

## Chapitre 2

# États stationnaires et dynamique dans un potentiel en $1/r^2$

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Les états liés du potentiel en <math>\alpha/r^2</math></b>	<b>3</b>
1-1	Absence d'état lié pour $\alpha > -1/4$	3
1-2	L'invariance d'échelle partiellement retrouvée	3
1-3	L'énergie de l'état fondamental	6
<b>2</b>	<b>Interaction électrostatique et potentiel en <math>1/r^2</math></b>	<b>8</b>
2-1	L'interaction charge-dipôle	8
2-2	Une charge peut-elle lier un dipôle?	9
2-3	L'expérience de Desfrancois <i>et al.</i>	10
<b>3</b>	<b>Potentiel en <math>1/r^2</math> et invariance conforme</b>	<b>12</b>
3-1	Les symétries de l'équation de Schrödinger	12
3-2	Particule unique dans un potentiel extérieur	13
3-3	Les générateurs associés à l'invariance conforme	14
3-4	La tour d'états propres	15
3-5	Le mode de respiration	16
<b>4</b>	<b>Le cas uni-dimensionnel</b>	<b>17</b>
4-1	Le spectre du problème à $N$ corps	17
4-2	Dynamique du système	18
4-3	Le mouvement classique	18

Nous avons expliqué au chapitre précédent l'importance d'une bonne compréhension du mouvement d'une particule dans un potentiel attractif en  $-1/r^2$  pour aborder ensuite la physique à trois corps dans le régime d'Efimov. Ce type de potentiel émerge en effet quand les interactions binaires sont résonantes, c'est-à-dire décrites par une longueur de diffusion infinie, ou au moins grande devant la taille des édifices atomiques considérés.

Nous allons poursuivre ici l'étude du problème à un corps décrit par l'équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 \Psi + \frac{g}{r^2} \Psi = E \Psi, \quad g < 0, \quad (1)$$

pour laquelle nous avons présenté au chapitre précédent la solution d'énergie nulle. Nous allons continuer cette étude et déterminer les éventuels états liés ( $E < 0$ ) pour ce problème. Nous illustrerons nos résultats sur un problème concret : une charge électrique et un dipôle électrique peuvent-ils former un état lié? Nous terminerons notre étude par une généralisation de l'invariance d'échelle déjà abordée : nous introduirons la notion d'invariance conforme et nous expliquerons pourquoi celle-ci entraîne des propriétés remarquables pour la dynamique du système.

Commençons par rappeler les principaux résultats obtenus au chapitre précédent. Pour tirer parti de l'invariance par rotation du problème, on peut travailler dans un canal de moment cinétique  $\ell$  donné et chercher  $\Psi(\mathbf{r})$  sous la forme  $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(r) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$  où  $Y_{\ell,m}$  est une harmonique

sphérique. On introduit la fonction d'onde radiale réduite  $u(r) = r\psi(r)$  qui vérifie l'équation de Schrödinger à une dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[ \frac{g}{r^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_r r^2} \right] u(r) = E u(r). \quad (2)$$

Cette équation s'écrit sous la forme compacte

$$-u'' + \frac{\alpha}{r^2} u = \epsilon u \quad (3)$$

avec

$$\alpha = \frac{2m_r g}{\hbar^2} + \ell(\ell+1) \quad \epsilon = \frac{2m_r E}{\hbar^2} \quad (4)$$

Pour l'énergie nulle  $\epsilon = 0$ , les solutions de cette équation peuvent être cherchées sous forme d'une loi de puissance

$$u(r) = r\psi(r) = r^{s+1} \quad \text{avec} \quad s^2 + s - \alpha = 0. \quad (5)$$

Les deux racines de cette équation du second degré donnent chacune un exposant possible pour la loi de puissance

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}. \quad (6)$$

Le cas intéressant pour la suite de ce cours, conduisant à l'existence d'états liés, correspond à la situation  $\alpha + \frac{1}{4} < 0$  pour laquelle les deux racines sont complexes conjuguées l'une de l'autre

$$s_1 = -\frac{1}{2} + i|s_0|, \quad s_2 = -\frac{1}{2} - i|s_0|, \quad (7)$$

avec le nombre imaginaire pur  $s_0$  défini par

$$s_0 \equiv \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \in i\mathbb{R} \quad (8)$$

Pour résoudre le problème de la "chute vers le centre", c'est-à-dire le caractère non borné inférieurement du spectre de l'hamiltonien intervenant dans (1) ou dans (3), nous supposons la présence d'un cœur dur en

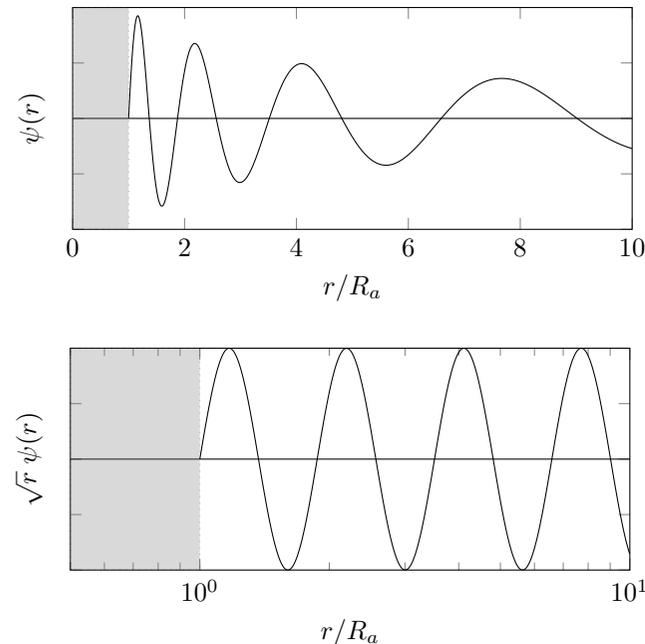


FIGURE 1. Fonction d'onde à énergie nulle dans un potentiel en  $1/r^2$  dans le cas  $\alpha < -1/4$ . Haut coordonnées linéaire, bas : coordonnées semi-logarithmiques.

$r = R_a > 0$ , ce qui revient à imposer  $\psi(R_a) = u(R_a) = 0$ . La solution d'énergie nulle s'écrit alors

$$E = 0 : \quad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sin [|s_0| \ln(r/R_a)] \quad (9)$$

et elle admet une infinité de nœuds, situés aux points  $r_n$  tels que (cf. figure 1)

$$|s_0| \ln(r_n/R_a) = n\pi \quad \Rightarrow \quad r_n = R_a e^{n\pi/|s_0|}. \quad (10)$$

Nous allons maintenant nous appuyer sur ces résultats pour construire les états d'énergie négative.

## 1 Les états liés du potentiel en $\alpha/r^2$

### 1-1 Absence d'état lié pour $\alpha > -1/4$

En examinant la forme de la fonction d'onde à énergie nulle en présence d'un cœur dur en  $R_a$ , nous avons montré au chapitre précédent qu'il ne pouvait y avoir d'état lié quand  $\alpha$  était supérieur à la valeur critique  $-1/4$ . Cette fonction d'onde s'écrit en effet :

$$\psi(r) = \left(\frac{r}{R_a}\right)^{s_1} - \left(\frac{r}{R_a}\right)^{s_2} \quad (11)$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont les solutions de l'équation du second degré (5) :  $s^2 + s - \alpha = 0$ . Comme ces racines  $s_1$  et  $s_2$  sont réelles si  $\alpha > -1/4$ , cela entraîne que  $\psi(r)$  n'a pas de nœud dans l'intervalle  $]R_a, +\infty[$  : c'est l'état fondamental du système et il ne peut pas y avoir d'état propre d'énergie inférieure à 0.

Montrons comment retrouver ce résultat directement, en l'absence de toute régularisation du potentiel en  $1/r^2$ . Nous allons pour cela suivre une méthode proposée par ESSIN & GRIFFITHS (2006). Commençons par remarquer que l'équation de Schrödinger (3) vérifiée par la fonction radiale réduite peut se mettre sous la forme

$$\epsilon u = \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha}{r^2}\right) u = \left(\frac{d}{dr} + \frac{s+1}{r}\right) \left(-\frac{d}{dr} + \frac{s+1}{r}\right) u \quad (12)$$

où  $s$  est une solution de  $s^2 + s - \alpha = 0$ . Notons par ailleurs que si  $s$  est réel, on trouve pour tout couple de fonctions  $u_1(r), u_2(r)$  régulières sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , tendant vers 0 en  $+\infty$  et vérifiant la condition aux limites  $u_j(r) = 0$  :

$$\int_0^\infty u_2^*(r) \left[\left(\frac{d}{dr} + \frac{s+1}{r}\right) u_1(r)\right] dr = \int_0^\infty \left[\left(-\frac{d}{dr} + \frac{s+1}{r}\right) u_2(r)\right]^* u_1(r) dr \quad (13)$$

Supposons qu'un état lié d'énergie  $E < 0$  et de fonction d'onde radiale réduite  $u(r)$  (normée) existe. Multiplions l'équation aux valeurs propres (12) par  $u(r)$ , intégrons sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  et utilisons le résultat (13). On trouve

$$\frac{2m_r E}{\hbar^2} = \int \left| \left(-\frac{d}{dr} + \frac{s+1}{r}\right) u(r) \right|^2 dr \quad (14)$$

ce qui est clairement impossible pour une énergie  $E < 0$ , puisque le membre de droite est toujours positif ou nul. On ne peut donc pas avoir d'état lié régulier sur  $[0, +\infty[$ .

### 1-2 L'invariance d'échelle partiellement retrouvée

La recherche des états liés passe par la résolution de l'équation différentielle (3). Celle-ci peut bien sûr se faire numériquement, ou alors en passant par des fonctions spéciales, en l'occurrence les fonctions de Bessel modifiées du premier et du deuxième ordre,  $I_\nu(x)$  et  $K_\nu(x)$ , solutions de

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + \nu^2) y(x) = 0 \quad (15)$$

Pour  $\alpha < -1/4$ , on peut en effet réécrire l'équation aux valeurs propres sous cette forme en posant pour  $E < 0$  :

