Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Avant d'exposer une théorie des solutions asymptotiques, qui devait être son sujet principal, le cours a voulu présenter quelques recherches récentes, de *Cl. Wagschal* et *Y. Hamada*, concernant le problème de Cauchy ; mais pour expliciter leurs méthodes, puis leurs résultats, qui se complètent, le cours a dû étudier exclusivement ce problème et celui de Goursat.

1. LES DONNÉES DE CAUCHY. — Des cours antérieurs ont constaté que, dans le cas d'un système, un problème de Cauchy n'a pour adjoint un autre problème de Cauchy qu'à condition de donner à ce problème un énoncé plus général que l'énoncé classique ; c'est le suivant : trouver des fonctions u_μ ($\mu = 1,\dots,N$), définies et holomorphes au voisinage de l'origine O de $\mathbf{C}^n$, telles que

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{N} a_\mu^\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_\nu(x) = v_\mu(x) \text{ au voisinage de O,}$$

$$(2) \qquad u_\nu - w_\nu \text{ s'annule } t_\nu \text{ fois sur une hypersurface S contenant O.}$$

Les données a_μ^ν, v_μ et w_ν sont holomorphes en O ; S est analytique ; on note m_μ^ν l'ordre de a_μ^ν ; les π désignant une permutation quelconque de $\{1,\dots,N\}$, on note

$$m(\pi) = \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^{\pi(\mu)}, \quad m = \sup_\pi m(\pi) ;$$

m est l'ordre du système a_μ^ν, dont le polynôme caractéristique g est la partie principale, c'est-à-dire homogène de degré m en ξ, du polynôme

$$\det_{\mu,\nu} a_\mu^\nu(x,\xi).$$

On suppose le système *normal,* c'est-à-dire g non identiquement nul, et S non caractéristique. On suppose choisis des « poids » entiers s_μ, t_ν ($\mu,\nu = 1,\dots,N$) tels que

$$(3) \qquad O \leqq s_\mu,\ O \leqq t_\nu,\ m^\nu_\mu \leqq t_\nu - s_\mu,\ m = \sum_{\nu=1}^{N} t_\nu - \sum_{\mu=1}^{N} s_\mu ;$$

de tels systèmes de poids existent (Volevič). On sait que le problème de Cauchy (1), (2) possède une solution (nécessairement unique) si et seulement si *les conditions de compatibilité* suivantes sont vérifiées :

$$(4) \qquad v_\mu - \sum_{\nu=1}^{N} a^\nu_\mu w_\nu \text{ s'annule } s_\mu \text{ fois sur S.}$$

Etant donné (a^ν_μ), divers systèmes de poids $\sigma = \{s_\mu, t_\nu\}$ peuvent être choisis ; *Cl. Wagschal* les ordonne, constate l'existence d'un système σ_* plus petit que tous les autres et prouve ceci :

Tout problème de Cauchy, défini par un système σ quelconque et des données compatibles pour σ, équivaut à un problème défini par σ_* et des données compatibles pour σ_*.

Mais si l'un de ces problèmes peut être défini par des systèmes de poids σ autres que σ_*, alors des renseignements plus précis en résultent sur le nombre de fois que $u_\mu - w_\mu$ s'annule sur S ; *Cl. Wagschal* montre que, pour obtenir l'ensemble de ces renseignements, il suffit d'employer le plus grand, σ^*, de tous ces systèmes σ (ce maximum σ^* existe, sauf si le problème de Cauchy équivaut à un problème à moins de N inconnues).

