Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean Leray, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours a esquissé une théorie des solutions formelles des systèmes d'équations aux dérivées partielles, au sens de V. Maslov (traité en russe, M.G.U., 1965 ; traduction par J. Lascoux à paraître chez Dunod).

Le cours précédent avait explicité le calcul des solutions formelles de tout système à caractéristiques simples (« caractéristique » sera entendu au sens de Maslov) ; un tel système est défini sur un espace $X = \mathbf{R}^l$, dont le dual est noté P ; ce calcul s'effectue sur une variété lagrangienne V de $X \oplus P$ (dim $V = l$; les variétés lagrangiennes sont celles où $\sum_j dp_j \wedge dx_j = 0$; V appartient à l'hypersurface de $X \oplus P$ où s'annule le polynôme caractéristique du système. Les coefficients successifs d'une solution formelle possèdent des singularités polaires d'ordre croissant ; leur support singulier est le contour apparent Σ de V, relatif à la projection sur X parallèlement à P ; Σ est en outre le support des discontinuités de l'indice que Maslov introduit dans la définition des solutions formelles et dont V. Arnold a donné une définition apparentée à celle des classes de cohomologie caractéristiques de Pontryagin. Le cours précédent avait laissé sans réponse le problème de savoir en quel sens, sur Σ, ces solutions formelles vérifient le système donné ; le cours de cette année l'a expliqué, au moyen des définitions et des propriétés que voici.

Notons i $\mathbf{R}_+$ le demi-axe imaginaire de C ; soit B l'anneau des fonctions numériques et bornées de $\lambda \in i\mathbf{R}_+$; les éléments de B dont le produit par λ^N est borné (N : entier > 0) constituent un idéal B_N de B ; soit $B_\infty = \bigcap_N B_N$; c'est un idéal ; $\tilde{B} = B/B_\infty$ est un anneau ; notons $\tilde{f}$ l'image dans $\tilde{B}$ de $f \in B$; $\tilde{f}$ est nommée *classe asymptotique* de f ; les images dans $\tilde{B}$ des voisinages de l'origine des B_N constitueront un système fondamental de voisinages de l'origine de $\tilde{B}$.

Nous définissons de même l'espace vectoriel B(X) des fonctions de λ à valeurs dans $L^2(X)$, où $X = \mathbf{R}^l$, puis le module $\tilde{B}(X)$ des classes asymptotiques $\tilde{f}$ et sa topologie. Le produit scalaire $\int_X f(x,\lambda)g(x,\lambda)d^lx$ de f et $g \in B(X)$ appartient à B ; sa classe d'équivalence ne dépend que des classes $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de f et g ; elle est notée

$$\tilde{\int}_X \tilde{f}(x,\lambda)\tilde{g}(x,\lambda)d^lx\,;$$

l'opérateur $\tilde{\int}$ est nommé *intégrale asymptotique*. Notons $\mathscr{F}_p^x$ la transformation de Fourier et $\mathscr{F}_x^p$ son inverse : pour chaque valeur de λ, $\mathscr{F}_p^x$ est une isométrie de $L^2(X)$ sur $L^2(P)$:

$$(\mathscr{F}_p^x f)(p,\lambda) = \left(-\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{l/2} \int_X e^{-<p,x>\lambda} f(x,\lambda)d^lx$$

$$(\mathscr{F}_x^p g)(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{l/2} \int_P e^{<p,x>\lambda} g(p,\lambda)d^lp$$

quand f et g sont sommables ; nous notons $< p,x >$ la fonction bilinéaire définissant la dualité de X et P ; $\mathscr{F}_p^x$ induit une bijection

$$\tilde{\mathscr{F}}_p^x : \tilde{B}(X) \rightarrow \tilde{B}(P),$$

qui est nommée *transformée de Fourier asymptotique*.

Si $f \in B$ est tel que, pour tout N entier > 0 :

$$f \equiv \sum_{j \in J} \alpha_{jN}(\lambda)\, e^{\lambda\varphi_j} \qquad \mathrm{mod}\ B_N \qquad (J : \text{fini})$$

$$\alpha_{jN}(\lambda) = \sum_{r=0}^{N-[m_j]-1} \frac{\alpha_{jr}}{\lambda^{r+m_j}} \qquad (m_j \geqq 0,\ \varphi_j \in \mathbf{R},\ \alpha_{jr} \in \mathbf{C})$$

alors les φ_j et α_{jr} sont indépendants de N ; ils caractérisent $\tilde{f}$ qu'on note

$$\tilde{f} = \sum_{j \in J} \alpha_j(\lambda)e^{\lambda\varphi_j}, \quad \text{où } \alpha_j(\lambda) = \sum_r \frac{\alpha_{jr}}{\lambda^{r+m_j}}\,;$$

ces classes asymptotiques sont nommées *séries formelles* ; on constate que leurs amplitudes α_j et leurs phases φ_j sont arbitraires. Elles constituent un sous-anneau $\tilde{A}$ de $\tilde{B}$.