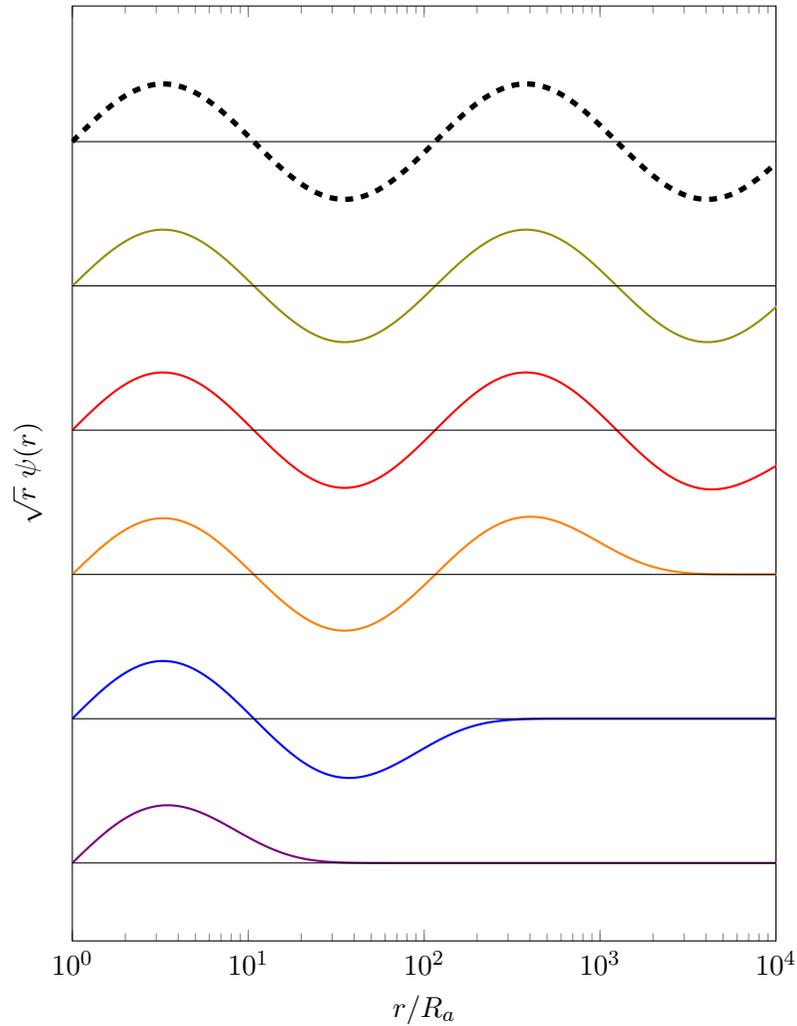
$$x = \kappa r \quad y(x) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}} = \sqrt{r} \psi(r) \quad \text{avec} \quad \nu = s_0, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m_r |E|}}{\hbar}, \quad (16)$$

et comme précédemment  $s_0 = (\alpha + 1/4)^{1/2} \in i\mathbb{R}$ . Pour obtenir une fonction normalisable, tendant vers 0 à l'infini, on doit en fait se limiter à la fonction  $K_{i|s_0|}$  (ESSIN & GRIFFITHS 2006) et les valeurs de  $\kappa$  correspondant aux états liés sont obtenues en imposant l'annulation de  $\psi(r)$  en  $R_a$ .

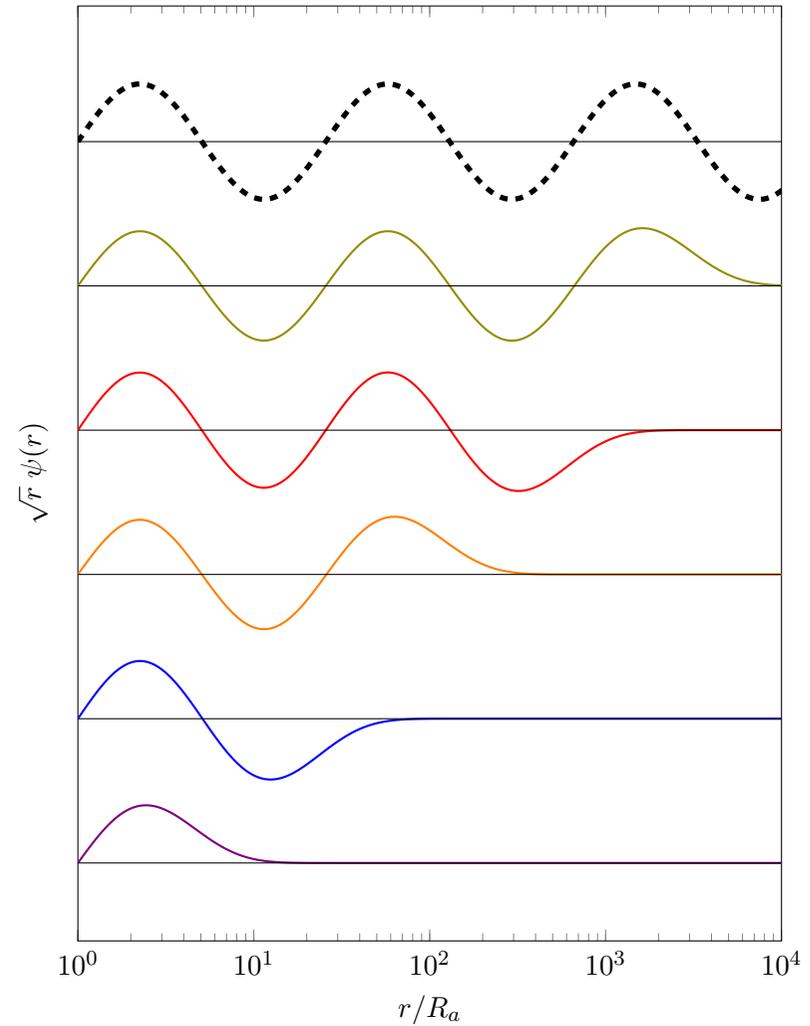
Les fonctions d'onde  $\psi_n(r)$  des premiers états liés sont tracées sur les figures 2, 3, ainsi que la fonction d'onde d'énergie nulle (9). Pour mettre en évidence les éléments importants de ces fonctions d'onde, nous avons en fait représenté  $\sqrt{r} \psi(r)$  et nous avons choisi des coordonnées logarithmiques pour l'axe des abscisses, de sorte que la fonction d'onde (9) pour  $E = 0$  est une simple sinusoïde.

Ce tracé appelle plusieurs commentaires qui vont jouer un rôle important dans toute la suite de ce cours :

1. Une partie significative du tracé des états liés excités (et dans une moindre mesure de l'état fondamental  $n = 0$ ) est pratiquement identique à l'état d'énergie nulle. Cela se comprend aisément : dès que  $r$  est significativement plus petit que le point de rebroussement du mouvement classique  $R_b$ , défini par  $|\alpha|/R_b^2 = \kappa^2$ , l'équation différentielle



**FIGURE 2.** Traits continus : fonctions d'onde radiales  $\sqrt{r} \psi_n(r)$  (non normalisées) des cinq premiers états liés pour un potentiel en  $-|g|/r^2$  tronqué par un cœur dur en  $R_a$ . La courbe pointillée noire représente l'état d'énergie nulle donné en (9). Ces courbes ont été tracées pour  $\alpha = -2$  (et donc  $|s_0| \sim 1.32$ ). La loi d'échelle  $\psi_{n+1}(\mathbf{r}) \propto \psi_n(\mathbf{r}/\lambda)$  se manifeste ici par une simple invariance par translation discrète car l'axe  $x$  est logarithmique.



**FIGURE 3.** Traits continus : fonctions d'onde radiales  $\sqrt{r} \psi_n(r)$  (non normalisées) des cinq premiers états liés pour un potentiel en  $-|g|/r^2$  tronqué par un cœur dur en  $R_a$ . La courbe pointillée noire représente l'état d'énergie nulle donné en (9). Ces courbes ont été tracées pour  $\alpha = -4$  (et donc  $|s_0| \sim 1.94$ ). La loi d'échelle  $\psi_{n+1}(\mathbf{r}) \propto \psi_n(\mathbf{r}/\lambda)$  se manifeste ici par une simple invariance par translation discrète car l'axe  $x$  est logarithmique.

définissant l'état lié

$$-u'' + \frac{\alpha}{r^2}u = -\kappa^2u \quad (17)$$

est pratiquement identique à l'équation pour l'énergie nulle

$$-u'' + \frac{\alpha}{r^2}u = 0 \quad (18)$$

puisque la contribution de  $\kappa^2u$  est alors négligeable devant celle de  $\alpha u/r^2$ . Par exemple, sur la figure 3, l'état excité  $\psi_{n=4}(r)$  ( $\kappa R_a \approx 6.4 \times 10^{-4}$ ) est très proche de l'état d'énergie nulle sur toute la plage  $r/r_0 \in [1, 1000]$ , c'est-à-dire jusqu'à  $\kappa r \sim 0.6$ .

- Le fait que les états liés soient sur la majeure partie de leur étendue (*grosso modo* avant leur dernière arche) bien décrits par la solution d'énergie nulle,  $\sqrt{r}\psi(r) \propto \sin[|s_0| \ln(r/R_a)]$  vient restaurer une invariance d'échelle, discrète cette fois-ci. Considérons par exemple la fonction d'onde du quatrième état excité,  $\psi_4(r)$ , et faisons la transformation d'échelle

$$\phi(r) = \psi_4(\lambda r) \quad (19)$$

avec

$$|s_0| \ln(\lambda) = \pi. \quad (20)$$

En coordonnées logarithmiques, cette homothétie sur  $r$  revient à faire une translation vers la gauche de longueur  $\ln(\lambda)$ , en oubliant la partie de la fonction qui va se retrouver en deçà du cœur dur en  $R_a$ . Or le choix proposé pour  $\lambda$  assure pour un état de la forme  $\sin[|s_0| \ln(r/R_a)]$  que l'on retrouve un zéro en  $r = R_a$ . On génère ainsi un autre état propre possible de l'hamiltonien, avec un nœud de moins que l'état de départ  $\psi_4$ . On obtient donc en très bonne approximation l'état  $\psi_3$ , et ainsi de suite.

- Le fait que l'état lié  $\psi_{n-1}(r)$  se déduise de l'état lié  $\psi_n(r)$  par une transformation d'échelle de paramètre  $\lambda$  donné en (19) entraîne que leurs énergies sont reliées par

$$E_n = \frac{1}{\lambda^2} E_{n-1} \quad \text{ou encore} \quad \frac{E_n}{E_{n-1}} = e^{-2\pi/|s_0|} \quad (21)$$

On obtient ainsi les énergies de la série infinie d'états liés, de plus en plus proches de la limite de dissociation  $E = 0$ , ces énergies formant une

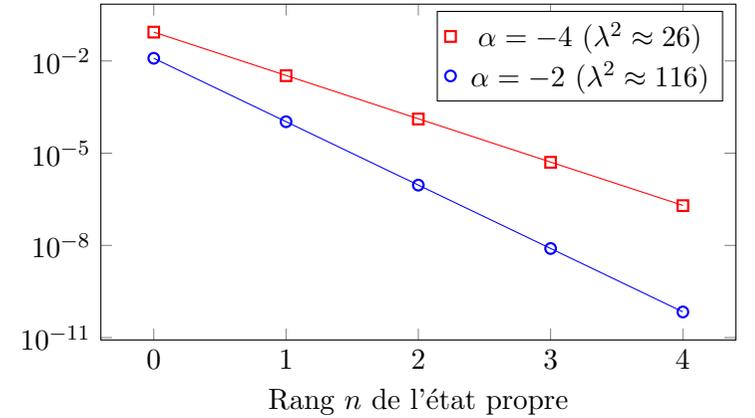
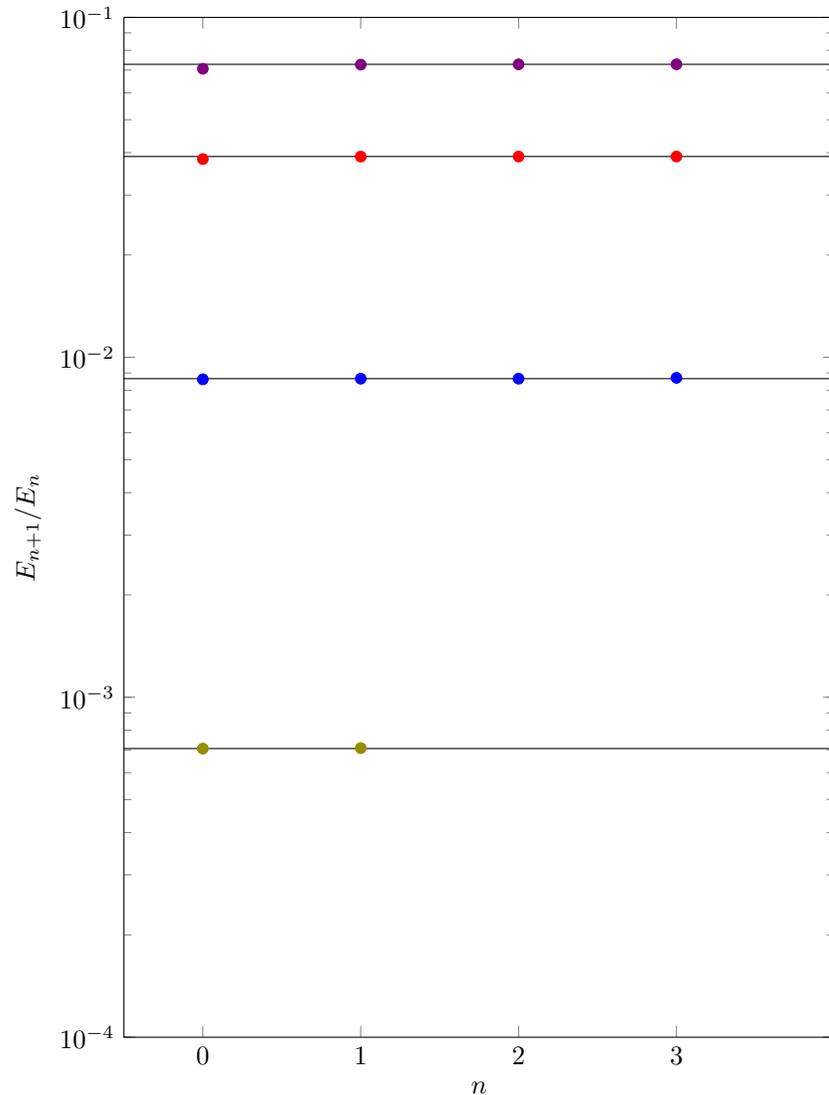


