Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours a poursuivi l'étude des classes de Nilsson : Nils(T). T désigne un espace affine complexe, de dimension finie, et Nils(T) la classe des fonctions numériques F ayant les propriétés suivantes :

1) F est défini et holomorphe sur le revêtement simplement connexe de $T \setminus Ss[F]$, où Ss[F] est une *hypersurface algébrique* de T, nommée *support singulier* de F ;

2) F est donc une fonction analytique multiforme de $t \in T \setminus Ss[F]$; on suppose toutes ses branches combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles (c'est-à-dire : F *ζ-fuchsienne*) ;

3) on suppose F à *croissance lente* à l'infini et sur Ss[F], en un sens que Nilsson a précisé.

Le cours a rapidement exposé les compléments que deux cours antérieurs ont apportés aux résultats de Nilsson :

— d'après Nilsson, l'intégration, sur un cycle γ de X, d'une forme différentielle ω appartenant à Nils($T \times X$), définit le germe d'une fonction F appartenant à Nils(T) ; le problème de construire effectivement Ss[F] se pose ; Nilsson ne l'a pas traité ; nous l'avons résolu à l'aide de la notion d'appui ; mais c'est une notion algébrique, générale et peu maniable ; elle a cependant une interprétation géométrique commode quand $Ss[\omega]$ est une réunion d'hypersurfaces sans singularité ;

— les résultats de Nilsson, sauf peut-être la propriété de croissance lente de F, s'étendent au cas où γ est un cycle de X, relatif à une réunion d'hyperplans qui dépendent algébriquement de t ;

— des variantes peuvent être données à la définition de la croissance lente qui permettent d'étudier la restriction à un plan R de T d'un élément F de Nils(T) : quand, près d'un point de R, une branche de F a une restriction (indépendante de la direction suivant laquelle on s'approche de R), alors cette restriction est le germe d'une fonction f appartenant à Nils(R) ; Ss[f] appartient à l'ensemble des points de R dont l'ordre, par rapport à l'hypersurface algébrique Ss[F], est exceptionnel, c'est-à-dire : strictement supérieur à l'ordre d'un point générique de R.

Ces résultats s'appliquent, par exemple, aux intégrales de Feynman, dont on connaît l'intérêt en théorie quantique des champs : ils montrent que ces intégrales définissent des fonctions de la classe de Nilsson. Il serait important de construire explicitement leur support singulier. C'est peut-être possible, par une succession de restrictions habilement choisies, à partir du cas suivant (qui est un cas générique, alors que celui de Feynman est un cas très singulier) :

Soit $\mathscr{M}$ un ensemble fini de $|\mathscr{M}|$ polynômes v de $x \in X = \mathbf{C}^l$, ayant des degrés $\leqq \pi_v$, les π_v étant des entiers donnés. Soit un vecteur constant,

$$a = \{a_v\} \in \mathbf{C}^{|\mathscr{M}|},$$

vérifiant la condition

$$\sum_{v \in \mathscr{M}} a_v \, \pi_v + l + 1 = 0.$$

Soit M l'ensemble des v tels que a_v ne soit pas entier $\geqq 0$; on suppose générique, de degré π_v pair, tout $v \in M$; on note t l'ensemble des coefficients de ces $v \in M$ et T l'espace décrit par t ; la valeur de v en x est notée v[t,x]. Si $v \in \mathscr{M} \setminus M$, alors v est supposé indépendant de t. Notons

$$\xi = \{\xi_o, \ldots, \xi_l\} \in \mathbf{C}^{l+1}$$

$$v(t,\xi) = (\xi_o)^{\pi_p} \, v[t,x] \quad \text{où} \quad x_k = \xi_k / \xi_o \,, \qquad x = \{x_1, \ldots, x_l\} \,;$$

v est donc homogène en ξ.

Soit C_T la partie de ReT où $v(t,\xi) > 0$ pour tout $v \in M$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^{l+1}$; pour $t \in C_T$, notons

$$v^a[t,x] = \prod_{v \in \mathscr{M}} (v[t,x])^{a_v},$$

où, si $v \in M$, $v^{a_v} = e^{a_v \log v}$, $\log v \in \mathbf{R}$.

