Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut (Académie des Sciences), professeur

Le *cours* a exposé et complété des recherches récentes de M. Lars Gårding (Lund) sur des espaces de Sobolev utiles à la théorie des équations hyperboliques. Il s'est limité au cas où les fonctions et les distributions, qui sont les éléments de ces espaces, sont définies sur un espace vectoriel S de dimension l ; le cas où elles sont définies sur une bande X de dimension l + 1 sera étudié ultérieurement. Voici comment nous avons pu préciser l'étude du produit d'une fonction par une distribution, qu'a entreprise M. Lars Gårding, et le théorème de composition des fonctions, dû à M. Serge Sobolev, auquel cette étude du produit peut être rattachée.

Notons $\mathscr{C}$ (S) l'ensemble des fonctions S $\rightarrow$ **C** indéfiniment dérivables et à supports compacts, muni de la convergence uniforme sur tout compact ; son dual $\mathscr{C}'$ (S) est l'espace des distributions définies sur S ; la valeur de f $\in \mathscr{C}'$ (S) en h $\in \mathscr{C}$ (S) est notée

$$(f, h) = \int_S f(x)\, h(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l .$$

Notons Rf la régularisée de f, c'est-à-dire sa convolution f $*$ h par un h $\in \mathscr{C}$ (S) tel que : h (x) $\geqslant$ o, pour tout x ; $\int_S h(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l = 1$; nous disons que le régularisateur R tend vers l'identité quand le support de h tend vers l'origine ; lim désigne la limite pour R tendant vers l'identité ; R' désigne un second régularisateur.

Etant donnés f et g $\in \mathscr{C}'$ (S), nous définissons *le produit* f. g par la relation $f.\, g = \lim\limits_{R, R'} (Rf).(R'g)$ quand cette limite existe dans $\mathscr{C}'$ (S) ; sinon ce produit ne sera pas défini.

Il possède les propriétés suivantes. Il est commutatif et distributif par rapport à l'addition.

Si f $\in \mathscr{C}'$ (S) et g $\in \mathscr{C}$ (S), alors f. g est défini et (f. g, h) = (f, g. h), $\forall$ h $\in \mathscr{C}$ (S).

Si f et g $\in \mathscr{C}'$ (S), si h $\in \mathscr{C}$ (S), si f. g et f. (g . h) sont définis, alors on a la règle d'associativité :

$$(f \,.\, g) \,.\, h = f \,.\, (g \,.\, h).$$

Notons D_S le gradient ; si f . g et (D_S f) . g sont définis, alors f . D_S g l'est aussi et l'on a :

$$D_S (f \,.\, g) = (D_S f) \,.\, g + f \,.\, (D_S g).$$

Soit B un espace de Banach $\in \mathscr{C}'$ (S), qui soit invariant par les translations de S et par la multiplication par tout élément de $\mathscr{C}$ (S) et dans lequel $\mathscr{C}$ (S) soit dense ; si f appartient localement à B et si g appartient localement à son dual B', alors le produit f . g est défini. [« f appartient localement à ... » signifie : « f . h appartient à ..., pour tout h $\in \mathscr{C}$ (S) »].

Précisons ce dernier résultat : définissons sur $\mathscr{C}$ (S) les normes :

$$|f, S|_p = \left[\textstyle\int_S |f|^p \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l\right]^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leqslant p < \infty \; ; \; |f, S|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)| \; ;$$

$$|D^u f, S|_p = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \,|\, D_S^\alpha f, S|_p$$

où $u \in \mathbf{Z}_+$ (entiers $\geqslant$ o), D_S^α est la dérivation d'ordre $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$

et $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l \leqslant u$;

$$(1) \quad |D^u f, S|_p = \sup_h \frac{|f, h)|}{|D^{-u} h, S|_{p'}}$$

où $- u \in \mathbf{Z}_+$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, h $\in \mathscr{C}$ (S).