FIGURE 4. Énergies de liaison  $E_n$  des premiers états liés dans un potentiel en  $-1/r^2$  tronqué par un cœur dur en  $R_a$ , pour deux valeurs du paramètre sans dimension  $\alpha$ . L'indice  $n = 0$  correspond à l'état fondamental. L'unité d'énergie est  $E_a \equiv \hbar^2/m_\tau R_a^2$ . Les lignes continues représentent la loi d'échelle  $E_n = E_0/\lambda^{2n}$ .

suite géométrique de raison  $e^{-2\pi/|s_0|}$ . Les énergies calculées numériquement sont tracées en figure 4 pour deux valeurs différentes de  $\alpha$  (donc de  $|s_0|$ ) et on peut constater que cette loi d'échelle est très bien vérifiée. Cette invariance d'échelle discrète jouera un rôle central dans la physique d'Efimov. On trouve en figure 5 une autre manière de tracer ces données, mettant en évidence que le rapport  $E_{n+1}/E_n$  est effectivement quasi-indépendant de  $n$ , pour une valeur donnée de  $\alpha$ .

En résumé, l'introduction d'un cœur dur en  $R_a$  a brisé l'invariance d'échelle continue du problème initial, mais elle ne l'a pas complètement supprimée. Une invariance d'échelle discrète subsiste, avec le facteur d'échelle  $e^{\pi/|s_0|}$  pour les distances et  $e^{2\pi/|s_0|}$  pour l'énergie, ces facteurs d'échelle étant (heureusement!) indépendants de la valeur choisie pour  $R_a$ .

**Quelles valeurs prendre pour  $\alpha$  (ou  $s_0$ )?** Dans ce qui précède, la valeur de l'amplitude  $g$  du potentiel  $V(r)$  et donc des coefficients sans dimension  $\alpha$  et  $s_0$  définis en (4) et (8) sont quelconques. Dans l'effet Efimov de base,



**FIGURE 5.** Rapport  $E_{n+1}/E_n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . De bas en haut :  $\alpha = -1, -2, -4, -6$ . Les lignes continues indiquent la prédiction  $e^{-2\pi/|s_0|}$  avec  $s_0 \equiv \sqrt{\alpha + 1/4}$ . Pour  $\alpha = -1$ , seuls les trois premiers états liés ont pu être déterminés avec une précision convenable. L'indice  $n = 0$  correspond à l'état fondamental.

qui se produit entre trois particules identiques bosoniques avec une interaction binaire résonante, nous verrons aux chapitres 5 et 6 que l'on arrive à  $\alpha \approx -1.263$ , ce qui est en valeur absolue bien supérieur au seuil de  $-1/4$  que nous avons dégagé. Le paramètre  $s_0$  vaut alors  $s_0 \approx i \times 1.00624$  et le paramètre d'échelle associé est  $\lambda = e^{\pi/|s_0|} \approx 22.7$ . Ce nombre est relativement grand et rend difficile l'observation de plusieurs états liés puisqu'il y a un facteur  $\lambda^2 \approx 515$  entre les énergies de deux états consécutifs.

Dans le cas où deux particules de masse  $M$  sont en interaction résonante avec une troisième de masse  $m \ll M$ , nous verrons aux chapitres 3 et 4 qu'une interaction effective en  $-1/r^2$  peut également se produire. Dans ce cas, le paramètre  $|s_0|$  peut devenir arbitrairement grand quand  $M/m$  tend vers l'infini. Cela facilite l'observation de plusieurs états liés consécutifs puisque le paramètre d'échelle  $\lambda$  est alors notablement réduit.

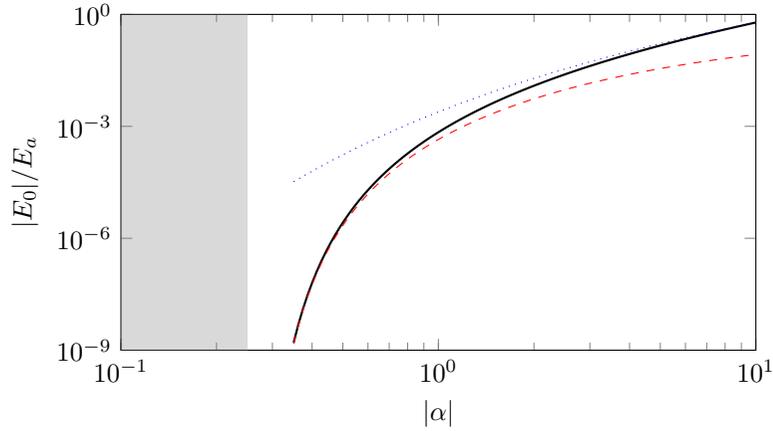
### 1-3 L'énergie de l'état fondamental

Une fois établie la relation (21) entre les énergies des différents états liés, il ne reste plus qu'à déterminer l'énergie d'un état lié, par exemple l'état fondamental, pour en déduire l'énergie des autres. Nous utiliserons dans ce qui suit l'échelle d'énergie naturelle du problème,  $E_a \equiv \hbar^2/m_\tau R_a^2$  et nous considérerons uniquement le canal de moment cinétique  $\ell = 0$  pour simplifier les notations.

Plusieurs approches peuvent être développées pour cela. La première est numérique, qui conduit aux résultats tracés en figure 6 avec une ligne continue noire. Une autre approche consiste à utiliser l'expression asymptotique des zéros de la fonction de Bessel modifiée du deuxième ordre,  $K_{i|s_0|}(x)$ , qui est la solution physiquement pertinente de l'équation de Schrödinger pour un état lié [cf. (15)]. Cette approche est développée en particulier par ESSIN & GRIFFITHS (2006). Nous ne la reproduisons pas ici et nous donnons simplement son résultat dans la limite  $\alpha \approx -1/4$  :

$$|\alpha| \rightarrow 1/4_+ : \quad \frac{E_0}{E_a} \approx -\frac{2}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{2\pi}{|s_0|}\right) \quad (22)$$

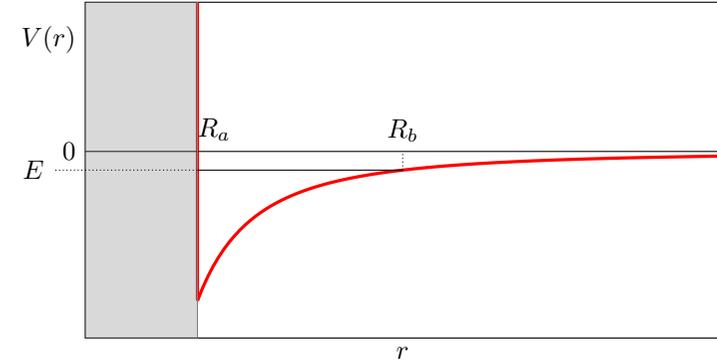
où  $\gamma = e^C$ ,  $C = 0.577 \dots$  étant la constante d'Euler. Cette prédiction est tracée en ligne tiretée rouge sur la figure 6. Elle est particulièrement utile



**FIGURE 6.** Valeur absolue de l'énergie de l'état fondamental dans un potentiel  $g/r^2$  attractif, avec  $g = \hbar^2\alpha/2m_r$  et  $\alpha < 0$ , en présence d'un cœur dur en  $R_a$ . L'unité d'énergie est  $E_a \equiv \hbar^2/m_r R_a^2$ . Les états liés n'existent que pour  $|\alpha| > 1/4$ . La courbe tiretée rouge donne le résultat approché (22) de ESSIN & GRIFFITHS (2006), valable pour  $|\alpha|$  proche de  $1/4$ . La courbe pointillée représente le résultat (26) de l'approche WKB présentée dans le texte.

quand on souhaite étudier le voisinage du point critique  $\alpha = -1/4$  par une approche "groupe de renormalisation". Nous ne détaillerons pas cette approche ici car elle ne sera pas nécessaire dans la suite. Nous renvoyons les lectrices et lecteurs intéressés vers GUPTA & RAJEEV (1993), CAMBLONG, EPELE et al. (2000), CAMBLONG, EPELE et al. (2001a), CAMBLONG, EPELE et al. (2001b), BURGESS, HAYMAN et al. (2017) et PAIK (2018).

On peut également utiliser l'approximation WKB pour estimer l'énergie de l'état fondamental, même si l'on sait que cette approximation est plutôt adaptée au régime quasi-classique, donc aux états excités. Nous avons vu au chapitre 1 (§ 2.4) que, pour un potentiel en  $1/r^2$ , cette approximation est valable pour  $|\alpha|$  notablement plus grand que 1, donc le régime opposé du résultat (22). Avec un cœur dur en  $R_a$ , la condition de quantification



**FIGURE 7.** Points tournants  $R_a$  et  $R_b$  associés à l'énergie  $E < 0$ , intervenant dans le calcul de l'intégrale WKB (23).

semi-classique s'écrit :

$$\int_{R_a}^{R_b} k(r, E_n) dr = \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \quad (23)$$

avec  $n = 0$  pour l'état fondamental. Le point tournant extérieur  $R_b$  est relié à l'énergie cherchée  $E_0$  par (cf. figure 7)

$$E_0 = \frac{\hbar^2\alpha}{2m_r R_b^2} < 0 \quad (24)$$

et un calcul relativement simple de l'intégrale de (23) conduit à :

$$\ln[\tan(u/2)] + \cos(u) = -\frac{3\pi}{4\sqrt{|\alpha|}} \quad \text{avec} \quad \sin u = \frac{R_a}{R_b}. \quad (25)$$

Limitons-nous pour simplifier au cas où  $\alpha$  n'est pas extrêmement grand devant 1, ce qui entraîne que  $R_b$  est significativement plus grand que  $R_a$ . En pratique, cette simplification est encore valable pour  $\alpha \sim 10$  et permet de traiter  $u$  comme un petit paramètre dans (25). On trouve alors  $u \approx 2 \exp[-1 - 3\pi/(4\sqrt{|\alpha|})]$ , ce qui conduit à

$$\boxed{\text{approche WKB : } \frac{E_0}{E_a} \approx -\frac{2|\alpha|}{e^2} \exp\left(-\frac{3\pi}{2\sqrt{|\alpha|}}\right)} \quad (26)$$

Le résultat est tracé en ligne pointillée sur la figure 6. Pour des valeurs encore plus grandes de  $\alpha$  (non pertinentes en pratique pour les problèmes qui nous intéresseront dans ce cours),  $R_b$  et  $R_a$  sont comparables et l'approximation conduisant à (26) n'est plus valable. L'état fondamental va se concentrer tout au fond du puits de potentiel et on attend  $E_0 \approx -\frac{|\alpha|}{2} E_a$ .