Ces classes sont nommées *fonctions formelles* quand $f \in B(X)$, $\alpha_{jr} \in C^\infty(X) \cap L^2(X)$, $\varphi_j \in C^\infty(X)$; leurs amplitudes α_j et leurs phases φ_j sont encore arbitraires. Leur ensemble $\tilde{A}(X)$ est un sous-module de $\tilde{B}(X)$.

L'intégration asymptotique $\tilde{\int}_X \tilde{f}(x,\lambda)d^l x$ de la fonction formelle $\tilde{f} \in \tilde{A}(X)$ est une opération locale, donnant une série formelle $\in \tilde{A}$, si $\tilde{f}$ a des amplitudes α_j à supports compacts et des phases φ_j à points critiques non dégénérés : le calcul de cette intégrale s'effectue alors en ces points critiques. Sinon la valeur de cette intégrale $\in \tilde{B}$.

La transformation de Fourier asymptotique $\tilde{f} \to \tilde{\mathscr{F}}_p^x \tilde{f}$ est de même une opération locale, à valeur dans $\tilde{A}(P)$, si $\tilde{f}$ a des amplitudes α_j à supports compacts et des phases φ_j vérifiant $\mathrm{Hess}_x(\varphi_j) \neq 0$ sur ces supports : $(\tilde{\mathscr{F}}_p^x \tilde{f})(p,\lambda)$ se calcule alors en les points x où $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x} = p$; les phases ψ_j de $\tilde{\mathscr{F}}_p^x \tilde{f}$ sont les transformées de Legendre des φ_j (c.-à-d. : $\psi_j(p)$ résulte de l'élimination de x entre les équations $\psi_j = \varphi_j(x) - \langle p,x \rangle$, $p = \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x}$; et l'on a $x = -\dfrac{\partial\psi_j}{\partial p}$).

Par complétion de l'espace des opérateurs différentiels de $\tilde{A}(X)$ et de $\tilde{A}(P)$, on associe à toute fonction formelle $a(x,p,\lambda)$, indéfiniment différentiable en x et p, deux opérateurs pseudo-différentiels $a(x, \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial x}, \lambda)$ et $a(-\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial}{\partial p}, p, \lambda)$, qui sont des opérateurs locaux conservant les phases ; $\tilde{\mathscr{F}}_p^x$ transforme le premier en le second :

$$\tilde{\mathscr{F}}_p^x [a(x, \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}, \lambda)\, \tilde{f}(x,\lambda)] = a(-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial p}, p, \lambda)\tilde{\mathscr{F}}_p^x \tilde{f}.$$

Envisageons enfin une variété lagrangienne V de $X \oplus P$, de dimension maximale l, et la fonction φ définie sur V par

$$d\varphi = \langle p,dx \rangle.$$

Choisissons des coordonnées $x_1,\ldots,x_l,p_1,\ldots,p_l$ de $X \oplus P$ telles que

$$\langle p,x \rangle = p_1x_1 + \ldots + p_lx_l.$$

Nommons carte locale de V la partie V_J de V où l'on peut prendre pour coordonnées locales

$$\{x_j, p_{j^*}\}, \text{ où } j = J,\ j^* = J^*,\ J \subset L = \{1,\ldots,l\} ;\ J^* = L \setminus J.$$

Arnold a prouvé que ces cartes constituent un recouvrement ouvert de V. Associons à une telle carte la phase

$$\varphi_J = \varphi - \sum_{j^* \in J^*} x_{j^*}\, p_{j^*}.$$

Etant donnée la série formelle $a(x,p,\lambda)$, la substitution de $-\dfrac{\partial}{\partial p_{j^*}}$ à x_{j^*} si $j^* \in J^*$ et de $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ à p_j si $J \in J$ définit un opérateur pseudo-différentiel, dont nous notons a_J la restriction à la carte V_J ; (cette restriction existe, puisqu'un tel opérateur est *local*) ; l'ensemble des a_J sera nommé : l'opérateur pseudo-différentiel a défini sur V par la fonction formelle $a(x,p,\lambda)$. Le passage de V_J à V_K transforme a_J en a_K par la transformation de Fourier

$$\tilde{\mathscr{F}}_K^J = \prod_j \tilde{\mathscr{F}}_{p_j}^{x_j} \prod_K \tilde{\mathscr{F}}_{x_k}^{p_k}, \text{ ou } J \in J \cap K^*,\ k \in K \cap J^*.$$