Enfin, un troisième résultat de *Cl. Wagschal* a pris la forme suivante : soit $\sigma_* = \{s_\mu, t_\nu\}$ le système de poids minimum ; le problème de Cauchy (1), (2) équivaut à un problème de Cauchy (1), (5) n'exigeant *pas de condition de compatibilité,* (5) désignant la condition

$$(5) \qquad u_\nu - w_\nu \text{ s'annule } (t_\nu - t'_\nu) \text{ fois sur S,}$$

où les t'_ν sont des entiers, que le cours a caractérisés ; ils vérifient les relations :

$$(6) \qquad O \leqq t'_\nu \leqq t_\nu,\ \sum_{\nu=1}^{N} t'_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} s_\mu .$$

Le système des $\{t'_\nu\}$ n'est pas nécessairement unique et le système des $\{s_\mu, t_\nu - t'_\nu\}$ n'est pas un système de poids, c'est-à-dire ne vérifie pas (3), sauf quand il s'agit d'un problème de Cauchy classique : $s_\mu = 0$ pour tout μ ; donc vu (6), $t'_\nu = 0$ pour tout ν.

Exemple. — Le système différentiel

$$u_1 + u_2 = v_1, \quad \frac{du_1}{dx} + c \frac{du_2}{dx} = v_2 \ (c = \text{const.})$$

est normal si $c \neq 1$, ce que nous supposerons ; le système de poids le plus général est

$$t_1 = t_2 = s_1 = s_2 + 1, \ s_2 \geqq 0 ;$$

le système minimum σ_* est

$$s_1 = 1, \ s_2 = 0, \ t_1 = t_2 = 1 ;$$

on peut choisir soit :

$$t'_1 = 0, \ t'_2 = 1,$$

soit :

$$t'_1 = 1, \ t'_2 = 0.$$

L'équivalence des problèmes de Cauchy correspondant à ces deux choix est évidente.

2. UN PROBLÈME DE GOURSAT PARTICULIER. — Un autre travail de Cl. Wagschal nous a conduit à reprendre un bref passage de l'étude du problème de Goursat que *L. Gårding* (Acta math., 1965, t. 114, p. 143-158) a faite à la suite de *N. A. Lednev* [Mat. Sbornik, 22 (64), 1948, p. 205-266]. Il s'agit de la discussion, qu'il est possible d'expliciter, du problème de Goursat très simple que voici : dans $\mathbf{C}^2$, au voisinage de 0, construire une fonction holomorphe u telle que

$$(1) \qquad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u - w = \mathcal{O}(xy)$$

où $(x,y) \in \mathbf{C}^2$, a et b sont des constantes données $\in \mathbf{C}$, w est une fonction holomorphe donnée ; $u - w = \mathcal{O}(xy)$ signifie que $(u - w)/xy$ est holomorphe à l'origine.

La discussion de ce problème présente l'intérêt d'être moins simple que ne l'affirme L. Gårding et de bien montrer combien *le problème de Goursat est éloigné du type « fredholmien »*.

Cette discussion emploie la fonction ϱ de $t \in \mathbf{R}$ définie par

$$(2) \qquad \varrho(t) = \liminf_{q \to \infty} |\sin(qt\pi)|^{1/q} = \liminf_{|p|+q \to \infty} \left|t - \frac{p}{q}\right|^{1/q}$$

où $q \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{Z}$, et la fonction

$$\tilde{\varrho}(a,b) = \varrho\left(\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{ab}}\right), \text{ si } ab \text{ est réel } \geqq 1,$$

$$= 1 \text{ sinon.}$$

— Si $\tilde{\varrho}(a,b) > 0$, alors, pour tout w, le problème (1) possède une solution ; il existe des couples, arbitrairement petits, de disques

$$|x| < R_1, \; y = 0 \text{ et } x = 0, \; |y| < R_2$$

tels que, si w est holomorphe sur un domaine de $\mathbf{C}^2$ contenant chacun de ces deux disques, alors u est holomorphe sur un domaine de $\mathbf{C}^2$ contenant chacun les deux disques

$$|x| < \tilde{\varrho}\, R_1, \; y = 0 \text{ et } x = 0, \; |y| < \tilde{\varrho}\, R_2.$$

— Si $\tilde{\varrho}(a,b) = 0$, alors il existe des w tels que le problème (1) soit impossible.