**Loi d'échelle approchée.** Dans l'hypothèse  $R_a/R_b \ll 1$ , l'approche WKB fournit une valeur approchée pour l'énergie de chaque état lié :

$$\text{approche WKB : } \frac{E_n}{E_a} \approx -\frac{2|\alpha|}{e^2} \exp \left[ -\frac{2\pi}{\sqrt{|\alpha|}} \left( n + \frac{3}{4} \right) \right] \quad (27)$$

ce qui correspond à la loi d'échelle  $E_{n+1}/E_n = \exp(-2\pi/\sqrt{|\alpha|})$ . On retrouve la loi (21) à condition de faire la substitution

$$|s_0| = \sqrt{\left| \alpha + \frac{1}{4} \right|} \approx \sqrt{|\alpha|} \quad (28)$$

valable dans l'hypothèse  $|\alpha|$  notablement plus grand que 1, ce qui est une condition nécessaire de validité de l'approche WKB, comme mentionné plus haut.

## 2 Interaction électrostatique et potentiel en $1/r^2$

### 2-1 L'interaction charge-dipôle

Nous étudierons dans les chapitres suivants l'émergence d'un potentiel en  $1/r^2$  à partir d'une interaction de courte portée (mais résonnante) entre différents constituants. Ici, nous allons aborder une situation physique où le potentiel en  $1/r^2$  est naturellement présent : l'interaction entre une charge électrique  $q$  et un dipôle électrique  $\mathbf{D}$ , supposé ponctuel. L'énergie d'interaction électrostatique entre ces deux objets s'écrit

$$V = \frac{q \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{qD}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (29)$$

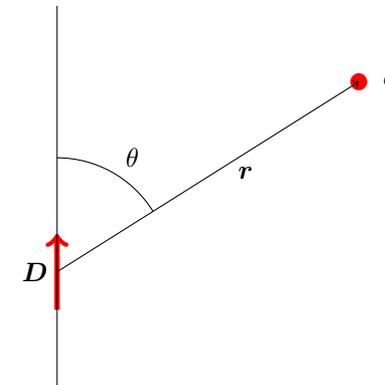


FIGURE 8. Interaction électrostatique entre une charge  $q$  et un dipôle  $\mathbf{D}$ .

où  $\theta$  désigne l'angle entre l'orientation du dipôle et le rayon vecteur  $\mathbf{r}$  joignant le dipôle et la charge (figure 8). On trouve donc bien la dépendance radiale en  $r$ , superposée à une dépendance angulaire en  $\cos \theta$  qui est un ingrédient nouveau par rapport à ce que nous avons étudié auparavant.

L'orientation du dipôle est supposée fixe et nous la prendrons par convention alignée avec l'axe  $z$ . Nous allons nous intéresser ici aux états propres  $\Psi(\mathbf{r})$  de l'hamiltonien du mouvement relatif

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2m_r} \nabla^2 + \frac{qD}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \right) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Le système étant invariant par rotation autour de l'axe  $z$ , nous allons chercher ces états propres en coordonnées sphériques sous la forme

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \Phi(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad (31)$$

où  $\varphi$  désigne l'angle azimutal et  $\theta$  l'angle polaire d'axe  $z$ . Nous cherchons donc des fonctions propres communes à l'hamiltonien et à la projection  $\hat{L}_z$  de l'opérateur moment cinétique sur l'axe  $z$  (avec la valeur propre  $\hbar m$ ).

Nous utiliserons dans ce qui suit l'expression de l'opérateur laplacien  $\nabla^2$  dans ces coordonnées :

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2} (\nabla_\theta^2 + \nabla_\varphi^2) \quad (32)$$

où nous avons posé

$$\nabla_r^2 \Psi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) \quad \nabla_\theta^2 \Psi \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \quad \nabla_\varphi^2 \Psi \equiv \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad (33)$$

Nous cherchons donc les fonctions  $\Phi(r, \theta)$  solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \tilde{D} \cos \theta \right) \right] \Phi = \epsilon \Phi \quad (34)$$

où l'on a introduit le dipôle réduit (sans dimension)

$$\tilde{D} = \frac{2m_r q D}{4\pi \epsilon_0 \hbar^2} \quad (35)$$

Ce problème a fait l'objet de plusieurs études théoriques (essentiellement concordantes) au milieu des années 1960 (TURNER & FOX 1966; MITTLEMAN & MYERSCOUGH 1966; BROWN & ROBERTS 1967; LEVY-LEBLOND 1967; COULSON & WALMSLEY 1967). Il a également été abordé sur le plan expérimental par DESFRANÇOIS, ABDOUL-CARIME et al. (1994), avant d'être repris théoriquement – notamment avec des outils provenant du groupe de renormalisation – par CAMBLONG, EPELE et al. (2001c), ALHAIDARI (2008), CONNOLLY & GRIFFITHS (2007) et ALHAIDARI & BAHLOULI (2008).

## 2-2 Une charge peut-elle lier un dipôle ?

Pour trouver les éventuels états liés solutions de (30), nous allons chercher les fonctions  $\Phi$  solutions sous une forme factorisée

$$\Phi(r, \theta) = u(r) f(\theta), \quad (36)$$

en utilisant la méthode de séparation des variables. Nous retrouverons une méthode similaire lorsque nous aborderons le problème à trois corps en utilisant la technique des potentiels hypersphériques.

L'équation aux valeurs propres (34) s'écrit alors

$$-u'' f + \frac{u}{r^2} \left\{ \left[ -\nabla_\theta^2 + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \tilde{D} \cos \theta \right] f \right\} = \epsilon u f. \quad (37)$$

La stratégie est alors simple : on commence par chercher des fonctions propres  $f(\theta)$  de l'opérateur apparaissant entre accolades  $\{\dots\}$  dans (37) sous la forme :

$$\left[ -\nabla_\theta^2 + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \tilde{D} \cos \theta \right] f(\theta) = \alpha f(\theta) \quad (38)$$

La valeur propre  $\alpha$  joue ici le rôle de *constante de séparation*. Une fois déterminées les valeurs propres possibles, on reporte le résultat dans (37) pour obtenir l'équation aux valeurs propres pour la fonction radiale  $u(r)$  :

$$-u''(r) + \frac{\alpha}{r^2} u(r) = \epsilon u(r) \quad (39)$$

On s'est bien ramené à notre équation radiale désormais familière dans un potentiel en  $\alpha/r^2$ .

On sait d'après notre étude précédente que la question de l'existence d'états liés se ramène à la condition :

$$\text{états liés si et seulement si } \alpha < -\frac{1}{4} \quad (40)$$

et toute la question est donc reportée sur l'équation aux valeurs propres (38) pour la fonction  $f(\theta)$ . Pour un dipôle  $\tilde{D}$  donné, nous cherchons la plus petite valeur propre possible  $\alpha$  pour déterminer si elle atteint le seuil critique  $-1/4$ . Pour atteindre ce seuil, il est clair que l'on a intérêt à minimiser le potentiel toujours positif  $m^2/\sin^2 \theta$  en prenant  $m = 0$ . On se ramène donc au problème plus simple :

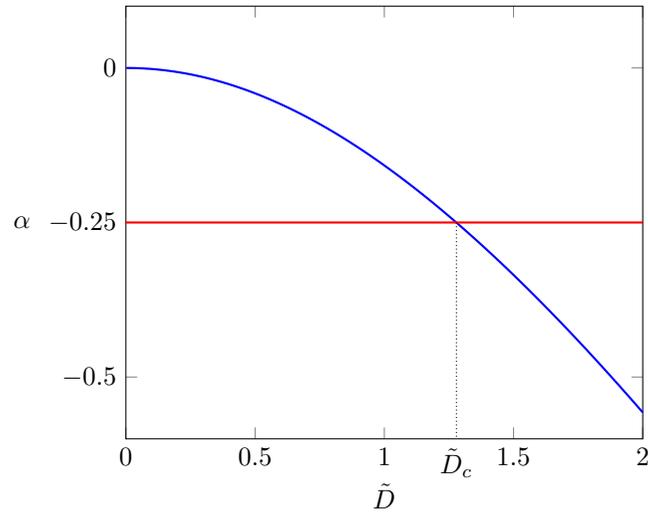
$$\left( -\nabla_\theta^2 + \tilde{D} \cos \theta \right) f(\theta) = \alpha f(\theta) \quad (41)$$

La résolution de cette équation peut se faire en développant  $f(\theta)$  sur la base des polynômes de Legendre  $P_n(\cos \theta)$  :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos \theta), \quad (42)$$

ces polynômes étant solutions de l'équation

$$-\nabla_\theta^2 P_n(\cos \theta) = n(n+1) P_n(\cos \theta). \quad (43)$$



**FIGURE 9.** Valeur propre  $\alpha$  minimale pour le problème aux valeurs propres angulaire (41), en fonction du dipôle réduit  $\tilde{D}$ . La valeur critique  $\alpha = -1/4$  est obtenue pour  $\tilde{D}_c \approx 1.279$ .

Les polynômes de Legendre vérifient par ailleurs la relation

$$xP_n(x) = \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x). \quad (44)$$

On arrive ainsi à un système tri-diagonal pour déterminer les coefficients  $c_n$  :

$$\tilde{D} \frac{n}{2n-1} c_{n-1} + [n(n+1) - \alpha] c_n + \tilde{D} \frac{n+1}{2n+3} c_{n+1} = 0. \quad (45)$$

En pratique, on peut tronquer ce système à une valeur  $n_{\max}$ , puis écrire la condition pour avoir une solution  $\{c_n\} \neq 0$  : le déterminant de ce système doit être nul. Si on prend  $n_{\max} = 1$ , on arrive ainsi à

$$\begin{vmatrix} -\alpha & \tilde{D}/3 \\ \tilde{D} & 2-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha - \frac{\tilde{D}^2}{3} = 0, \quad (46)$$

auquel cas la valeur critique  $\alpha_c = -1/4$  est atteinte pour  $\tilde{D}_c = 3\sqrt{3}/4 \approx$

1.299. On peut affiner ce résultat en prenant  $n_{\max}$  plus grand et on trouve  $\tilde{D}_c \approx 1.279$  (figure 9).

Considérons le cas d'un électron en présence d'un dipôle électrique beaucoup plus lourd, soit  $m_r \approx m_{\text{électron}}$ . On obtient alors :

$$D_c = 5.5 \cdot 10^{-30} \text{ C.m} = 1.6 \text{ Debye} \quad (47)$$

avec 1 Debye =  $3.336 \cdot 10^{-30}$  C.m. Pour un dipôle inférieur à cette valeur, il n'y aura pas d'état lié charge-dipôle. Pour un dipôle supérieur à cette valeur, notre modèle prédit qu'il y aura au contraire une infinité d'états liés dans le canal  $m = 0$ .