La théorie, maintenant classique, de la dualité des espaces de Banach montre ceci : (1) définit sur $\mathscr{C}'$ (S), pour tout (u, p), une quasi-norme (c'est-à-dire une fonction ayant les propriétés de la norme mais pouvant prendre la valeur $+ \infty$) duale de la norme $|D^{-u}., S|_{p'}$; $|D^{-u}., S|_{p'}$ et $|D^u., S|_p$ sont deux normes de $\mathscr{C}$ (S) duales l'une de l'autre ; la quasi-norme $|D^u., S|_p$ de $\mathscr{C}'$ (S) est la régualarisée semi-continue inférieurement de la norme $|D^u., S|_p$ de $\mathscr{C}$ (S) ; si $1 < p < \infty$, alors les deux définitions suivantes définissent un même espace réflexif L^u_p (S) : L^u_p (S) est le complété de $\mathscr{C}$ (S) suivant la norme $|D^u., S|_p$; L^u_p (S) est l'ensemble des f $\in \mathscr{C}'$ (S) tels que $|D^u f, S|_p < \infty$. Cet espace est un espace de fonctions si $u \geqslant$ o, de distributions si $u \leqslant$ o ; il est nommé espace de Sobolev ; L^u_p (S) et $L^{-u}_{p'}$ (S) sont duals l'un de l'autre ;

le produit f . g est donc défini si localement f et g appartiennent respectivement à L^u_p (S) et $L^{-u}_{p'}$ (S).

Mais le problème que pose la théorie des équations hyperboliques linéaires est celui-ci : quand le produit par un élément de $\mathscr{C}'$ (S) applique-t-il un espace de Sobolev donné dans un autre ? Le produit par une constante a cette propriété ; or les fonctions constantes n'appartiennent pas aux espaces de Sobolev L^u_p (S) ($1 < p < \infty$). Définissons d'autres sous-espaces de $\mathscr{C}'$ (S), qui contiennent les fonctions constantes.

Soit K un cube unité de S ; définissons

$$|f, K|_p = [\textstyle\int_K |f|^p dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l]^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leqslant p < \infty \text{ ; } |f, K|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| \text{ ;}$$

$$\|D^u f, K\|_p = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} | D^\alpha_g f, K|_{p_\alpha} \quad \text{où } |\alpha| \leqslant u, \ \frac{1}{p_\alpha} = \left(\frac{1}{p} - u + |\alpha|\right)_+ ;$$

$$\|D^u f, S\|_p = \sup_K \|D^u f, K\|_p \text{ , pour tout K cube unité, et } u \in \mathbf{Z}_+ \text{ ;}$$

si $u < o$ définissons

$$\|D^u f, S\|_p = \sup_h \frac{|(f, h)|}{|D^{-u} h, S|_{p'}} \quad \text{où } h \in \mathscr{C}_1 \text{ (S),}$$

$\mathscr{C}_1$ (S) étant l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}$ (S) dont le support appartient à un cube unité.

Voici *le théorème du produit* que ces définitions permettent d'obtenir :

1) Le produit définit une application

$$L^u_p \text{ (S) x } L^v_q \text{ (S)} \rightarrow L^w_r \text{ (S)}$$

quand on a

$$(2)_1 \quad 1 < p \leqslant \infty, \ 1 < q \leqslant r < \infty$$

et

$$(2)_2 \quad \left\{ \begin{array}{lll} w \leqslant u & w \leqslant v & o \leqslant u + v \\ w - \frac{1}{r} \leqslant u - \frac{1}{p} & w - \frac{1}{r} \leqslant v - \frac{1}{q} & o \leqslant u - \frac{1}{p} + v - \frac{1}{q} + 1 \\ & w - \frac{1}{r} \leqslant u - \frac{1}{p} + v - \frac{1}{q} & \end{array} \right.$$

sans avoir ni

$$\widetilde{(2)}_1 \qquad 0 = u - \frac{1}{p} + v - \frac{1}{q} + 1,\ w + \frac{1}{r'} = 0$$

ni

$$\widetilde{(2)}_2 \qquad w - \frac{1}{r} = u - \frac{1}{p},\ v = \frac{1}{q}.$$

2) Le produit définit une application

$$\mathbf{L}^u_p\,(S) \times \mathbf{L}^v_q\,(S) \to \mathbf{L}^w_r\,(S)$$

quand on a

$$1 < p \leqslant \infty,\ 1 < p \leqslant \infty\ ;\ 1 < r \leqslant \infty$$

et $(2)_2$ sans avoir $\widetilde{(2)}_1$.