— Supposons $w = 0$: pour que le problème (1) possède des solutions non nulles, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ soit rationnel}$$

(ce qui implique $\tilde{\varrho}(a,b) = 0$, sans être impliqué par cette condition) ; l'ensemble de ces solutions est alors un espace vectoriel de dimension infinie.

Les propriétés suivantes de ϱ précisent ces énoncés :

— L'ensemble des zéros de ϱ (qui contient évidemment les nombres rationnels) n'est pas dénombrable.

— $\varrho = 1$ presque partout (en particulier $\varrho(t) = 1$ quand t est algébrique sans être rationnel).

— L'ensemble des valeurs de ϱ est le segment fermé [0,1].

C'est en réussissant à étudier ϱ au moyen des fractions continues que *Ch. Pisot* et moi-même avons établi cette dernière propriété.

Signalons d'autres propriétés de ϱ, obtenues aussi en collaboration avec Ch. Pisot :

— Si a, b, c, d sont entiers et ad — bc $\neq$ 0, alors

$$[\varrho(t)]^{\frac{|ad-bc|}{|ct+d|}} \leqq \varrho(t') \leqq [\varrho(t)]^{\frac{1}{|ct+d|}} \quad \text{où } t' = \frac{at+b}{ct+d}$$

(on a donc l'égalité si ad — bc $= \pm 1$) ;

— ϱ est une fonction paire, de période 1, discontinue en chacun de ses points et de classe de Baire 2.

3. GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE GOURSAT. — L'étude du problème de Cauchy ramifié, qu'a faite *Cl. Wagschal,* consiste essentiellement à réduire ce problème à un cas particulier du « problème généralisé de Goursat », dont voici l'énoncé et les propriétés. Notons :

$$x \in X = \mathbf{C}^n, \ D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}; \ (D_j)^{-1} u = \int_0^{x_j} u \, dx_j ; \ D^\alpha = \prod_j (D_j)^{\alpha_j},$$

où $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ est un multi-indice à composantes $\alpha_j \in \mathbf{Z}$;

$|\alpha| = \sum_j \alpha_j \in \mathbf{Z}$; $u : X \to C$ une fonction holomorphe de $x \in X$;

$$a(x,D)u(x) = \sum_{\beta\gamma...} D^\beta\big[a_{\beta\gamma}(x)D^\gamma[... \, u(x)]\big],$$

où les $a_{\beta\gamma}$ sont des fonctions holomorphes ;

$$a(x,\xi) = \sum_{\beta\gamma...} \xi^\beta a_{\beta\gamma}(x)\xi^\gamma... = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha, \text{ où } \xi \in \Xi = \text{dual}(X) ;$$

$$\text{ordre (a)} = m = \sup |\alpha| \ (\alpha \text{ tel que } a_\alpha \neq 0) ;$$

$$g(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha, \text{ où } |\alpha| = m ;$$

g, qui est un polynôme en les $\xi_j^{\pm 1}$, est nommé *fonction caractéristique* de l'opérateur a ;

$$\mathfrak{g}(x,\xi) = \sum_\alpha |a_\alpha(x)|\xi^\alpha, \text{ où } |\alpha| = m,$$

est nommé *fonction spectrale* de cet opérateur ;

$$u(x) \in \mathcal{O}(x^\alpha)$$

signifie que la fonction u, holomorphe en 0, est telle que $x \to x^{-\alpha}\, u(x)$ soit aussi holomorphe en 0 ; cette condition est donc vide si

$$\alpha_j \leqq 0 \text{ pour tout } j.$$

Le problème de Goursat généralisé a pour données des entiers N, m_μ, n_ν $(\mu,\nu = 1,\ldots,N)$, des opérateurs a_μ^ν et b_μ^ν holomorphes en 0, des fonctions v_μ et w_μ holomorphes en 0, des multi-indices $\alpha(\mu)$ à composantes $\alpha_j(\mu) \geqq 0$, tels que :

$$|\alpha(\mu)| = m_\mu - n_\mu \text{ ; ordre } (a_\mu^\nu) \leqq m_\nu - n_\mu \text{ ; ordre } (b_\mu^\nu) \leqq n_\mu - n_\nu.$$