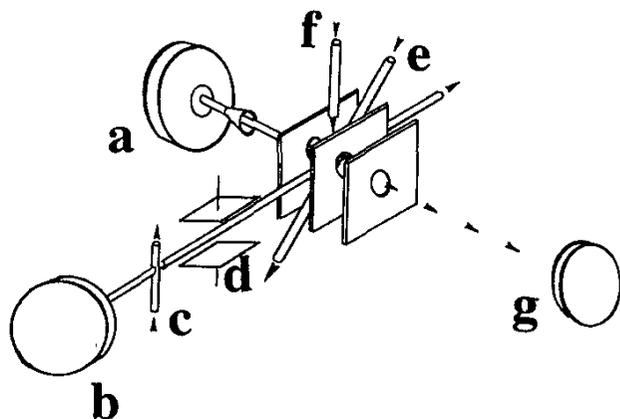
Comme nous l'avons vu plus haut, pour assurer que le système admet un état fondamental, il faut prendre en compte le fait que le potentiel  $\alpha/r^2$  ne s'applique pas jusqu'à des distances arbitrairement petites. En l'occurrence, la notion de dipôle électrique n'est pas valable aux très courtes distances : c'est une idéalisation d'un système de deux charges  $\pm Q$  séparées par une distance  $d$ , avec  $D = Qd$ . Quand la variable  $r$  devient  $\lesssim d$ , il faut résoudre explicitement le problème à trois corps  $+Q, -Q, q$  [voir par exemple WALLIS, HERMAN et al. (1960), MITTLEMAN & MYERSCOUGH (1966), LEVY-LEBLOND (1967) et CRAWFORD (1967)]. On retrouve alors l'invariance d'échelle discrète présentée dans la partie précédente.

### 2-3 L'expérience de Desfrancois *et al.*

L'expérience de DESFRANÇOIS, ABDOUL-CARIME et al. (1994) a consisté à prendre une série d'espèces moléculaires possédant un moment dipolaire électrique non nul et déjà mesuré par ailleurs, et une structure électronique avec une couche complète, de sorte que l'affinité électronique de la molécule  $M$  est avec une bonne probabilité négative.

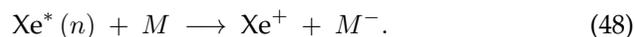
Pour mesurer si un électron peut se lier à la molécule sous l'effet du seul potentiel dipolaire, on effectue une collision entre un jet de ces molécules<sup>1</sup> et des atomes de xénon portés dans un état de Rydberg (nombre quantique principal  $n$  élevé, figure 10). Ce nombre quantique est varié de

1. Ces molécules sont ensemencées dans un jet atomique d'hélium. Les molécules ont une température rotationnelle de 5 à 10 K.



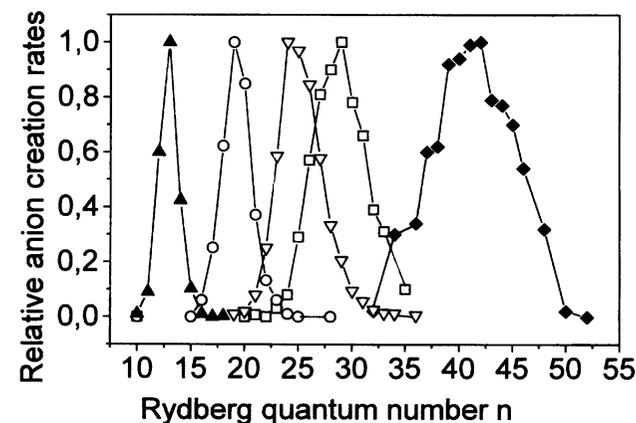
**FIGURE 10.** Schéma expérimental utilisé pour étudier la capture d'un électron par le champ électrique créé par le dipôle d'une molécule. (a) : valve pour le jet moléculaire, (b) : valve pour le xénon, (c) : excitation du xénon par un faisceau d'électrons, (d) : zone de filtrage des différents niveaux de Rydberg, (g) galette multi-canaux pour la détection des ions. Figure extraite de DESFRANÇOIS, KHELIFA *et al.* (1992).

$n = 7$  à  $n = 70$  : on varie ainsi fortement l'énergie à fournir pour détacher l'électron externe de l'atome de xénon, cet électron étant ensuite capturé par la molécule dipolaire :



Les ions  $M^-$  sont ensuite accélérés et détectés derrière un spectromètre de masse. On montre en figure 11 le taux de création de  $M^-$  en fonction du nombre quantique  $n$  de l'état de Rydberg du xénon. Le caractère assez fortement piqué de ce taux est en accord avec l'idée que l'électron peut être capturé de manière résonnante par la molécule pour former un état lié. L'énergie à laquelle cette résonance se produit dépend de la molécule.

Pour déterminer précisément l'énergie de liaison de  $M^-$ , on mesure le champ électrique nécessaire pour détacher l'électron capturé lors de la réaction (48). Les résultats sont reportés sur la figure 12 en fonction du mo-



**FIGURE 11.** Taux de formation de  $M^-$  en fonction du nombre quantique principal de l'état de Rydberg de Xe fournissant l'électron à la molécule neutre  $M$ . Par ordre de moment dipolaire décroissant : triangles pleins : acétonitrile; disques creux : cyclohexanone, triangles creux : acétone, carrés creux : cyclobutanone, losanges : acétaldhyde. Figure extraite de DESFRANÇOIS, ABDOUL-CARIME *et al.* (1994).

ment dipolaire de la molécule. Pour des molécules de moment dipolaire inférieur à 2.6 Debye, aucun signal n'a été mesuré. Pour les moments dipolaires plus grands, un état lié est effectivement détecté avec une énergie en bon accord avec la modélisation théorique proposée par les auteurs. Cette modélisation consiste à tronquer le potentiel en  $\alpha/r^2$  à courte distance par un autre potentiel faisant intervenir des paramètres moléculaires connus (polarisabilité par exemple).

On notera que l'on ne détecte dans cette expérience qu'un seul état lié de l'électron autour du dipôle moléculaire, alors que la théorie que nous avons développée jusqu'ici en prédit une infinité, formant une suite géométrique. DESFRANÇOIS, ABDOUL-CARIME *et al.* (1994) relie ce résultat à la prédiction de GARRETT (1980), selon laquelle le mouvement des atomes composant la molécule dipolaire vient fortement restreindre le nombre d'états  $M^-$  possibles.

On remarquera également que la valeur seuil trouvée expérimentalement, 2.6 Debye, est notablement supérieure à la limite trouvée en (47).

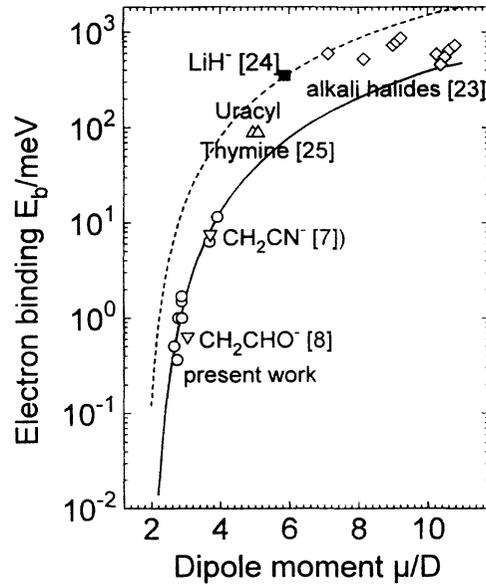


FIGURE 12. Énergie de liaison de l'édifice  $M^-$  en fonction du dipôle électrique (noté ici  $\mu$  et mesuré en Debye) de la molécule parente  $M$ . Les courbes en traits plein et tireté correspondent à deux prédictions théoriques fondées sur des modélisations différentes de la physique à courte distance, quand la distance charge-dipôle devient comparable à l'extension du dipôle lui-même. Figure extraite de DESFRANÇOIS, ABDOL-CARIME *et al.* (1994).

Cela est dû (au moins en partie) au fait que les auteurs ne disposaient que de molécules relativement complexes, et que la détection d'états faiblement liés était alors rendue compliquée par le mouvement de rotation de ces molécules aux températures disponibles. Les progrès récents dans la préparation de molécules di-atomiques ultrafroides pourraient permettre de reprendre ces expériences avec des moments dipolaires voisins de la valeur critique attendue théoriquement (table 2.1).

molécule	dipole (Debye)
RbYb	0.21
KRb	0.57
RbCs	1.2
RbSr	1.5
NaK	2.7
NaRb	3.3
LiRb	4.1
LiCs	5.5

TABLE 2.1. Moment dipolaire de quelques molécules di-atomiques utilisées dans les expériences de gaz ultra-froids. Valeurs extraites de GADWAY & YAN (2016).

### 3 Potentiel en $1/r^2$ et invariance conforme

#### 3-1 Les symétries de l'équation de Schrödinger

L'invariance d'échelle du potentiel en  $1/r^2$  que nous avons mentionnée au chapitre précédent fait partie d'un ensemble plus vaste de symétries de l'équation de Schrödinger, appelé groupe d'invariance conforme. Ces symétries viennent s'ajouter aux propriétés d'invariance géométrique, comme la symétrie de translation ou la symétrie de rotation.

Pour une particule libre décrite par l'équation de Schrödinger, cette invariance conforme a été découverte par HAGEN (1972) et NIEDERER (1972). Elle a été étendue au cas d'une particule dans un piège harmonique par NIEDERER (1973), puis au cas du potentiel qui nous intéresse ici,  $1/r^2$ , par ALFARO, FUBINI *et al.* (1976).

Cette invariance peut se généraliser à un ensemble de particules en interaction, pourvu que le potentiel correspondant satisfasse à la propriété d'invariance d'échelle (PITAEVSKII & ROSCH 1997)

$$V(\lambda r_1, \dots, \lambda r_N) = \frac{1}{\lambda^2} V(r_1, \dots, r_N). \quad (49)$$

Elle est également présente dans un gaz de fermions de spin  $1/2$  à la limite unitaire avec  $m_\uparrow = m_\downarrow$  (WERNER & CASTIN 2006). Dans ce cas, la longueur de diffusion est infinie et ne fournit donc aucune échelle de lon-

gueur. Par ailleurs, le caractère fermionique des particules empêche la formation d'édifice à trois corps qui pourraient eux aussi amener une échelle de longueur.

Cette invariance conforme se manifeste par ailleurs pour l'équation de Gross–Pitaevskii à deux dimensions, qui décrit par un champ classique la dynamique de particules interagissant par un potentiel de contact  $g\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  (PITAEVSKII & ROSCH 1997; SAINT-JALM, CASTILHO et al. 2019). Dans ce cas, l'invariance d'échelle résulte du fait que l'on a à deux dimensions

$$\delta(\lambda\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2}\delta(\mathbf{r}). \quad (50)$$

La recherche des propriétés d'invariance de l'équation de Schrödinger se fait de la manière suivante. Partant d'une solution  $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  de cette équation dans un potentiel extérieur  $U(\mathbf{r})$  :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad \text{avec} \quad \hat{H} = \sum_i \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right] + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (51)$$

on cherche s'il existe des transformations des positions et du temps

$$\boxed{\mathbf{r}'_i = g(\mathbf{r}_i, t) \quad t' = h(t)} \quad (52)$$

accompagnées d'un changement de jauge de la fonction d'onde

$$\boxed{\psi'(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N, t') = f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)} \quad (53)$$

de sorte que  $\psi'$  soit également solution de l'équation de Schrödinger (51).

