Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours a étudié les propriétés de la solution élémentaire d'un opérateur hyperbolique holomorphe.

Soient : $X = R^l$; $x \in X$; $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur hyperbolique d'ordre m ; E(x,y) *sa solution élémentaire*. C'est une distribution de $x \in X$ et de $y \in Y$

— définie pour x et y voisins d'un point où a est hyperbolique ;

— nulle dans le demi-espace $x_1 < y_1$, si les coordonnées $(x_1, \ldots, x_l)$ de X sont choisies telles que l'hyperplan $x_1 = y_1$ soit spatial pour a au point étudié ;

— vérifiant

$$(1) \quad a(x, \frac{\partial}{\partial x})E(x,y) = \delta(x-y) \;, \quad a^*(\frac{\partial}{\partial y}, y)E(x,y) = \delta(x-y) \,,$$

où δ est la mesure de Dirac et a^* l'adjoint de a : $a^*(\xi,y) = a(y,-\xi)$, chaque dérivation de $a^*(\frac{\partial}{\partial y},y)u$ opérant sur le produit par u de son coefficient.

La solution élémentaire donne, par quadrature, la solution u de tout *problème de Cauchy* bien posé :

$$\begin{cases} au = v \,, \\ \text{les dérivées de u d'ordres} < m \text{ sont données sur une hypersurface spatiale,} \end{cases}$$

Par exemple, si ces dérivées données sont nulles :

$$u(x) = \int_X E(x,y)v(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_l$$

Nous noterons $g(x,\xi)$ le *polynome caractéristique* de $a(x,\frac{\partial}{\partial x})$, c'est-à-dire la partie principale du polynome $a(x,\xi)$ de ξ ; nous noterons $\mathrm{Hess}_\xi\,[g(x,\xi)]$ son *hessien,* c'est-à-dire le déterminant de ses dérivées secondes en ξ. Nous étudierons un point où $a(x,\frac{\partial}{\partial x})$ est holomorphe, $\frac{\partial g}{\partial \xi} \neq 0$, $\mathrm{Hess}\,[g] \neq 0$ pour tout ξ réel tel que $g(x,\xi) = 0$.

L'objet du cours est une expression de E qui fournit *ses propriétés analytiques* et certains *renseignements numériques.*

RÉSULTATS THÉORIQUES. — X sera un espace affine ; ξ désignera une fonction linéaire (homogène ou non) définie sur X, à valeurs dans **C** ; la valeur de ξ en x est notée

$$\xi.x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l \ ;$$

les ξ sont les vecteurs d'un espace vectoriel $R = \mathbf{C}^{l+1}$; soit $\dot{\Xi} = \Xi - 0$ et $\Xi^* = \dot{\Xi}/\mathbf{C}$ son quotient par le groupe de ses homothéties : Ξ^* est un espace projectif de dimension l ; un point ξ^* de Ξ^* est un hyperplan de X ; ses « coordonnées homogènes » $(\xi_0,\ldots,\xi_l)$ celles de tout vecteur ξ de Ξ dont il est l'image ; notons

$$\omega^*(\xi) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^j\, \xi_j d\xi_0 \wedge\ldots \widehat{d\xi_j} \ldots\wedge d\xi_l \quad (\widehat{\ } \text{ supprime ce qu'il coiffe}) \ ;$$

si $f(\xi)$ est une fonction homogène de degré $-l-1$, alors $f(\xi)\omega^*(\xi)$ est une forme différentielle définie sur l'espace projectif Ξ^*.

Etudions d'abord un opérateur homogène, à coefficients constants, $a(\frac{\partial}{\partial x})$, que nous noterons $g(\frac{\partial}{\partial x})$.

Nous voulons calculer la valeur de E en (x,y). Nous disposons dans Ξ^*

— de la variété algébrique réelle G^*, $g(\xi) = 0$;

— de la forme différentielle $\dfrac{(\xi.x)^{m-l-1}\omega^*(\xi)}{g(\xi)}$ de degré l, qui est fermée et holomorphe hors de G^*, si $m > l$, ce que nous supposerons d'abord ;

— de l'hyperplan x^* : $\xi.x = 0$;

— de l'hyperplan y^* : $\xi.y = 0$.