Ce problème est de construire des fonctions u_μ $(\mu = 1,\ldots,N)$, holomorphes en 0, telles que :

$$\begin{cases} D^{\alpha(\mu)} u_\mu(x) - \sum\limits_{\nu=1}^{N} a_\mu^\nu(x,D)\, u_\nu(x) - v_\mu(x) = 0, \\ u_\mu(x) - \sum\limits_{\nu=1}^{N} b_\mu^\nu(x,D)\, u_\nu(x) - w_\mu(x) = \mathcal{O}(x^{\alpha(\mu)}). \end{cases}$$

C'est le problème de Goursat classique quand $b_\mu^\nu = 0$.

Nommons $\mathfrak{g}_\mu^\nu(\xi)$ et $\mathfrak{h}_\mu^\nu(\xi)$ les valeurs en 0 des fonctions spectrales des opérateurs.

$$a_\mu^\nu(x,D) - D^{\alpha(\mu)} b_\mu^\nu(x,D) \text{ et } b_\mu^\nu(x,D).$$

Le *problème de Goursat a une solution, qui est unique,* quand, pour au moins un ξ à composantes $\xi_j > 0$, la matrice spectrale

$$\left(\mathfrak{g}_\mu^\nu(\xi)\,\xi^{-\alpha(\mu)} + \mathfrak{h}_\mu^\nu(\xi)\right)$$

possède un rayon spectral < 1 (c'est-à-dire quand toutes ses valeurs propres sont < 1).

La preuve de ce théorème emploie la méthode des fonctions majorantes et les perfectionnements que *Cl. Wagschal* lui a apportés.

La condition suffisante d'existence qu'énonce ce théorème n'a rien de nécessaire : voir le n° 2.

Pour appliquer ce résultat au problème de Cauchy ramifié, il est essentiel de compléter ce théorème par la remarque suivante.

Remarque. — Supposons que seules des puissances négatives de D_1 figurent dans les opérateurs a^ν_μ et b^ν_μ ; il est alors superflu d'appliquer à cette variable x_1 la méthode des fonctions majorantes ; le théorème précédent vaut quand on suppose : $(x_2,...x_n)$ dans un voisinage suffisamment petit de l'origine de $\mathbf{C}^{n-1}$; le point x_1 à une distance $\int|dx_1|$ suffisamment petite de l'origine, qu'il appartienne à $\mathbf{C}$, au revêtement simplement connexe du disque pointé de $\mathbf{C}$: $0 \neq |y_1| <$ const. ou à $\mathbf{R}$; dans ce dernier cas, on peut supposer les données et les inconnues continues en x_1, holomorphes en $(x_2,...,x_n)$.

4. PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ A CARACTÉRISTIQUES SIMPLES. — Soit un problème analytique de Cauchy, à caractéristiques simples, ou, plus généralement, réductible, par la méthode de J. Vaillant, à un système diagonalisé, à caractéristiques simples :

$$(1) \qquad a(x,D)u_\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{N} b^\nu_\mu(x,D)u_\nu(x) = v_\mu(x), \quad (\mu = 1,...,N)$$

$$(2) \qquad u_\mu(x) - w_\mu(x) \text{ s'annule m-fois sur une hypersurface S.}$$