### 3-2 Particule unique dans un potentiel extérieur

Pour simplifier cette présentation, nous allons considérer ici le cas d'une particule unique, mais les résultats peuvent s'étendre sans difficulté au cas de  $N$  particules, voir par exemple WERNER & CASTIN (2006). Nous ne traiterons pas ici les symétries bien connues de translation ou de rotation, et nous allons nous concentrer sur la symétrie "cachée" (ou symétrie dynamique), liée à l'invariance conforme.

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas où la particule est libre ou évolue dans le potentiel  $U(r) = g/r^2$ . L'équation de Schrödinger s'écrit donc :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{g}{r^2}\psi. \quad (54)$$

Donnons-nous une matrice réelle  $2 \times 2$  de déterminant 1 :

$$[M] = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3 = 1, \quad (55)$$

c'est-à-dire un élément de  $SL_2(\mathbb{R})$ , et considérons les transformations :

$$\boxed{\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{r}}{\gamma_3 t + \gamma_4}, \quad t' = h(t) = \frac{\gamma_1 t + \gamma_2}{\gamma_3 t + \gamma_4}} \quad (56)$$

On peut vérifier (le calcul est fastidieux, mais sans difficulté de principe) que cette transformation, associée au changement de jauge

$$\boxed{f(\mathbf{r}, t) = (\gamma_3 t + \gamma_4)^{D/2} \exp\left(-i\frac{m\gamma_3 r^2/2}{\gamma_3 t + \gamma_4}\right)} \quad (57)$$

où  $D$  est la dimension de l'espace ( $D = 3$  dans ce cours), remplit notre cahier des charges : la fonction  $\psi'(\mathbf{r}', t')$  est également solution de (54) (NIEDERER 1972; ALFARO, FUBINI et al. 1976).

Pour acquérir une intuition physique des transformations décrites par (56), remarquons que l'on dispose de 4 paramètres réels pour décrire la matrice  $2 \times 2$  avec la contrainte portant sur son déterminant, de sorte qu'il y a trois paramètres indépendants. On peut identifier trois types de transformations, correspondant à trois cas particuliers importants pour cette matrice :

— Les translations dans le temps :

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad t' = t + t_0. \quad (58)$$

Cette invariance provient simplement du fait que l'hamiltonien de départ est stationnaire.

— Les dilatations :

$$[M] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} : \quad \mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}, \quad t' = \lambda^2 t \quad (59)$$

que nous avons déjà introduites plus haut. L'invariance de l'équation de Schrödinger est assurée par l'invariance d'échelle du potentiel en  $1/r^2$ .

— Les expansions :

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_3 & 1 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\gamma_3 t + 1}, \quad t' = \frac{t}{\gamma_3 t + 1}. \quad (60)$$

qui peuvent être considérées, du point de vue du potentiel  $U(\mathbf{r})$ , comme des dilatations avec un facteur d'échelle dépendant du temps.

Notons que la transformation de jauge (57) est triviale dans les deux premiers cas puisque l'on a alors  $\gamma_3 = 0$ .

On forme ainsi un groupe continu de transformations, avec trois paramètres indépendants. L'opération associée à l'application successive de deux transformations successives  $[M]$  et  $[M']$  est caractérisée par la matrice  $[M'']$  obtenue en faisant le produit matriciel  $[M'] \times [M]$ , ce qui donne toute sa pertinence à cette écriture matricielle. On notera par ailleurs que la matrice identité,  $\gamma_1 = \gamma_4 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = 0$  est associée à une absence de modification pour les fonctions d'onde :  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = t, \psi' = \psi$ . Les transformations au niveau des fonctions d'onde (52-53) et (56-57) constituent donc une représentation linéaire du groupe des matrices réelles  $2 \times 2$  de déterminant 1,  $SL_2(\mathbb{R})$ .

Une fois identifiée cette structure, l'étape suivante est en principe de déterminer ses générateurs infinitésimaux. Toutefois, avant de procéder à cette opération, il est utile de généraliser les résultats qui précèdent au cas d'une particule plongée dans un piège harmonique (NIEDERER 1973).

Nous considérons donc dans ce qui suit l'hamiltonien

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \quad (61)$$

où  $U(r)$  est le potentiel isotrope

$$U(\mathbf{r}) = \frac{g}{r^2} + U_{\text{ho}}(r) \quad \text{avec} \quad U_{\text{ho}}(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \quad (62)$$

La partie en  $m\omega^2 r^2/2$  vient briser l'invariance d'échelle trouvée pour  $g/r^2$ , mais on peut modifier simplement les transformations (56)-(57) pour retrouver l'invariance conforme de l'équation de Schrödinger. Partant toujours d'une matrice  $2 \times 2$  à coefficients réels et de déterminant 1, prenons

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\lambda(t)}, \quad \tan(\omega t') = \frac{\gamma_1 \tan(\omega t) + \gamma_2}{\gamma_3 \tan(\omega t) + \gamma_4} \quad (63)$$

avec

$$\lambda(t) = [(\gamma_1 S + \gamma_2 C)^2 + (\gamma_3 S + \gamma_4 C)^2]^{1/2}, \quad S = \sin(\omega t), \quad C = \cos(\omega t). \quad (64)$$

Là encore, un calcul (également fastidieux) permet de montrer que la fonction  $\psi'$ , construite à partir de  $\psi$  et de la transformation de jauge

$$f(\mathbf{r}, t) = \lambda^{D/2}(t) \exp\left(-i \frac{m \dot{\lambda} r^2}{2\lambda}\right) \quad (65)$$

est également solution de l'équation de Schrödinger ( $D$  est la dimension d'espace). On pourra consulter WERNER & CASTIN (2006) pour la version à  $N$  particules du même problème.

### 3-3 Les générateurs associés à l'invariance conforme

Disposant maintenant d'un groupe de transformations continues qui laissent invariante l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \left( \frac{g}{r^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right) \psi, \quad (66)$$

il est intéressant de trouver les générateurs associés à ces transformations.

Pour commencer, rappelons ce que sont ces générateurs pour les transformations géométriques habituelles, translations ou rotations. Pour la translation selon  $x$  par exemple,

$$\psi(x, y, z) \longrightarrow \psi'(x, y, z) = \psi(x - x_0, y, z) \quad (67)$$

on prend  $x_0$  infiniment petit de sorte que

$$\psi'(x, y, z) \approx \psi(x, y, z) - x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (68)$$

que l'on écrit :

$$\psi' \approx \left(1 - i\frac{\hat{p}_x}{\hbar}\right) \psi \quad \text{avec} \quad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \quad (69)$$

L'opérateur  $\hat{p}_x$  introduit ici coïncide avec l'expression habituelle de la composante selon  $x$  de l'opérateur impulsion. Les générateurs infinitésimaux des translations sont donc les trois composantes de l'opérateur impulsion  $\hat{\mathbf{p}}$ , dont on rappelle les relations de commutation :

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (70)$$

Pour une rotation d'angle  $\varphi_0$  autour de l'axe  $z$ , on a en coordonnées sphériques :

$$\psi(r, \theta, \varphi) \longrightarrow \psi'(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi - \varphi_0), \quad (71)$$

soit pour  $\varphi_0$  infiniment petit :

$$\psi' \approx \left(1 - i\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\right) \psi \quad \text{avec} \quad \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (72)$$

Les générateurs infinitésimaux des rotations sont donc les trois composantes de l'opérateur moment cinétique  $\hat{\mathbf{L}}$ , dont on rappelle les relations de commutation :

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k. \quad (73)$$

On peut procéder de la même façon pour les transformations liées à l'invariance conforme que nous avons identifiées plus haut. Les calculs détaillés sont présentés par exemple en appendice de l'article de SAINT-JALM, CASTILHO et al. (2019) et nous donnons ici simplement le résultat à l'instant  $t = 0$  pour la transformation (63-65). Un choix possible pour les trois générateurs est (PITAEVSKII & ROSCH 1997)

$$\hat{\mathcal{L}}_1 = \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{H} - 2U_{\text{ho}}) \quad \hat{\mathcal{L}}_2 = \frac{1}{4\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \quad \hat{\mathcal{L}}_3 = \frac{1}{2\hbar\omega} \hat{H} \quad (74)$$

L'étude du groupe associé à cette symétrie conforme est conditionnée par les relations de commutation entre les générateurs

$$[\hat{\mathcal{L}}_1, \hat{\mathcal{L}}_2] = -i\hat{\mathcal{L}}_3 \quad [\hat{\mathcal{L}}_2, \hat{\mathcal{L}}_3] = i\hat{\mathcal{L}}_1 \quad [\hat{\mathcal{L}}_3, \hat{\mathcal{L}}_1] = i\hat{\mathcal{L}}_2 \quad (75)$$

Ces relations semblent voisines de celles du moment cinétique (73), mais la présence du signe  $-$  dans la première vient changer significativement l'algèbre. Ces relations sont en fait caractéristiques de l'algèbre  $\text{SO}(2,1)$ , le groupe de Lorentz à deux dimensions d'espace et une dimension temporelle, alors que l'algèbre du moment cinétique correspond à  $\text{SO}(3)$ . Elles se généralisent directement au cas à  $N$  particules (WERNER & CASTIN 2006).

**Exemple : opérateur associé à une dilatation infinitésimale.** Considérons la dilatation de paramètre  $\lambda$  très proche de 1 et posons  $\gamma_4 = 1/\gamma_1 = 1 + \epsilon$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$  dans (56,57,59) avec  $\epsilon \ll 1$ . Au premier ordre en  $\epsilon$ , on trouve en dimension  $D$  :

$$\psi'(\mathbf{r}) = \gamma_4^{D/2} \psi(\gamma_4 \mathbf{r}) = (1 + \epsilon)^{D/2} \psi[(1 + \epsilon) \mathbf{r}] \quad (76)$$

$$\approx \psi(\mathbf{r}) + \epsilon \left( \frac{D}{2} + \mathbf{r} \cdot \nabla \right) \psi(\mathbf{r}) \quad (77)$$

$$= \psi(\mathbf{r}) + \frac{\epsilon}{2} [\nabla \cdot (\mathbf{r}\psi) + \mathbf{r} \cdot \nabla \psi] \quad (78)$$

qui peut également être écrit  $(1 + 2i\epsilon\hat{\mathcal{L}}_2)\psi$ . Cela montre que l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}_2$  est le générateur associé à la transformation d'échelle spatiale introduite plus haut.

### 3-4 La tour d'états propres

Les relations de commutation entre les opérateurs  $\hat{\mathcal{L}}_i$  permettent de dégager une série de propriétés importantes du système, aussi bien sur le plan statique que dynamique (PITAEVSKII & ROSCH 1997).