Ce couple d'hyperplans, supposé en position générale par rapport à G^*, permet de définir comme suit une classe d'homologie $h(\Xi^*-G^*,x^*\cup y^*)$ de dimension l, sur laquelle on peut intégrer cette forme différentielle.

Si l est *impair,* l'espace projectif réel Re Ξ^*, de dimension l , est orientable ; nous l'orientons de façon que

$$\omega^*(\xi) < 0$$

et nous notons $h(\Xi^* — G^*, x^* \cup y^*)$ la classe d'homologie de la partie de Re Ξ^* où $(\xi.x)(\xi.y) < 0$, ainsi orientée et détournée de G^* [au sens où Cauchy détourne l'axe réel d'un pôle pour calculer une partie principale].

Si l est *pair,* c'est Re G^* qui peut être orienté, de façon que

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_1} \quad \frac{\omega^*(\xi)}{dg(\xi)} < 0 \ ;$$

en effet, vu l'hyperbolicité, $\dfrac{\partial g}{\partial \xi_1} \neq 0$ pour $g = 0$; nous notons alors $h(\Xi^* — G^*, x^* \cup y^*)$ la classe d'un cycle fibré

— dont la base est la partie de Re G^* où $(\xi.x)(\xi.y) < 0$ ainsi orientée ;

— dont la fibre est une circonférence faisant un tour, dans le sens positif, autour de G^*.

[Notons $h(G^*, x^* \cup y^*)$ la classe d'homologie de cette base ; $h(\Xi^* — G^*, x^* \cup y^*)$ est appelée cobord de $h(G^*, x^* \cup y^*)$; le morphisme cobord est noté δ ; il sert à formuler le théorème du résidu.]

La solution élémentaire de l'opérateur hyperbolique, homogène à coefficients constants, d'ordre $m > l$, $g(\dfrac{\partial}{\partial x})$ est

$$E(x.y) = \pounds[\frac{1}{g(\xi)}]$$

en définissant

$$(2) \quad \pounds[f](x.y) = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\Xi^* — G^*, x^* \cup y^*)} \frac{(\xi.y)^{m-l-1}}{(m—l—1)\ !} f(\xi,y)\omega^*(\xi)$$

pour toute fonction $f(\xi,y)$, holomorphe hors d'un voisinage de G^* et homogène en ξ de degré $—m$, tel que $m > l$.

Ce résultat est dû à *G. Herglotz* (1926) et *I. Petrowsky* (1945) qui l'ont obtenu par transformation de Laplace, l'homogénéité permettant une intégration par partie qui remplace l'intégration dans Ξ par une intégration

dans x^* et $e^{\xi.y}$ par $\dfrac{(\xi.y)^{m-l-1}}{(m—l—1)\ !}$:

Une transformation du type de celle de Laplace $f \mapsto \mathcal{L}[f]$ est définie par la formule (2) : elle transforme une *fonction* f, homogène en ξ de degré $-m$ ($m > l$) et holomorphe en (ξ,y) au voisinage des points de y^* où $g(\xi) \neq 0$, en *un germe de fonction analytique* de (x,y), défini quand x est suffisamment voisin de y dans une direction quelconque, n'appartenant pas au cône $C(y)$ de X enveloppe des hyperplans ξ^* de X qui sont les points de la variété algébrique de Ξ^* :

$$g^* : \xi.y = 0 \ , \ g(y,\xi) = 0 \, .$$

On constate que *ce germe de fonction se prolonge analytiquement en une* fonction $\mathcal{L}[f]$ de (x,y), définie quand x et y sont suffisamment voisins et ayant pour support singulier un conoïde $K(y)$ de sommet y, tangent à $C(y)$ en y, *si la forme différentielle*

$f(\xi,y)\omega^*(\xi)$ (ou $f(\xi)d\xi_0 \wedge ... \wedge d\xi_l$, c'est équivalent)

est uniformisable ; c'est-à-dire s'il existe une application holomorphe $\Psi \times X \to \Xi$, d'un type que nous allons préciser, telle que la composée de cette forme différentielle et de cette application soit holomorphe.

