Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours a étudié les solutions approchées du type *V.P. Maslov* (Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, en russe, M.G.U., 1965 ; en cours de traduction par J. Lascoux, Dunod éditeur). Maslov a construit des solutions approchées d'une équation linéaire aux dérivées partielles. Le cours a adapté cette construction à un système, tout en la précisant. Elle se décompose en la construction d'une *phase,* d'une *amplitude* et d'un indice, nommé *indice de Maslov.*

NOTATIONS. — Sur $X = \mathbf{R}^l$, soit un système, où les u^μ sont des fonctions inconnues, à valeurs dans $\mathbf{C}$,

$$(1) \qquad \sum_\mu a^\nu_\mu(\varepsilon, x, \frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial x}) u^\mu(\varepsilon, x) = 0 \qquad (x \in X\,;\ \varepsilon \in \mathbf{R}\,;\ \mu, \nu \in \{1, \ldots, N\})\,;$$

ε est un paramètre, voisin de 0 ; $a^\nu_\mu(\varepsilon, x, \frac{p}{i})$ est un polynome en ε et p ; $p \in P$, dual de X. Définissons les g^ν_μ par les relations

$$(2) \qquad a^\nu_\mu(\varepsilon, x, \frac{p}{i}) \equiv \varepsilon^{m_\mu - n_\nu} g^\nu_\mu(x, p) \qquad \text{mod } \varepsilon^{m_\mu - n_\nu + 1},$$

où les m_μ et n_ν sont entiers ; d'après Volevič, on peut les choisir tels que

$$\prod_\nu g^\nu_{\mu(\nu)}(x, p) \neq 0$$

pour au moins une permutation $\nu \mapsto \mu(\nu)$ de $\{1, \ldots, N\}$; nommons polynome *ε-caractéristique* le polynome, indépendant du choix de m_μ et n_ν :

(3) $$g(x,p) = \underset{\mu,\nu}{\text{dét.}} \, |g^{\nu}_{\mu}(x,p)| ;$$

nous supposons [ce qui est sans rapport avec l'ellipticité ou l'hyperbolicité de (1)] que la variété de $X \oplus P$ d'équation

(4) $$g(x,p) = 0$$

n'est pas vide et vérifie la condition

$$g_x \oplus g_p \neq 0 \text{ pour } g = 0, \text{ (où } g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, \; g_p = \frac{\partial g}{\partial p}).$$

LA PHASE. — *Supposons connue* une sous-variété *lagrangienne* M de la variété (4), c'est-à-dire une variété de $X \oplus P$ qui ait la dimension l et sur laquelle

(5) $$g(x,p) = 0, \; \sum_{k=1}^{l} dp_k \wedge dx_k = 0$$

Il existe donc, sur le revêtement simplement connexe $\widetilde{M}$ de M, une fonction $\varphi : \widetilde{M} \to \mathbf{R}$, nommée *phase*, telle que

(6) $$d\varphi = \sum_{k=1}^{l} p_k \, dx_k.$$

L'AMPLITUDE. — Appliquons la théorie d'*E. Cartan* des caractéristiques des formes différentielles ; dans le cas présent, cette théorie s'identifie à celle de la résolution de l'équation aux dérivés partielles du premier ordre $g(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}) = 0$: M est localement fibré par des *ε-bicaractéristiques*, c'est-à-dire par des solutions du système d'*Hamilton* :

(7) $$\frac{dx}{dt} = g_p(x,p), \; \frac{dp}{dt} = -\, g_x(x,p), \; g(x,p) = 0,$$

la variable t servant de coordonnée sur ces fibres. Soit y l'ensemble des coordonnées de la base ; le déterminant fonctionnel

(8) $$\frac{D(x)}{D(t,y)} = \chi^{-1}(x,p)$$

est défini localement sur M, à un facteur près, fonction de y ; *supposons* qu'on ait pu choisir ce facteur tel que $\chi^{-1}(x,p)$ soit une fonction : $M \to \mathbf{R}$, s'annulant une fois sur *le contour apparent* Σ de M ; ce contour apparent Σ est, par définition, l'ensemble des points de M où existe une tangente $\dot{x} \oplus \dot{p}$ à M telle que $\dot{x} = 0$.

Signalons une autre définition, équivalente, de χ : la forme différentielle

$$\text{(9)} \qquad \chi(x,p) \sum_{k=1}^{l} (-1)^k g_k(x,p) dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \ldots \wedge dx_l$$

($\frown$ supprime ce qu'il coiffe) est une forme invariante des ε-bicaractéristiques qui fibrent M, c'est-à-dire est une forme des seules coordonnées y.

Définissons localement sur M un vecteur de composantes $h^\mu(x,p)$ tel que

$$\text{(10)} \qquad \sum_\mu g^\nu_\mu(x,p)\, h^\mu(x,p) \equiv 0 \bmod g(x,p)\,;$$

dans le cas particulier où la matrice (g^ν_μ) est symétrique, nous choisirons les h^μ tels que le mineur G^μ_ν de g^ν_μ ait l'expression :

$$\text{(11)} \qquad G^\mu_\nu(x,p) \equiv h^\mu(x,p)\, h^\nu(x,p) \bmod g(x,p).$$

L'*amplitude* est le vecteur de composantes

$$\text{(12)} \qquad \sqrt{\frac{\varrho(x,p)}{|\chi(x,p)|}}\; h^\mu(x,p)\,;$$

ϱ est une fonction $M \to \mathbf{R}_+$, que définit localement une intégration le long des ε-bicaractéristiques, analogue à l'intégration par laquelle [3] construit la matrice bicaractéristique.