Nous allons nous concentrer ici sur la recherche des états stationnaires et nous introduisons pour cela les deux opérateurs

$$\hat{\mathcal{L}}_{\pm} = \hat{\mathcal{L}}_1 \pm i\hat{\mathcal{L}}_2. \quad (79)$$

En utilisant le fait que  $\hat{\mathcal{L}}_3$  est proportionnel à  $\hat{H}$ , il est immédiat de vérifier que

$$[\hat{H}, \hat{\mathcal{L}}_{\pm}] = \pm 2\hbar\omega \hat{\mathcal{L}}_{\pm}. \quad (80)$$

Partant d'un état propre  $|\psi\rangle$  de  $\hat{H}$  d'énergie  $E$ , on déduit de cette relation que

$$\hat{H}(\hat{\mathcal{L}}_+|\psi\rangle) = (E + 2\hbar\omega)(\hat{\mathcal{L}}_+|\psi\rangle) \quad \hat{H}(\hat{\mathcal{L}}_-|\psi\rangle) = (E - 2\hbar\omega)(\hat{\mathcal{L}}_-|\psi\rangle) \quad (81)$$

Par application répétée de  $\hat{\mathcal{L}}_{\pm}$ , on génère ainsi une tour d'énergies propres  $E + 2n\hbar\omega$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si on se limite au cas d'un coefficient  $g$  suffisamment grand pour éviter la chute vers le centre ( $\alpha > -1/4$ ), on sait qu'il existe un état fondamental bien défini et que les énergies sont bornées inférieurement. La tour ainsi construite est donc semi-infinie, le bas de la tour correspondant à un état tel que  $\hat{\mathcal{L}}_-|\psi_{\text{bas}}\rangle = 0$ . Là encore, le résultat se transpose tel quel au cas de  $N$  particules en interaction présentant une invariance d'échelle (WERNER & CASTIN 2006).

On peut vérifier explicitement l'existence de cette tour d'états pour le cas de l'hamiltonien à une particule (61-62), en considérant par exemple les solutions isotropes. Introduisons la fonction d'onde radiale réduite  $u(r) = r\psi(r)$ , qui vérifie l'équation aux valeurs propres

$$-u''(r) + \left(\frac{\alpha}{r^2} + r^2\right)u(r) = \frac{2E}{\hbar\omega}u(r), \quad (82)$$

où les distances sont exprimées en unités de  $a_{\text{ho}} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ .

Cherchons une solution de cette équation sous la forme

$$u_0(r) = r^{s+1}e^{-r^2/2} \quad (83)$$

où l'enveloppe gaussienne est caractéristique des états propres de l'oscillateur harmonique. On trouve  $u$  est solution de (82) si et seulement si

$$E_0 = \hbar\omega \left(s + \frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad s^2 + s - \alpha = 0 \quad (84)$$

Nous avons déjà rencontré cette équation du second degré lors de notre recherche de la solution d'énergie nulle dans le potentiel en  $1/r^2$ . Nous allons nous concentrer ici sur le cas  $\alpha > -1/4$ , de sorte que les racines de cette équation sont réelles. Le cas  $\alpha < -1/4$ , conduisant à des racines

complexes, nécessite une régularisation du potentiel en  $1/r^2$  comme nous l'avons vu plus haut.

On doit choisir pour  $s$  la plus grande des deux racines possibles :

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}}, \quad (85)$$

cette racine étant toujours supérieure à  $-1/2$ . L'autre racine est quant à elle toujours inférieure à  $-1/2$  et elle conduirait à une intégrale divergente pour l'énergie potentielle moyenne. Notons que pour  $g = 0$ , on a  $s = 0$  et on retrouve l'état fondamental de l'oscillateur harmonique  $\psi(r) = e^{-r^2/2}$ .

L'état  $u(r)$  obtenu n'a pas de nœud en dehors de  $r = 0$  et correspond donc à l'état fondamental du problème. Quand l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}_+$  agit sur cet état, nous avons vu que cela génère une tour d'états d'énergie

$$E_n = \hbar\omega \left(2n + s + \frac{3}{2}\right) \quad (86)$$

À chaque étape, l'opérateur  $\hat{\mathcal{L}}_+$  fait intervenir  $\frac{d^2}{dr^2}$ ,  $r\frac{d}{dr}$ , ainsi que la multiplication par  $r^2$  et  $r^{-2}$ . On peut alors montrer assez simplement que la fonction d'onde  $u_n$  obtenue après  $n$  actions de  $\hat{\mathcal{L}}_+$  a la structure suivante :

$$u_n(r) = r^{s+1}e^{-r^2/2} P_n(r^2) \quad (87)$$

où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  [polynôme de Laguerre généralisé, WERNER & CASTIN (2006)]. La fonction  $u_n$  possède  $n$  racines positives et il s'agit du  $n$ -ème état excité.

L'action de  $\hat{\mathcal{L}}_+$  permet donc de générer tout le spectre de  $\hat{H}$  pour les états isotropes et d'obtenir les états propres correspondants. On peut également vérifier directement qu'un état de la forme (87) peut être solution de (82) en établissant la relation de récurrence entre les différents coefficients du polynôme  $u_n$ .

### 3-5 Le mode de respiration

PITAEVSKII & ROSCH (1997) ont montré qu'une manifestation spectaculaire de la symétrie dynamique liée au groupe  $SO(2,1)$  était l'existence

d'un mode de respiration non amorti (voir également KAGAN, SURKOV et al. (1996)). Ils ont étudié le cas d'un gaz de Bose à deux dimensions décrit par une théorie de champ classique, mais ce résultat s'étend aux autres systèmes présentant l'invariance conforme comme le gaz de Fermi à 3D dans le régime unitaire (CASTIN 2004; WERNER & CASTIN 2006), ou encore une assemblée de particules en interaction en  $1/r_{ij}^2$ , quelle que soit sa dimension d'espace (BENJAMIN, QUIROGA et al. 1996).

Nous allons montrer que l'évolution temporelle du second moment de la position  $\langle r^2 \rangle = \frac{2}{m\omega^2} \langle \hat{U}_{\text{ho}} \rangle$  est périodique, quelles que soient les conditions initiales. Nous utilisons pour cela les équations du mouvement des générateurs  $\hat{\mathcal{L}}_j$  en point de vue de Heisenberg :

$$\frac{d\hat{U}_{\text{ho}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{U}_{\text{ho}}] = -i 2\hbar\omega^2 [\hat{\mathcal{L}}_1, \hat{\mathcal{L}}_3] = 2\hbar\omega^2 \hat{\mathcal{L}}_2 \quad (88)$$

et

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}_2}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathcal{L}}_2] = i 2\omega [\hat{\mathcal{L}}_3, \hat{\mathcal{L}}_2] = 2\omega \hat{\mathcal{L}}_1 = \frac{1}{\hbar} (\hat{H} - 2\hat{U}_{\text{ho}}). \quad (89)$$

En combinant ces deux équations, on arrive à :

$$\frac{d^2\hat{U}_{\text{ho}}}{dt^2} + 4\omega^2\hat{U}_{\text{ho}} = 2\omega^2\hat{H}. \quad (90)$$

Prenons la moyenne de cette équation sur l'état initial. En utilisant le fait que  $\langle \hat{H} \rangle \equiv E$  est une constante du mouvement, on en déduit que le second moment de la position  $\langle r^2 \rangle$  obéit à l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2\langle r^2 \rangle}{dt^2} + 4\omega^2\langle r^2 \rangle = \text{Constante}} \quad (91)$$

Il évolue donc périodiquement en temps avec la période  $\pi/\omega$ .

Ce mode a été observé dans le cadre de gaz 2D décrits par l'équation de champ classique de Gross-Pitaevskii, et de faibles déviations dues à la nature quantique du mouvement des atomes ont également été mesurées (voir cours 2016-17, chapitre 6). En revanche, il n'a pas encore été mis en évidence expérimentalement pour des particules avec un potentiel d'interaction en  $1/r^2$ .

## 4 Le cas uni-dimensionnel

### 4-1 Le spectre du problème à $N$ corps

Dans un article célèbre, CALOGERO (1971) s'est intéressé au spectre de  $N$  particules bosoniques ou fermioniques évoluant sur un axe et interagissant deux à deux par un potentiel binaire en  $V(x_{ij}) \propto x_{ij}^2 + x_{ij}^{-2}$ , avec  $x_{ij} = x_i - x_j$ . Moyennant une transformation des variables, on peut ramener ce problème à une assemblée 1D de  $N$  particules évoluant sous l'effet de l'hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right) + \sum_{i < j} \frac{g}{(x_i - x_j)^2} \quad (92)$$

Ce problème peut être étendu au cas de particules bougeant librement sur un cercle de périmètre  $L$ , avec une interaction en  $\sin^{-2}(\pi(x_i - x_j)/L)$  (SUTHERLAND 1972).

Il nous faut tout de suite préciser les conditions aux limites sur les fonctions d'onde  $\Psi(x_1, \dots, x_N)$  éligibles. Considérons le cas  $N = 2$  pour simplifier. Pour que la moyenne de l'énergie potentielle soit non divergente, il faut que l'intégrale

$$\int \frac{g}{x^2} |\Psi(x, X)|^2 dx dX \quad (93)$$

soit convergente en  $x = 0$ , avec  $x = x_1 - x_2$  et  $X = (x_1 + x_2)/2$  qui désignent respectivement la variable relative et la variable du centre de masse. Quelle que soit la valeur non nulle de  $g$ , il faut donc que  $\Psi(x, X)$  s'annule plus vite que  $\sqrt{x}$  quand  $x \rightarrow 0$ . Cette condition est évidemment absente quand  $g$  est strictement nul. Cela entraîne qu'on ne peut pas espérer retrouver le cas de particules sans interaction en prenant la limite  $g \rightarrow 0$  dans ce qui suit, contrairement au cas 3D étudié plus haut (cf. §3-4).

Calogero a montré que ce problème est exactement soluble et que son spectre d'énergie est composé de valeurs équidistantes, séparées de  $2\hbar\omega$  quelle que soit la force du couplage  $g$  pourvu que  $\alpha > -1/4$  :

$$\boxed{E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{N(N-1)}{2} s + \frac{N^2}{2} \right)} \quad \text{avec} \quad s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{1}{4}} \quad (94)$$

où  $\alpha = mg/\hbar$  et où  $n$  est un entier positif ou nul ( $n = 1$  est exclu). Il a également trouvé la forme explicite de l'état fondamental (avec  $a_{ho} = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ ):

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{s+1} \exp\left(-\sum_i x_i^2/2a_{ho}^2\right) \quad (95)$$

qui est (comme on s'y attend) une fonction d'onde sans nœud en dehors des points  $x_i = x_j$ . On pourra vérifier à titre d'exercice que cette fonction d'onde est effectivement état propre de (92) avec la valeur propre  $E_n$  correspondant à  $n = 0$ . La dégénérescence de chaque niveau d'énergie donné en (94) est discutée en détail dans CALOGERO (1971).

**Cas de  $N = 2$  particules.** Dans ce cas, on peut séparer le mouvement du centre de masse, qui est purement harmonique avec un spectre en  $(n_1 + 1/2)\hbar\omega$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$ , et le mouvement de la particule relative, que nous avons étudié en §3-4. L'équation de Schrödinger régissant le mouvement relatif est

$$-\psi'' + \left(\frac{\alpha}{x^2} + x^2\right)\psi = \frac{2E}{\hbar\omega}\psi \quad (96)$$

où  $\alpha = 2m_r g/\hbar^2$  et où les distances sont exprimées en unité de  $\sqrt{\hbar/m_r\omega}$  avec  $m_r = m/2$  la masse relative. La transposition de (84-85) donne pour le mouvement relatif l'état fondamental  $\psi(x) = x^{s+1}e^{-x^2/2}$  et l'énergie  $\hbar\omega(s + 3/2)$  avec  $s$  donné en (94), d'où l'énergie totale du fondamental pour l'ensemble des deux mouvements  $E_0 = \hbar\omega(s + 2)$ . On retrouve bien l'énergie donnée en (94) en y insérant  $N = 2$ ,  $n = 0$ . L'état fondamental est

$$\begin{aligned} \Psi(x, X) &= x^{s+1} e^{-x^2 m\omega/4\hbar} e^{-X^2 m\omega/\hbar} \\ &= (x_1 - x_2)^{s+1} e^{-m\omega(x_1^2 + x_2^2)/2\hbar}. \end{aligned} \quad (97)$$

Le premier état excité, d'énergie  $\hbar\omega(s+3)$  est obtenu en plaçant le centre de masse dans son premier état excité, tout en laissant le mouvement relatif

2. Quand  $g \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$  et cette énergie tend vers  $2\hbar\omega$ , ce qui correspond au premier état excité de deux particules indépendantes placées dans un potentiel harmonique. On ne retrouve donc pas le fondamental du système à  $g$  strictement nul, ce qui est une conséquence de la condition imposée sur les fonctions d'onde, cf. discussion après (93).

dans son état fondamental. Les états excités du mouvement relatif, d'énergie  $\hbar\omega(2n + s + 3/2)$ , sont obtenus en construisant la "tour d'états" décrite en §3-4 (voir aussi WERNER (2008), appendice B).