Note. — Les conditions $q \leqslant r$ de $(2)_1$ et $w - \frac{1}{r} \leqslant v - \frac{1}{q}$ de $(2)_2$ impliquent la condition $w \leqslant v$ de $(2)_2$.

Exemples. — De *1*) résulte le théorème de Sobolev :

$$L^v_p\,(S) \subset L^w_r\,(S) \text{ si } 1 < q \leqslant r < \infty,\ w - \frac{1}{r} \leqslant v - \frac{1}{q}.$$

De *2*) résulte que $\mathbf{L}^u_p\,(S)$ est une algèbre (dite algèbre de Sobolev) si $\frac{1}{p} \leqslant u$.

Ce théorème du produit résulte d'un théorème de composition des fonctions ne se limitant pas au cas où ces fonctions appartiennent à des algèbres de Sobolev ; ce théorème, que voici, est utile à la théorie des équations non linéaires.

Notons $Y = \mathbf{C}^n$, $u \in \mathbf{Z}_+$ et $\mathbf{P}$ une fonction de $y = \{y_1, \dots, y_n\} \in Y$ ayant l'expression $\mathbf{P}\,(y) = \sum_\omega c_\omega\, y^\omega$

où $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $y^\omega = y_1^{\omega_1} \dots y_n^{\omega_n}$,

$\omega_j \geqslant 0$, $\omega_j \in \mathbf{Z}_+$ si $\omega_j \leqslant u$, $c_\omega > 0$, l'ensemble des ω est fini.

Etant donné $f : S \times Y \to \mathbf{C}$, notons $F_\alpha\,(x)$ les plus petites fonctions telles que

$$\left| D^\alpha_x D^\beta_y f(x, y) \right| \leqslant F_\alpha\,(x)\, D_{|y|}\, P\,(|y|) \text{ pour } |\alpha| + |\beta| \leqslant u.$$

Nommons $\mathbf{L}^u_p,{}_P\,(S \times Y)$ l'espace de Banach ayant pour éléments les f telles que

$$F_\alpha \in \mathbf{L}_{p_\alpha}\,(S), \text{ où } \frac{1}{p_\alpha} = \left(\frac{1}{p} - u + |\alpha|\right)^+.$$

Donnons-nous n espaces

$$L'^{v_i}_{q_i}(S) \text{ ou } L^{v_i}_{q_i}(S), \text{ où } i \in \{1, \ldots, n\} ; v_i \geqslant o ;$$

i sera dit *exceptionnel* si $v_i - \frac{1}{q_i} \in \mathbf{Z}_+$ et $1 < q_i < \infty$;

ω sera dit *exceptionnel* quand l'une des conditions suivantes sera vérifiée.

1) il existe j tel que : $\omega_j > o,\ v_j = \frac{1}{q_j},\ 1 < q_j < \infty,\ u \leqslant \frac{1}{p}$;

2) il existe j et k tels que : $\omega_j > o,\ v_j = \frac{1}{q_j},\ 1 < q_j < \infty,\ j \neq k,$

$$\omega_k > o,\ v_k \leqslant \frac{1}{q_k}.$$

Par exemple, aucun i ni aucun ω n'est exceptionnel quand aucun q_i ne divise l, en particulier dans le cas important pour les applications : $q_i = 2$, l impair.

Donnons-nous $g_i \in L^{v_i}_{q_i}$ ou $L^{v_i}_{q_i}$; notons f o g la fonction composée telle que

$$(f \circ g)(x) = f[x, g_1(x), \ldots g_n(x)] ;$$

ses propriétés sont données par *le théorème de composition* que voici :

1) Supposons $g_i \in L^{v_i}_{q_i}(S)$; alors $f \circ g \in L^w_r(S)$ quand on a

$(3)_1$ $\quad o \leqslant w \leqslant u,\ w \leqslant v_i,\ \forall\, i,$

$(3)_2$ $\quad w - \frac{1}{r} \leqslant u - \frac{1}{p},\quad w - \frac{1}{r} \leqslant v_i - \frac{1}{q_i},\ \forall\, i,$