Ψ est un voisinage de y^* dans le produit $\mathbf{C} \times y^*$ que nous notons Φ : un point de Φ a pour coordonnées (t,η) où $t \in \mathbf{C}$, $\eta \in y^*$; l'application $\Psi \times X \to \Xi$ est notée :

$$(t,\eta,y) \mapsto \xi(t,\eta,y)$$

et l'on exige qu'elle vérifie la condition initiale

$$\xi(0,\eta,y) = \eta$$

et la condition d'homogénéité

$$\xi(\theta^{1-m}t,\theta\eta,y) = \theta\xi(t,\eta,y).$$

Ces conditions impliquent que

$$\left.\frac{D(\xi(t,\eta,y))}{D(t,\eta)}\right|_{t=0} = \frac{\partial\xi_0}{\partial t}(0,\eta,y) + \frac{\partial\xi_1}{\partial t}y_1 + ... + \frac{\partial\xi_l}{\partial t}y_l$$

soit un polynome en η homogène de degré m , qui est nécessairement $g(\eta,y)$, à un facteur près indépendant de η.

Par exemple la forme différentielle $\dfrac{1}{g(\xi)}\, d\xi_0 \wedge ... \wedge d\xi_l$, qu'on rencontre dans la formule d'Herglotz-Petrowsky et où g est indépendant de ξ_0, est uniformisée par l'application :

$$\xi_0 = t\, g(\eta) - \sum_{j=1}^{l} \xi_j y_j \ , \ \xi_j = \eta_j \ ;$$

sa composée avec cette application est en effet la forme holomorphe

$$dt \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l.$$

L'uniformisation transforme l'intégrale (2) qui définit $\pounds[f]$ en l'intégrale d'une forme holomorphe sur une classe d'homologie compacte dans l'espace Φ quotient de Φ par le groupe à un paramètre θ

$$\theta \ : \ (t,\eta) \mapsto (\theta^{1-m}t, \theta\eta).$$

Cette nouvelle intégrale permet le prolongement analytique de $\pounds[f]$ décrit ci-dessus. Cette intégrale est étendue à une classe d'homologie, dont la définition (Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962) est malaisée quand l est pair ; il serait intéressant de la simplifier.

On constate que $\pounds[f]$ a les propriétés suivantes, qui permettent d'étendre sa définition aux fonctions f homogènes en ξ de degré entier $-m$ quelconque :

$\pounds[f]$ est une distribution en x (en y) fonction de y (de x) ; si les f_j sont simultanément uniformisables :

$$\sum_j c_j(y)\pounds[f_j] = \pounds[\sum_j c_j(y) f_j] \ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \pounds[f] = \pounds[\frac{\partial f}{\partial y_j}] \ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \pounds[f] = \pounds[\xi_j f] \ ;$$

$$(m - l - 1 - \sum_{j=1}^{l} x_j \frac{\partial}{\partial x_j})\pounds[f] = \pounds[\xi_0 f] \ ; \tag{3}$$

$$x_j \pounds[f] = -\pounds[\frac{\partial f}{\partial \xi_j}] \text{ pour } x \neq y \ ;$$

$$\pounds[f] = -\pounds[\frac{\partial f}{\partial \xi_0}] \ ;$$

$$\pounds[1] = \delta(x-y)$$

Cette dernière formule (1) résulte de celle d'Herglotz et Petrowsky.

On peut prouver que f est un monomorphisme.

---

(1) Elle exige et, plus généralement, la définition de $\pounds[f]$ pour $x = y$ exige que f soit « rationnellement uniformisable » (loc. cit.).

La transformation £ fournit *une expression de la solution élémentaire* E de $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$: cherchons une expression de E du type

$$E = £[f] .$$

Les formules (3) transforment l'équation $(1)_2$ $a^*E = \delta$ en le problème de Cauchy-Kowalewski :

$$(4) \quad \begin{cases} a^*(y.\frac{\partial}{\partial y})f(\xi,y) = 1 \\ f(\xi,y) \text{ s'annule m fois pour } \xi.y = 0 , \end{cases}$$

car cette condition aux limites est nécessaire pour que f et ses dérivées d'ordre $< m$ soient uniformisables. On constate qu'elles sont effectivement uniformisées par la solution $\xi(t,\eta,y)$ du problème suivant : trouver $\xi(t,\eta,y)$ et $x(t,\eta,y)$ solutions *du système d'Hamilton.*

$$(5) \quad dx_j = \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial \xi_j} dt , \quad d\xi_j = - \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x_j} dt$$

vérifiant les conditions initiales :

$$x(0,\eta,y) = y , \quad \xi(0,\eta,y) = \eta ,$$

la première composante $\xi_o(t,\eta,y)$ étant telle que

$$d\xi_o = [\sum_j x_j \frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x_j} - g]dt$$

c'est-à-dire telle que $\xi.x + (1-m)tg$ soit indépendant de t.