## 4-2 Dynamique du système

Comme le spectre à  $N$  corps est composé de niveaux équidistants séparés de l'énergie  $\hbar\omega$ , on en déduit que toute observable va avoir une évolution périodique. En effet, un état initial quelconque  $|\Phi(0)\rangle$  va se décomposer sur la base des états propres  $|\Psi_\nu\rangle$  du système à  $N$  corps

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_\nu c_\nu |\Psi_\nu\rangle \quad (98)$$

pour donner l'état à l'instant  $t$  (à une phase globale près, sans importance):

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_\nu c_\nu e^{-in_\nu\omega t} |\Psi_\nu\rangle \quad (99)$$

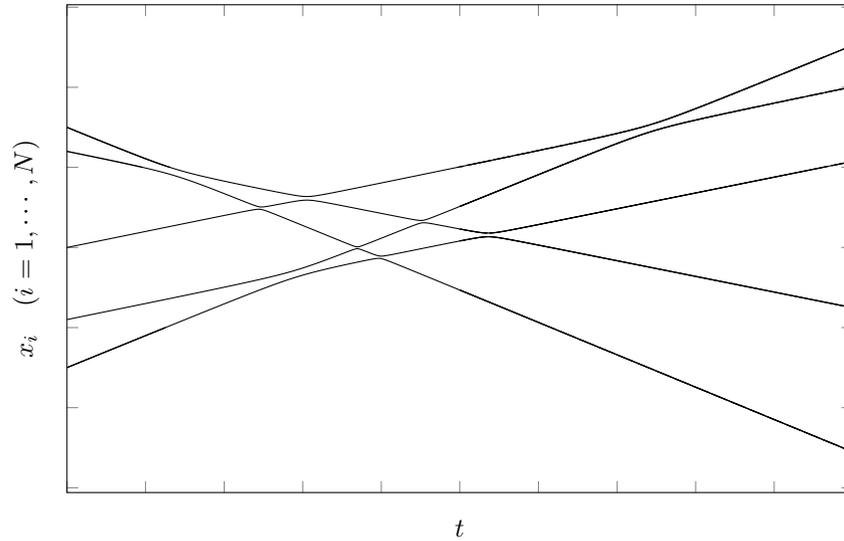
de sorte que toute valeur moyenne d'opérateur  $\hat{O}$  s'écrit :

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \sum_{\nu, \nu'} c_\nu^* c_{\nu'} \langle \Psi_\nu | \hat{O} | \Psi_{\nu'} \rangle e^{i(n_\nu - n_{\nu'})\omega t}. \quad (100)$$

Cette quantité est périodique, de période  $2\pi/\omega$ . Ce résultat valable à 1D est bien sûr beaucoup plus fort que la périodicité de  $\langle r^2 \rangle$  obtenue en §3-5 (mais celle-ci était valable en dimension quelconque).

## 4-3 Le mouvement classique

La simplicité remarquable trouvée pour le spectre du mouvement quantique se transcrit au mouvement classique des  $N$  particules. Pour  $g > 0$ , on peut montrer notamment le résultat suivant, illustré sur la figure 13. Partons d'un état asymptotique ( $t \rightarrow -\infty$ ) où les particules sont loin les unes des autres (énergie d'interaction négligeable) avec une numérotation  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$  et des vitesses initiales  $v_1 > v_2 > \dots > v_N$ . Les particules se regroupent sous l'effet de leurs vitesses initiales, puis se



**FIGURE 13.** Collision entre  $N = 5$  particules interagissant avec le potentiel bilinéaire  $g/(x_i - x_j)^2$ , avec  $g > 0$ .

séparent de nouveau. On trouve pour les vitesses finales  $v'_i$  :

$$v'_i = v_{N+1-i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (101)$$

c'est-à-dire un simple échange deux-à-deux des vitesses des particules, comme si les particules s'étaient croisées sans interagir !

Ce résultat résulte de l'intégrabilité du système à  $N$  corps pour un potentiel en  $1/r^2$ , pour lequel on peut exhiber  $N$  constantes du mouvement (CALOGERO 2003).

## Références

- ALFARO, V. de, S. FUBINI & G. FURLAN (1976), « Conformal invariance in quantum mechanics », in *Il Nuovo Cimento A* **34**, p. 569-612.
- ALHAIDARI, AD (2008), « Analytic solution of the wave equation for an electron in the field of a molecule with an electric dipole moment », in *Annals of Physics* **323**, p. 1709-1728.
- ALHAIDARI, AD & H BAHLOULI (2008), « Electron in the Field of a Molecule with an Electric Dipole Moment », in *Physical Review Letters* **100**, p. 110401.
- BENJAMIN, Simon C., Luis QUIROGA & Neil F. JOHNSON (1996), « Analytic results for the linear and nonlinear response of atoms in a trap with a model interaction », in *Phys. Rev. A* **54**, p. 4309-4314.
- BROWN, W Byers & Robert E ROBERTS (1967), « On the critical binding of an electron by an electric dipole », in *The Journal of Chemical Physics* **46**, p. 2006-2007.
- BURGESS, CP, Peter HAYMAN, Matt WILLIAMS & László ZALAVÁRI (2017), « Point-particle effective field theory I : classical renormalization and the inverse-square potential », in *Journal of High Energy Physics* **2017**, p. 1-35.
- CALOGERO, F. (1971), « Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials », in *Journal of Mathematical Physics* **12**, p. 419.
- CALOGERO, Francesco (2003), *Classical many-body problems amenable to exact treatments : (solvable and/or integrable and/or linearizable...)* in *One-, Two- and Three-Dimensional Space*, t. 66, Springer Science & Business Media.
- CAMBLONG, Horacio E, Luis N EPELE, Huner FANCHIOTTI & Carlos A García CANAL (2000), « Renormalization of the inverse square potential », in *Physical Review Letters* **85**, p. 1590.
- CAMBLONG, Horacio E, Luis N EPELE, Huner FANCHIOTTI & Carlos A García CANAL (2001a), « Dimensional transmutation and dimensional regularization in quantum mechanics : I. general theory », in *Annals of Physics* **287**, p. 14-56.
- CAMBLONG, Horacio E, Luis N EPELE, Huner FANCHIOTTI & Carlos A García CANAL (2001b), « Dimensional transmutation and dimensional regularization in quantum mechanics : II. rotational invariance », in *Annals of Physics* **287**, p. 57-100.

- CAMBLONG, Horacio E, Luis N EPELE, Huner FANCHIOTTI & Carlos A Garcia CANAL (2001c), « Quantum anomaly in molecular physics », in *Physical Review Letters* **87**, p. 220402.
- CASTIN, Yvan (2004), « Exact scaling transform for a unitary quantum gas in a time dependent harmonic potential », in *Comptes Rendus Physique* **5**, p. 407-410.
- CONNOLLY, Kevin & David J GRIFFITHS (2007), « Critical dipoles in one, two, and three dimensions », in *American Journal of Physics* **75**, p. 524-531.
- COULSON, CA & Mary WALMSLEY (1967), « The minimum dipole moment required to bind an electron to a finite electric dipole », in *Proceedings of the Physical Society (1958-1967)* **91**, p. 31.
- CRAWFORD, Oakley H (1967), « Bound states of a charged particle in a dipole field », in *Proceedings of the Physical Society (1958-1967)* **91**, p. 279.
- DESFRAŒOIS, C, H ABDOUL-CARIME, N KHELIFA & JP SCHERMANN (1994), « From  $1/r$  to  $1/r^2$  Potentials : Electron Exchange between Rydberg Atoms and Polar Molecules », in *Physical Review Letters* **73**, p. 2436.
- DESFRAŒOIS, C, N KHELIFA, A LISFI & JP SCHERMANN (1992), « State-selected Rydberg electron attachment to sulfur hexafluoride clusters at different collision energies », in *The Journal of chemical physics* **96**, p. 5009-5016.
- ESSIN, Andrew M & David J GRIFFITHS (2006), « Quantum mechanics of the  $1/x^2$  potential », in *American Journal of Physics* **74**, p. 109-117.
- GADWAY, Bryce & Bo YAN (2016), « Strongly interacting ultracold polar molecules », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **49**, p. 152002.
- GARRETT, WR (1980), « Critical binding of electron-dipole rotor systems; electronically excited states », in *The Journal of Chemical Physics* **73**, p. 5721-5725.
- GUPTA, Kumar S & SG RAJEEV (1993), « Renormalization in quantum mechanics », in *Physical Review D* **48**, p. 5940.
- HAGEN, C. R. (1972), « Scale and Conformal Transformations in Galilean-Covariant Field Theory », in *Phys. Rev. D* **5**, p. 377-388.
- KAGAN, Y., E. L. SURKOV & G. V. SHLYAPNIKOV (1996), « Evolution of a Bose gas under variations of the confining potential », in *Phys. Rev. A* **54**, R1753.
- LEVY-LEBLOND, Jean-Marc (1967), « Electron capture by polar molecules », in *Physical Review* **153**, p. 1.
- MITTLEMAN, MH & VP MYERSCOUGH (1966), « Minimum moment required to bind a charged particle to an extended dipole », in *Physics Letters* **23**, p. 545-546.
- NIEDERER, U. (1972), « The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation », in *Helvetica Physica Acta* **45**, p. 802.
- (1973), « The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator », in *Helvetica Physica Acta* **46**, p. 191.
- PAIK, Steve T (2018), « Teaching renormalization, scaling, and universality with an example from quantum mechanics », in *Journal of Physics Communications* **2**, p. 015016.
- PITAEVSKII, L. P. & A. ROSCH (1997), « Breathing mode and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions », in *Phys. Rev. A* **55**, R853.
- SAINT-JALM, R., P. C. M. CASTILHO, É. LE CERF, B. BAKKALI-HASSANI, J.-L. VILLE, S. NASCIMBENE, J. BEUGNON & J. DALIBARD (2019), « Dynamical Symmetry and Breathers in a Two-Dimensional Bose Gas », in *Phys. Rev. X* **9**, p. 021035.
- SUTHERLAND, Bill (1972), « Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II », in *Phys. Rev. A* **5**, p. 1372.
- TURNER, JE & Kenneth FOX (1966), « Minimum dipole moment required to bind an electron to a finite dipole », in *Physics Letters* **23**, p. 547-549.
- WALLIS, Richard F, Robert HERMAN & Harold Willis MILNES (1960), « Energy levels of an electron in the field of a finite dipole », in *Journal of Molecular Spectroscopy* **4**, p. 51-74.
- WERNER, Félix (2008), « Atomes froids piégés en interaction résonnante : gaz unitaire et problème à trois corps », thèse de doct.(Université Paris VI).
- WERNER, Felix & Yvan CASTIN (2006), « Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications », in *Phys. Rev. A* **74**, p. 053604.