$(3)_3$ $\quad \left(\frac{1}{p} - u\right)_+ + \sum_i \omega_i \left(\frac{1}{q_i} - v_i\right)_+ \leqslant \left(\frac{1}{r} - w\right)_+,\ \forall\, \omega.$

2) Supposons $g_i \in L^{v_i}_{q_i}(S)$ et $r < \infty$; alors $f \circ g \in L^w_r(S)$ quand on a

$(3)_1$, $(3)_2$,

$(3)_3$, avec $< \left(\frac{1}{r} - w\right)_+$ quand ω est exceptionnel,

$(3)_4$ $\quad \frac{1}{r} \leqslant \sum_i \frac{\omega_i}{q_i},\ \forall\, \omega.$

3) Supposons $g_i \in L^{v_i}_{q_i}(S)$; alors $f \circ g \in L^{w}_{r}(S)$

quand on a $(3)_1$,

$(3)_2$, avec $< v_i - \dfrac{1}{q_i}$ quand i est exceptionnel,

$(3)_3$, avec $< \left(\dfrac{1}{r} - w\right)_+$ quand ω est exceptionnel et $r < \infty$.

⁂

Le *séminaire* a porté sur les sujets suivants :

J. J. MOREAU, *Théorie des fonctionnelles convexes et applications* (3 exposés) ;

S. MIZOHATA, *Problèmes aux bords, de type mixte, pour des équations hyperboliques ;*

J. L. LIONS, *Méthode d'approximation, par « éclatement » des données et des contraintes, de la solution de certains problèmes de calcul des variations ou d'inégalités variationnelles ;*

J. LERAY, *Les lois de réflexion pour les systèmes elliptiques d'équations du second ordre à coefficients constants dans le plan, d'après J. M. Sloss ;*

M. BAOUENDI, *Problèmes elliptiques dégénérés ;*

F. TREVES, *Zones d'analyticité des solutions élémentaires ;*

M. DURAND, *Les travaux de Višik et d'Eskin sur les équations de convolution elliptiques et paraboliques* (4 exposés) ;

J. LERAY, *Données de Cauchy portées par une caractéristique double, d'après J. Vaillant.*

Cet enseignement a été complété par deux cours donnés, dans la chaire des savants étrangers, par G. FICHERA, professeur à l'Université de Rome, sur les problèmes d'élastostatique à contrainte unilatérale, et par S. SOBOLEV, professeur aux Universités de Moscou et Novosibirsk, sur la théorie du calcul numérique de l'intégrale.

PUBLICATIONS

— Edition ronéotypée du Séminaire et du Cours.

— Rédaction du *Bulletin de la Société mathématique de France* et du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Jean LERAY, *Fonction de Green m - harmonique ; flexion de la bande élastique, homogène, isotrope à bords libres* (*Proceedings of the international symposium on the applications of the theory of functions in continuum mechanics,* TBILISI, septembre 1963, éditions Nauka, Moscou, p. 217-225 ; reproduit par les *Annales des Ponts et Chaussées,* 1965, t. 135, p. 3-10) ;

Jean LERAY et Y. OHYA, *Systèmes linéaires hyperboliques non stricts* (Deuxième colloque sur l'analyse fonctionnelle, Liège, mai 1964, CBRM ; Gauthiers-Villars, p. 105-144).

J. LERAY et L. WAELBROECK, *Norme formelle d'une fonction composée* (préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts) [*Ibidem,* p. 145-152].

J. LERAY, *L'invention en mathématique, Logique et connaissance scientifique* (sous la direction de Jean Piaget) [Encyclopédie de la Pléiade, N.R.F., 1967, p. 465-473].

MISSIONS

Symposium sur la topologie des espaces à une infinité de dimensions, à Baton-Rouge (Lousiane), une conférence sur l'indice des points fixes.

Une conférence à l'Université de Chicago et au M. I. T. (Boston) exposant un complément aux théorèmes de N. Nilsson sur les intégrales des formes différentielles à support singulier algébrique.

DISTINCTION HONORIFIQUE

Docteur *honoris causa* de l'Université de Chicago.