La solution du problème de Cauchy (1.4) est appelée *solution unitaire* de l'opérateur a^* et est notée U^* ; on note $U^*_p = (-\frac{\partial}{\partial \xi_o})^p U^*$; on a, vu (1.3), *l'expression suivante de la solution élémentaire :*

$$(6) \quad E = £[U^*_p] \textit{ pour tout } p \leqq m .$$

Dans les applications, le choix le plus commode est $p = m$: U^*_m est appelé *onde unitaire* de l'opérateur a^*.

Nous avons employé la seconde des équations (1) ; si $a(x,\frac{\partial}{\partial y})$ est à coefficients polynomiaux, notons

$$A(x_0,x_1,\ldots,x_l;\xi) = x_0^n a(\frac{x}{x_0},x_0\xi)$$

n ayant la plus petite valeur telle que A soit un polynome ; vu (3), l'équation $(1)_1$ $aE = \delta$ conduit, si l'on pose $E = \pounds[f]$, au problème de Cauchy d'ordre $m+n$

$$\begin{cases} A(-\frac{\partial}{\partial\xi},\xi)f(\xi,y) = 1 \\ f(\xi,y) \text{ s'annule } m+n \text{ fois pour } \xi.y = 0\,. \end{cases}$$

Nous retrouvons la même expression de E, car $a^*(y,\frac{\partial}{\partial y})$ *et* $A(-\frac{\partial}{\partial\xi},\xi)$ *ont la même onde unitaire.* Signalons que les deux opérateurs a et A ont mêmes bi-caractéristiques et que la transformation de Legendre transforme les caractéristiques de a en celles de A ; l'opérateur A est nommé *transformé de Laplace de l'opérateur* a.

La formule (6) : $E = \pounds[U_p^*]$, fournit *les propriétés analytiques de la* solution élémentaire E : Quand x et y sont voisins, E *se ramifie sur le conoïde caractéristique* K(y) de sommet y ; toutes ses branches sont *combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles ;* elles sont *à croissance lente* sur K(y). En résumé : E a une allure *ζ-fuchsienne.*

Note. — Ces propriétés résultent donc des propriétés plus simples de la solution du problème de Cauchy-Kowalewski : en ses points singuliers, c'est-à-dire sur la caractéristique tangente à la variété portant les données de Cauchy, elle est en général *algébroïde* (c'est-à-dire a un nombre de branches fini) et elle est toujours *uniformisable.* On peut en outre donner en ces points un développement asymptotique de cette solution.

Résultats numériques. — L'allure de E(x,y) sur le conoïde caractéristique K(y) peut être déterminée. Nous avons défini $\xi(t,\eta,y)$ et $x(t,\eta,y)$ par un système d'Hamilton ; K(y) est l'enveloppe de l'hyperplan $\xi^*(t,\eta,y)$ quand $g(y,\eta) = 0$; son point caractéristique est $x(t,\eta,y)$.

Au voisinage de K(y) — y , définissons une fonction k(x,y) , nulle pour $x\in K(y)$ par la condition :

$$\xi(t,\eta,y).x(t,\eta,y) = |t|^{\frac{1}{1-m}}\, k(x(t,\eta,y),y) \text{ pour tout } (t,\eta)\,.$$

Cette fonction vérifie :

$$\xi_j = |t|^{\frac{1}{1-m}} k_{x_j}, \eta_j = -|t|^{\frac{1}{1-m}} k_{y_j}, g(x,k_x) = \pm \frac{k}{m-1} = (-1)^m g(x,k_y),$$

$$\text{dét}(k_{x,y}) \neq 0 \text{ pour } k = 0,$$

ce déterminant étant celui des dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x_i \partial y_j}$.