Ses inconnues dont les fonctions analytiques u_μ de $x \in \mathbf{C}^n$; les opérateurs différentiels a et b^ν_μ sont donnés, holomorphes à l'origine 0 de $\mathbf{C}^n$ et tels que

$$\text{ordre } a(x,D) = d, \text{ ordre } b^\nu_\mu < d + s_\nu - s_\mu \,;$$

S est donnée, contient 0 et n'est pas caractéristique ; soit T une hypersurface analytique de S, contenant 0, par laquelle passent m caractéristiques distinctes :

$$(3) \qquad K_1 : k_1(x) = 0 \,; \,...\,; K_d : k_d(x) = 0 \quad (k_j \text{ holomorphes} \,;\, Dk_j \neq 0)$$

Les restrictions des fonctions w_μ, ..., $D^{m-1} w_\mu$ à $S \setminus T$. sont données holomorphes sur le revêtement universel de $S \setminus T$. Les fonctions v_μ sont données, holomorphes en 0 ou analytiques, ayant sur $K = \bigcup_j K_j$ une ramification du type de la ramification (4) des u_μ.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, ce problème de Cauchy possède une solution u_μ holomorphe au voisinage de $S \setminus T$; *Cl. Wagschal* prouve que *les* u_μ *se ramifient* comme suit sur K :

$$(4) \qquad u_\mu(x) = \sum_{j=1}^{d} u^j_\mu(k_j(x), x)$$

chaque $u^j_\mu : (t,x) \mapsto u^j_\mu (t,x) \in \mathbf{C}$ étant une fonction définie et holomorphe quand :

x appartient à un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$;

t appartient au revêtement universel d'un disque pointé de $\mathbf{C}$:

$$0 \neq |t| < \text{const.}$$

Ce résultat est surprenant puisqu'on devait jusqu'ici (Hamada, Wagschal) faire des hypothèses sur la croissance des données w_μ et v_μ au voisinage respectivement de T et K. Mais sa preuve est aisée, une fois établie la remarque qui termine le n° 3 : les fonctions u^j_μ de (t,x) sont données par un problème de Goursat, dont l'énoncé emploie des opérateurs intégro-différentiels où D_t n'apparaît qu'avec des puissances négatives (et D_x qu'avec des puissances positives).

5. LE PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ. — Au cours de l'année qu'il passe en France, Yûsuku *Hamada,* qui le premier avait résolu le problème de Cauchy, à données de Cauchy ayant des singularités polaires, quand l'équation est à caractéristiques simples, vient de résoudre ce problème sans faire cette restriction. Il construit la solution par une série double ; chacun de ses termes est défini par un problème de Cauchy et est majoré par une technique améliorant celles de Wagschal et De Paris.

Si les caractéristiques sont simples, la solution présente des singularités polaires et logarithmiques ; elle présente en outre des singularités essentielles quand existent des caractéristiques multiples.

Cl. Wagschal ayant observé que les méthodes d'Y. Hamada s'appliquent au problème de Cauchy ramifié, le cours a pu étendre au cas des caractéristiques multiples les propriétés du problème de Cauchy ramifié qu'avait établies Cl. Wagschal dans le cas des caractéristiques simples et qu'énonce le n° 4.

Ce fut par de nouveaux développements en série et de nouvelles majorations et non plus par réduction du problème de Cauchy ramifié à un problème de Goursat.

Une telle réduction est-elle possible ? Donnerait-elle une preuve plus aisée du théorème suivant, que le cours a pu établir en adaptant le raisonnement d'Y. Hamada ?

6. OPÉRATEURS PARTIELLEMENT HYPERBOLIQUES. —

Notations. — Soit X un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{n+1}$;

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X ;$$

$a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ est un opérateur différentiel, d'ordre m, *holomorphe sur* X ; factorisons son polynôme caractéristique :

$$g(x,\xi) = \prod_s [g_s(x,\xi)]^{r_s},$$

les g_s étant des polynômes en ξ, distincts et irréductibles quand x est générique ; notons

$$\mu = \operatorname*{Sup}_s r_s$$

l'ordre de multiplicité maximum de ses caractéristiques ; soit *l* le degré du polynôme

$$g_0(x,\xi) = \prod_s g_s(x,\xi).$$

Définition. — Soient T un plan de X de codimension 2 et x un point de T ; il existe en général *l* hyperplans de C^{n+1} contenant T et caractéristiques au point x ; T est dit (*régulièrement*) *spatial* au point x quand ces *l* hyperplans sont *réels* (*et distincts*).