Limitons-nous ici à l'énoncé suivant : d'une part, (11) définit $h^\mu(x,p)$, mod g, globalement sur $\widetilde{M}$ et globalement, au signe près, sur M, d'autre part

$$\text{(13)} \qquad \varrho(x,p) = \varrho(x),$$

quand X est muni d'une mesure $\varrho(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l$ ayant la propriété suivante : le système (1) est ε-*self-adjoint* ; c'est-à-dire : l'ε-adjoint de

$$a^\mu_\nu\left(\varepsilon, x, \frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

est

$$(-1)^{m_\mu - n_\nu}\, a^\nu_\mu\left(\varepsilon, x, \frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right);$$

par définition, l'ε-adjoint de l'opérateur

$$\sum_\alpha a_\alpha(\varepsilon,x)\left(\frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha. \quad \text{est} \quad \frac{1}{\varrho(x)} \sum_\alpha \left(\frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha [\varrho(x)\, a_\alpha(-\varepsilon, x).]$$

L'INDICE DE MASLOV a été défini par Maslov, Novikov et Arnold et étudié par *V.I. Arnold* (Sur la classe caractéristique qui figure dans les conditions de quantification ; Analyse fonctionnelle, 1, n° 1, 1967, p. 1-14, en russe) ; cette étude est celle *de propriétés topologiques des variétés lagrangiennes,* c'est-à-dire vérifiant (2). Cet indice est une fonction à valeurs entières :

$$(14) \qquad n : \widetilde{M} \to \mathbf{Z}$$

qui est localement constante sur $M \backslash \Sigma$; en un point de Σ possédant un seul vecteur $\dot{x} \oplus \dot{p}$, tangent à M, tel que $\dot{x} = 0$, n subit le saut

$$(15) \qquad \text{signe} \sum_j g_{p_j p_k} \dot{p}_j \dot{p}_k \text{ (signe f} = 1 \text{ si f} > 0, = -1 \text{ si f} < 0),$$

le long de l'ε-bicaractéristique, orientée dans le sens $dt > 0$, qui contient ce point (si elle est transverse à Σ).

Nous *supposons* que le vecteur

$$(1) \qquad h^\mu(x,p)\ e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(x,p) + \frac{\pi i}{2} n(x,p)}$$

prend les mêmes valeurs en tous les points de $\widetilde{M}$ se projetant en un même point de M : il est donc défini sur M.

Note. — On peut employer à sa place le vecteur

$$h^\mu\ e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi - \frac{\pi i}{2} n}$$

5. UNE SOLUTION APPROCHÉE du système (1) est alors

$$(17) \qquad u^\mu(\varepsilon,x) = \varepsilon^{-m_\mu} \sum_\alpha \sqrt{\frac{|\chi(x,p_\alpha)|}{\varrho(x)}}\ h^\mu(x,p_\alpha) e^{\frac{i}{\varepsilon}\varphi(x,p_\alpha) + \frac{\pi i}{2} n(x,p_\alpha)},$$

où la somme est étendue aux $x \oplus p_\alpha \in M$, se projetant sur X en x ; on suppose leur nombre fini ; quand il est nul, $u^\mu(\varepsilon,x) = 0$.

Note. — On a

$$(18) \qquad \chi(x,p) = |\chi(x,p)| e^{\pm \pi i\, n(x,p)} ;$$

l'indice de Maslov sert donc à définir sans ambiguité sur $\widetilde{M}$ deux déterminations de $\sqrt{\chi}$:

$$\sqrt{|\chi|}\ e^{+\frac{\pi i}{2} n(x,p)} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{|\chi|}\ e^{-\frac{\pi i}{2} n(x,p)}$$

LES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DÉFINISSANT LES FONCTIONS PROPRES DE SCHRÖDINGER ET DE DIRAC, où la constante de Planck $\hbar$ joue le rôle de ε, montrent les difficultés que rencontre l'application de ce procédé et aussi son intérêt : M est un tore à 3 dimensions, dépendant de 3 entiers, les 3 nombres quantiques caractérisant les solutions exactes de ces équations ; les solutions approchées ainsi obtenues précisent quantativement les relations existant entre la mécanique ondulatoire et la mécanique corpusculaire.

*
**

Le séminaire a consisté en les exposés suivants :

M^me^ Y Choquet-Bruhat, *Problème de Cauchy pour le système intégro-différentiel d'Einstein-Liouville* ;

E. Combet, *Paramétrix et invariants sur les variétés compactes* ;

G. Pichon, *Problèmes mathématiques de l'équation de Boltzmann relativiste* ;

J.-C. de Paris, *Problème de Cauchy oscillatoire à caractéristiques multiples : solution asymptotique* (deux exposés) ;

L. Tartar, *Un théorème de trace non linéaire* ;

R. Temam, *Dualité en calcul des variations et application aux hypersurfaces minimales* ;

P. Grisvard, *Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur* (deux exposés).

Publications

— Edition ronéotypée du *Séminaire.*

— Rédaction du *Bulletin de la Société mathématique de France* et du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de *Notes* aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Jean Leray et Pham the Lai, *Sur le calcul des transformées de Laplace par lesquelles s'exprime la flexion de la bande élastique, homogène, à bords libres,* (*Arkiwum Mechaniki Stosowanej,* 20, p. 113-122).

Jean Leray, *L'iniziazione alla matematica* (*Bollettino della Unione matematica italiana,* serie IV, anno III, p. 87-94).

Missions

Tagung über partiellen Differentialgleichungen, Oberwolfach, Allemagne fédérale : un exposé sur *le problème de Cauchy analytique, à données de Cauchy singulières.*

Congrès

Présidence du *Congrès international des mathématiciens à Nice* (1er-10 septembre 1970) et du Comité d'organisation de ce Congrès.