuds :

$$|s_0| \ln(r/R_a) = n\pi \quad r = R_a e^{n\pi/|s_0|}$$

\Rightarrow infinité d'états liés
(même après mise en place du cœur dur)

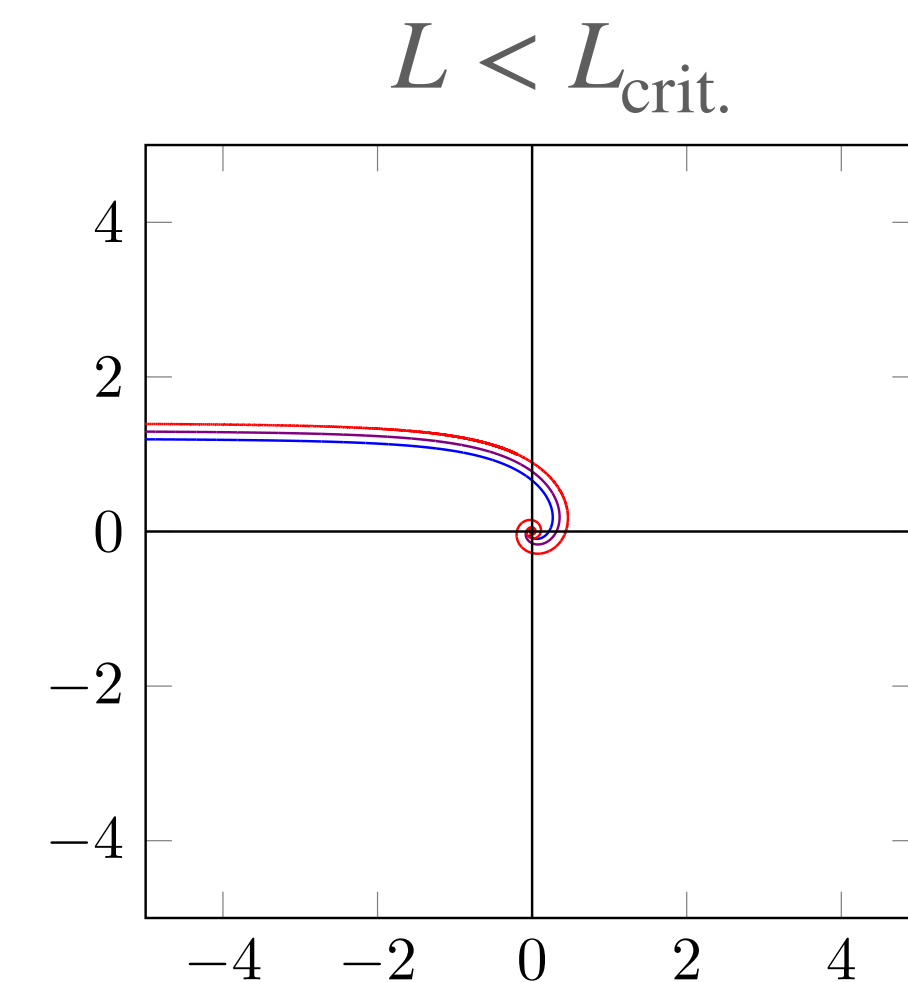
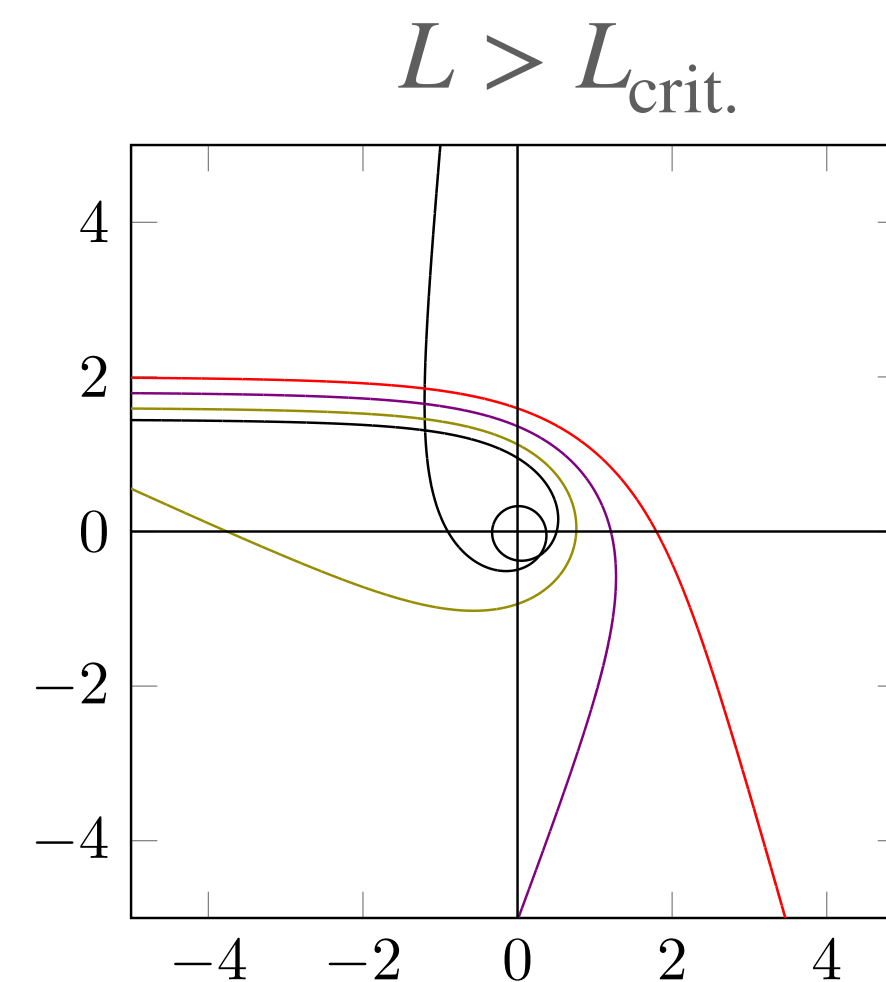
Le point critique $\alpha = -1/4$ et le lien classique-quantique

Valeur pour laquelle une infinité d'états liés apparaissent :

$$\alpha = \frac{2mg}{\hbar^2} + \ell(\ell + 1) = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2m|g| = \hbar^2 \left[\ell(\ell + 1) + \frac{1}{4} \right]$$
$$= \left[\hbar \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \right]^2$$

On retrouve le point critique classique

$$2m|g| = L_{\text{crit.}}^2$$



Bilan final pour $V(r) = g/r^\beta$

Exposant β	Comportement à l'origine	Nombre d'états liés	Exemple
$\beta < 2$	régulier	infini	Coulombien
$\beta > 2$	non régulier	fini (après régularisation)	van der Waals
$\beta = 2$ et $\alpha < -1/4$ $\alpha = \frac{2mg}{\hbar^2} + \ell(\ell + 1)$	non régulier	infini (après régularisation)	Efimov

Essin & Griffith (2006):

It violates every rule in the book, and discredits all the intuition we are trying to instill in our students