Définissons sur C_T

$$F(t) = \int_{\mathrm{Re}X} v^a[t,x] \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l.$$

Alors, F est le germe d'une fonction de Nils(T), dont le support singulier est aisé à décrire :

$$Ss[F] \subset \bigcup_{\substack{N \subseteq M \\ |N| \leqq l+1}} S_T(V_N)$$

où $S_T(V_N)$ est l'hypersurface de T *enveloppe* de l'hyperplan de T d'équation

$$\sum_{\nu \in N} \varrho_\nu \, v(t,\xi) = 0 ;$$

cet hyperplan dépend du paramètre $\xi \in \mathbf{C}^{l+1}$ et du paramètre

$$\varrho = \{\varrho_\nu\} \in \mathbf{C}^{|N|}.$$

Par restriction, on traite à partir du cas précédent le suivant : certains des v[t,x] sont assujettis à avoir même partie principale ; les v[t,x] sont les polynômes génériques vérifiant ces conditions. On obtient des conclusions analogues.

D'autres restrictions permettent alors de déterminer le support singulier dans des cas se rapprochant de celui de Feynman (qui est celui où chaque π_ν vaut 2 et chaque v[t,x] dépend de x par 4 fonctions linéaires de x) ; l'étude de ces cas n'a pu être achevée et le cas de Feynman n'a pas été abordé.

***

Le séminaire a consisté en les exposés suivants :

J.-L. LIONS, *Sur les inégalités variationnelles* ;

A.-P. CALDERON, *Calcul analytique de l'indice des opérateurs elliptiques* ;

D. FOTIADI, *Obtention de fonctions à support singulier algébrique* ; *fonctions de Feynman* ;

F. PHAM, *Tresses de fonctions algébriques, d'après Arnold* ;

F. PHAM, *Formule de Picard-Lefschetz* ;

Y. CHOQUET-BRUHAT, *Solutions asymptotiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles* ;

A. WIGHTMAN, *Exposé de la thèse de Speer sur la renormalisation, l'interpolation et la sommation des intégrales de Feynman* ;

R. GÉRARD, *Théorie de Fuchs sur une variété analytique* ;

T. KOTAKE, *Le théorème des points fixes d'Atiyah-Bott, via les opérateurs paraboliques*.

Des compléments à cet enseignement ont été apportés par trois cours (de quatre leçons chacun) dans la Chaire des Savants étrangers :

N. BOGOLUBOV (Moscou), *Sur quelques problèmes de mécanique statistique* ;

L. GÅRDING (Lund), *Lacunes des opérateurs hyperboliques* ;

L. Nirenberg (New York), *Remarques sur la résolubilité locale des opérateurs hyperboliques* ; *Normes intrinsèques sur les variétés analytiques complexes.*

Publications

— Edition ronéotypée du Séminaire.

— Rédaction du *Bulletin de la Société mathématique de France* et du *Journal de mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

J. Leray et Y. Ohya, *Equations et systèmes non-linéaires, hyperboliques non stricts* (*Math. Annalen,* t. 170, p. 167-205).

Missions

— Rencontre de Mathématiciens et Physiciens, à l'Institut Battelle de Seattle ; exposés sur les classes de Nilsson, les opérateurs hyperboliques non stricts, les solutions élémentaires des opérateurs hyperboliques analytiques.

— Cours à l'Université libre de Bruxelles, dans la chaire von Neuman sur les *Problèmes biharmoniques, bandes élastiques et ponts-plaques* et sur *Le calcul différentiel et intégral sur les variétés analytiques complexes.*

— Participation au Colloque international organisé par le C.N.R.S. à Lille sur la *Magnétohydrodynamique classique et relativiste* ; exposé sur les *Systèmes hyperboliques non stricts.*

Distinctions

Associé étranger à l'Académie des Sciences, des Lettres et des Arts de Palerme.