Si l est *impair*, le signe de k est indéterminé ; nous le choisirons tel que

$$\text{dét}(k_{x,y}) < 0 .$$

Si l est *pair* nous nommerons *positives* (ou négatives) les nappes de K(y) sur lesquelles

$$\text{dét}(k_{x,y}) > 0 \text{ (ou } < 0) .$$

Nous définirons sur K(y) une fonction λ par l'adjonction au système d'Hamilton de l'équation :

$$d\lambda = [g'(x,\xi) - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial \xi_j}]dt ; \qquad \lambda|_{t=0} = 0 ;$$

$g'(x,\xi)$ est la partie principale de $a(x,\xi) - g(x,\xi)$.

Nous définirons sur **R** une distribution χ_p comme suit :

$$\chi_p[k] = \frac{k^p}{\Gamma(p+1)} > 0 \text{ si } k > 0 \text{ et } p+\tfrac{1}{2} = \text{entier} \geqq 0 ,$$

$$= 0 \qquad \text{si } k < 0 \text{ et } p+\tfrac{1}{2} = \text{entier} \geqq 0 ,$$

$$= \frac{k^p}{p!}\frac{1}{2}\operatorname{sgn} k + \frac{k^p}{p!}\frac{1}{\pi i}[\log|k| - 1 - \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{p}] \text{ si } p = \text{entier} \geqq 0 ,$$

$$\chi_{p-1}[k] = \frac{d\chi_p[k]}{dk} \text{ pour tout p tel que 2p soit entier.}$$

Alors (si a est réel), *il existe des fonctions* $H_j(x,y)$, *holomorphes pour* x *voisin de* K(y) - y, *telles que*

(7) $E(x,y) = \text{Re}\{H_1(x,y)\chi_{m-1-l/2}[k] + H_2\chi_o[k] + H_3(x,y)$ »

si l est *impair*, alors $H_2 = 0$, H_1 et H_3 sont réels ;

si l est *pair*, alors $H_2 = 0$ pour $l/2 < m$, H_3 est réel, H_1 et H_2 sont imaginaires purs près des nappes positives et réels près des nappes négatives.

On peut expliciter la partie principale de la singularité de E :

$$H_1(x,y) = \frac{m-1}{i(2\pi)^{l/2-1}} \sqrt{\text{dét}(k_{x,y})}\, e^{-\lambda(x,y)} \quad \text{pour } x \in K(y) .$$

Note. — Il est théoriquement possible d'obtenir, plus généralement, un développement asymptotique de E pour x voisin de K(y).

Considérons des opérateurs spéciaux. Nommons *opérateur général de Tricomi* $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ l'opérateur dont les coefficients principaux sont linéaires, sous-principaux constants, les autres étant nuls :

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x}) = g(x, \frac{\partial}{\partial x}) + g'(\frac{\partial}{\partial x}),$$

g étant linéaire en x, homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$ d'ordre m ; g′ indépendant de x, homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$ d'ordre m-1.

Le transformé de Laplace A de a est un opérateur du premier ordre ; pour A, le problème de Cauchy se réduit au calcul des bicaractéristiques.

La solution élémentaire E de l'opérateur général de Tricomi *s'obtient donc, pour* x *et* y *voisins, par quadrature, après que le système d'Hamilton ait été intégré.*

Expliciter ce calcul n'est pas aisé en général. Pour que E ait une expression élémentaire, il est évidemment nécessaire que son support singulier K(y) en ait une.

Nommons *opérateur de Tricomi-Clairaut* un opérateur de Tricomi, dont l'équation caractéristique est du type de Clairaut, c'est-à-dire admet pour intégrale complète un hyperplan : K(y) *est alors un cône.*

M^me^ S. Delache (Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969) a étudié les opérateurs de Tricomi-Clairaut

$$a(\alpha;x, \frac{\partial}{\partial x}) = k_m(\frac{\partial}{\partial x}) + (\sum_{j=1}^{l} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha)k_{m-1}(\frac{\partial}{\partial x})$$

(k_i homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$, d'ordre i), que caractérise la propriété suivante : l'adjoint de $a(\alpha;x,\frac{\partial}{\partial x})$ est

$$a^*(\alpha;x,\frac{\partial}{\partial x}) = (-1)^m\, a(l+m-1-\alpha;x,\frac{\partial}{\partial x}) .$$