On constate que $\tilde{\mathscr{F}}_K^J$ opère *localement* sur toute fonction formelle définie sur V_J et de phase φ_J ; elle la transforme en une fonction formelle définie sur V_K, de phase φ_K ;

$$\tilde{\mathscr{F}}_K^H \tilde{\mathscr{F}}_H^J = \tilde{\mathscr{F}}_K^J.$$

Quand on se donne sur chaque carte V_J une fonction formelle u_J de phase φ_J, la condition suivante (cf. Maslov) a donc un sens

$$u_K = \tilde{\mathscr{F}}_K^J u_J, \text{ pour tout J et tout K.}$$

Quand elle est vérifiée, nous dirons que l'ensemble u des u_J est une fonction formelle sur V. Nous nommerons *solution formelle* sur V de l'équation *a* toute fonction formelle sur V vérifiant :

$$a_J\ u_J = 0 \text{ sur chaque carte } V_J.$$

Définissons comme suit la projection u_X sur X d'une fonction formelle u sur V :

$$u_X(x,\lambda) = \sum_{(p,x) \in V_L} u_L(x,p).$$

Les solutions formelles u_X d'un système différentiel a_L sont les projections sur X de solutions formelles de a sur V : elles vérifient le système a_L, en un point du contour apparent Σ de V, en le sens suivant :

$$a_J\ \tilde{\mathscr{F}}_J^L\ u_L = 0$$

pour tout J tel que $\tilde{\mathscr{F}}_J^L u_L$ soit défini ; de tels J existent.

C'est la réponse au problème que nous nous posions. Il n'est pas aisé d'expliciter les calculs qu'elle emploie : définition des opérateurs pseudo-différentiels ; intégration asymptotique et transformation de Fourier asymptotique, quand elles opèrent localement ; calcul, grâce à l'indice de Maslov-Arnold, du premier terme de développement asymptotique de u_J.

Maslov nomme solution asymptotique le premier terme du développement de u_X ; nous avions explicité, l'an passé, les solutions de l'équation de Schrödinger relativiste, stationnaire, contenant un champ magnétique constant ; nous avions constaté qu'elles dépendaient des mêmes nombres quantiques que les solutions exactes de cette équation, les niveaux d'énergie étant les mêmes, à une petite correction près ; c'était préciser les relations entre la mécanique quantique corpusculaire et la mécanique quantique ondulatoire. Nous avons pu étendre ces résultats à l'équation de Dirac, bien que ses caractéristiques soient doubles ; mais ce fut au moyen de calculs approchés.

***

Le Séminaire a consisté en les exposés suivants :

J.-L. LIONS, *Problèmes de perturbations singulières* ;

J.-L. LIONS, *Transfert de chaleur dans les fluides de Bingham* ;

J. CHAZARAIN, *Sur les problèmes mixtes hyperboliques* ;

A. PIRIOU, *Idem* (suite et fin) ;

P. MALLIAVIN, *Valeurs au bord des fonctions holomorphes* ;

PHAM THE LAI, *Analogues dans $\mathscr{C}^p$ des théorèmes de convexité de Riesz et Thorin* ;

R. GÉRARD, *Feuilletages de Painlevé* ;

R. BALIAN, *Distribution des fréquences propres pour l'équation des ondes dans un domaine fini* (deux exposés) ;

C. GOULAOUIC, *Résultats de régularité pour des opérateurs elliptiques dégénérés.*

PUBLICATIONS

— Edition ronéotypée du Séminaire.

— Publication des *Actes du Congrès international des mathématiciens*, Nice, 1970.

— Rédaction du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Jean LERAY, *La mathématique et ses applications* (*Accademia Nazionale dei Lincei,* Adunanze Straordinarie per il Conferimento dei Premi A. Feltrinelli, t. I, fasc. 9, 1972, p. 191-197).

— *Les propriétés de la solution élémentaire d'un opérateur hyperbolique et holomorphe* (*Istituto di Alta Matematica,* Symposia Mathematica, t. 7, p. 29-41).

— *Systèmes hyperboliques non stricts* (Colloques internationaux du CNRS, *La Magnétohydrodynamique classique et relativiste*, p. 83-92).

— *Les Mathématiques « modernes »* (*Gazette des Mathématiciens*, n° G 4, p. 5-16).

Missions

Allocution *La Mathématique et ses Applications,* à la Séance de remise des Prix Antonio Feltrinelli par l'Accademia Nazionale dei Lincei.

Conférence à la Maison franco-japonaise (Tokyo) *Sur l'utilité des mathématiques.*

Exposés sur le *Problème de Cauchy à données singulières* à la Société mathématique du Japon et à l'Institut mathématique de Novosibirsk (URSS).

Compléments à *la théorie de Maslov des solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles,* aux Universités de Tbilisi, de Sendai, de Kyoto, de Tokyo (4 exposés), de Novosibirsk (4 exposés), de Moscou, et à l'Ecole normale supérieure de Pise (6 exposés).

Conférence sur *le problème de Dirichlet non linéaire* à l'Université de Pavie et à l'Ecole normale supérieure de Pise.

Honneur

Prix international Antonio Feltrinelli « Matematica et Applicazioni », conféré par l'Accademia Nazionale dei Lincei.