Elle a donné des expressions remarquablement simples de leur solution élémentaire $E(\alpha;x,y)$; elles fournissent le prolongement analytique de $E(\alpha;x,y)$ et, par exemple, les relations suivantes :

$$\frac{\partial E(\alpha-1;x,y)}{\partial x_j} + \frac{\partial E(\alpha;x,y)}{\partial y_j} = 0$$

$$(8) \qquad (\alpha - m + \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial y_j})E(\alpha-1;x,y) + (l - \alpha + \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_j})E(\alpha;x,y) = 0 .$$

Donnons-en une démonstration différant un peu de la sienne, pour montrer quel usage peut être fait des résultats généraux exposés ci-dessus :

Preuve de (8). — Le transformé de Laplace A de a permet de calculer U^*_{m-1} ; on obtient :

$$U^*_{m-1}(\alpha;\xi,y) = -\frac{1}{(l-\alpha)k_{m-1}}\left[\left(\frac{k_m-\xi_0 k_{m-1}}{k_m+\sum_{j=1}^{l}\xi_j y_j\, k_{m-1}}\right)^{l-\alpha} - 1\right].$$

D'où, par un calcul élémentaire :

$$\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_0} U^*_{m-1}(\alpha-1;\xi,y) = \frac{\partial}{\partial y_j} U^*_{m-1}(\alpha;\xi,y) ,$$

$$(l-\alpha+1-\xi_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0})U^*_{m-1}\,(\alpha-1;\xi,y) = (l-\alpha+\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j})U^*_{m-1}\,(\alpha;\xi,y).$$

On peut appliquer $\mathcal{L}$ à ces relations ; vu (3), on obtient (8).

L'opérateur de Tricomi-Clairaut du second ordre qu'a étudié M[me] Delache est donc l'opérateur

$$a(\alpha;x,\frac{\partial}{\partial x}) = Q(\frac{\partial}{\partial x}) + (\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha)L(\frac{\partial}{\partial x})$$

où

$Q(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\, \xi_i \xi_j$ est hyperbolique , $L(\xi) = \sum_j L_j\, \xi_j$ $(i,j = 1,\dots,l)$.

En complétant des calculs qu'elle n'a pas publiés, on exprime comme suit sa solution élémentaire $E(\alpha;x,y)$ *au moyen de la fonction hypergéométrique.*

Notons $H = \left| \operatorname{Hess}_{\xi} Q(\xi) \right| = \underset{ij}{\text{dét}}\, (Q_{ij})$,

$$q(x,y) = (-1)^{l-1}\, \text{dét} \left| \begin{array}{c|c} x_i & 0 \\ \hline Q_{ij} & y_j \end{array} \right| , \quad q(x) = q(x,x) ,$$

$$f(x) = [q(L,x) - H]^2 - q(L)q(x) , \text{ où } L = (L_1 ,\dots,L_l) ;$$

a est hyperbolique pour $f(x) > 0$, c'est-à-dire hors d'un paraboloïde ; ses hyperplans tangents sont une intégrale complète de l'équation caractéristique de a.

$K(y)$ est un cône d'équation $k(x,y) = 0$, où

$$k(x,y) = \begin{vmatrix} q(L) & q(L,x) - H & q(L,y) - H \\ q(L,x) - H & q(x) & q(x,y) \\ q(L,y) - H & q(x,y) & q(y) \end{vmatrix}$$

Notons l'opérateur hypergéométrique

$$h(A,B,C;t,\frac{d}{dt}) = t(1-t)\frac{d^2}{dt^2} + [C - (A+B+1)t]\frac{d}{dt} - AB, \quad (t \in R) ;$$

toute distribution φ définie sur R près de 0, nulle pour $t < 0$ et vérifiant l'équation

$$h(A,B,C;qt, \frac{1}{q}\frac{d}{dt})\, \varphi = 0$$

est, égale, à un facteur constant près, à la suivante :

$$\Phi(A,B,C;q,t) = \frac{d^p}{dt^p} [\chi'_{p+1-C}\, [t]\; F(A+1-C,B+1-C,p+2-C;qt)] ;$$

$\dfrac{d^p}{dt^p}$ est la dérivée de Riemann-Liouville ; p est un nombre complexe arbitraire ; Φ est indépendant de son choix ; $\chi' = \operatorname{Re} \chi_p$, χ_p étant défini au n° 2.1 ; F est la fonction hypergéométrique.

L'expression de la solution élémentaire de a *est*

(9)
$$E(\alpha;x,y) = \pi^{1-\frac{l}{2}}\, H^{\frac{l}{2}-1}\, f(x)^{\frac{1-\alpha}{2}}\, f(y)^{\frac{\alpha-l}{2}}\, \Phi\left(\frac{\alpha-1}{2}, \frac{l-\alpha}{2}, \frac{l}{2}; q(L), \frac{k(x,y)}{f(x)f(y)}\right) .$$

Cette formule se déduit de la suivante (10) par le changement de variables (P. Germain) qui transforme l'opérateur de Tricomi-Clairaut du second ordre en le suivant :

L'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux, qui fut récemment étudié par A. Weinstein et son école (Maryland) est l'opérateur

$$a_\alpha(x, \frac{\partial}{\partial x}) = L(x)Q(\frac{\partial}{\partial x}) + 2\alpha\, Q(L_x, \frac{\partial}{\partial x}),$$

où $Q(\xi)$ est une forme quadratique hyperbolique, $Q(\xi,\eta) = \frac{1}{2} \sum_j \eta_j \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}$ sa forme polaire, L une fonction linéaire, homogène ou non, L_x son gradient. C'est donc un opérateur de Tricomi, dont l'équation caractéristique est indépendante de x et dont l'adjoint est $a^*_\alpha = a_{\alpha-1}$.

L'équation de K(y) est $k(x-y) = 0$, en notant k(x) la forme quadratique définie par l'élimination de ξ des relations :

$$2k(x) = \sum_{j=1}^{l} \xi_j x_j \quad , \quad x = \frac{\partial Q}{\partial \xi}.$$

L'expression de la solution élémentaire de a_α est :

(10) $E_\alpha(x,y) =$

$$(2\pi)^{1-l/2} H^{-\frac{1}{2}} L(x)^{1-\alpha-l/2} L(y)^{\alpha-l/2} \Phi(\frac{l}{2} + \alpha - 1, \frac{l}{2} - \alpha, \frac{l}{2}; -Q(L_x), \frac{k(x-y)}{L(x)L(y)}),$$

où $H = |\text{Hess } Q|$.

Mme R. *Davis* a montré que E_α s'exprime au moyen de la fonction hypergéométrique, sans donner à son résultat la forme précédente (Annali di matematica, 42, 1956).

***

Le séminaire a consisté en les exposés suivants :

D. Fotiadi, *Pratique de la désingularisation des graphes de Feynman* (deux exposés) ;

J.-L. Lions, *Remarques sur les inégalités variationnelles liées aux équations de Navier-Stokes* ;

Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, *Aspect global du problème de Cauchy en relativité générale* ;

P.-A. RAVIART, *Méthode de pseudoviscosité et équation des ondes non linéaires* ;

L. SCHWARTZ, *Applications radonifiantes* ;

P. SCHAPIRA, *Utilisation des hyperfonctions dans les problèmes elliptiques* ;

R. KNILL, *Local fixed point index for compact maps and non compact domains* ;

J. VAILLANT, *Opérateurs différentiels fortement hyperboliques* ;

H. BREZIS, *Inéquations variationnelles paraboliques* ;

B. MALGRANGE, *Sur les idéaux de fonctions différentiables.*

PUBLICATIONS

— Edition ronéotypée du *Séminaire.*

— Rédaction du *Bulletin de la Société mathématique de France* et du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de *Notes* aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

— *Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales des formes différentielles à support singulier algébrique* (*Bull. Soc. math. France,* t. 95, p. 313-374).

MISSIONS

Un exposé à l'Institut des Hautes Études scientifiques : *Solutions turbulentes des équations de la mécanique des fluides.*

Un exposé au Colloque sur les problèmes d'évolution à l'Istituto Nazionale di Alta Matematica : *Les propriétés de la solution élémentaire d'un opérateur hyperbolique et holomorphe.*

Un exposé au Colloque Poitou-Aquitaine : *Application de la théorie des résidus à la théorie des distributions.*