Un *hyperplan S de* X *est dit* (*régulièrement*) *spatial en un point* x de S quand la condition suivante est vérifiée :

i) S n'est pas caractéristique au point x ;

ii) tout hyperplan T de S contenant x est (régulièrement) spatial au point x.

Si S est l'hyperplan $x_0 = o$, cette condition est que, pour tout

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \setminus 0,$$

l'équation en ξ_0

$$g_0(x,\xi) = o, \text{ où } \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n),$$

ait *l racines réelles* (*distinctes*).

L'opérateur a est dit (*régulièrement*) *hyperbolique* s'il existe un hyperplan (régulièrement) spatial ; il est *hyperbolique strict* quand il est régulièrement hyperbolique et que les caractéristiques sont simples ($\mu = 1$).

Etant donné un plan quelconque S' de S tel que

$$\dim S' < \dim S,$$

l'hyperplan S *est dit* (*régulièrement*) *spatial mod.* S' *en un point* x *de* S' quand la condition suivante est vérifiée :

i) S n'est pas caractéristique au point x ;

ii) tout hyperplan T de S contenant S' est (régulièrement) spatial au point x.

Si les équations de S et S' sont

$$S : x_o = o, \; S' : x_o = x_1 = \ldots = x_{n'} = o, \; (1 \leqq n' \leqq n),$$

cette condition est que, pour tout

$$(\xi_1,\ldots,\xi_{n'}) \in R^{n'} \setminus 0,$$

l'équation en ξ_o

$$g_o(o,\xi) = o, \text{ où } \xi = (\xi_o,\xi_1\ldots,\xi_{n'},o,\ldots,) \text{ est orthogonal à } S',$$

ait *l racines réelles* (distinctes).

S'il existe effectivement des plans (régulièrement) spatiaux, l'opérateur a est dit *partiellement* (*et régulièrement*) *hyperbolique*.

Définition. — Soit S' un plan de X contenant 0 ; une fonction $v : X \rightarrow C$ est dite *holomorphe* sur des fibres tangentes à S' en 0 quand il existe une fibration analytique de X telle que

i) la dimension des fibres est celle de S' ;

ii) la fibre contenant 0 est tangente à S' en 0 ;

iii) la restriction de v à chaque fibre est holomorphe ; plus précisément soient

$$(x_o,\ldots x_1,\ldots,x_{n'},x_{n'+1},\ldots,x_n)$$

des coordonnées holomorphes de X, telles que les fibres aient pour équations

$$x_o = c^{te}, \; x_1 = c^{te},\ldots, \; x_{n'} = c^{te} \; ;$$

v est supposé défini (de classe de Gevrey ou à dérivées bornées jusqu'à un certain ordre) et holomorphe en $(x_{n'+1},\ldots,x_n)$ pour

$$(x_o,x_1,\ldots,x_n) \in X', \; (x_{n'+1},\ldots,x_n) \in D'',$$

X' et D'' étant des voisinages de 0 dans $R^{n'+1}$ et $C^{n-n'}$.

Théorème. — Considérons sur X le problème de Cauchy :

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x})\, u(x) = v(x), \quad u(x) - w(x) = 0(x_0{}^m).$$

Supposons l'hyperplan S : $x_0 = 0$ *régulièrement spatial* mod. S′ en 0, les données v et w *holomorphes sur des fibres tangentes à* S′ *en* 0. Alors ce problème de Cauchy possède, sur un voisinage V de 0, une solution et une seule, u, dans chacun des deux cas suivants :

1) v et w sont de *classe de Gevrey* γ et

$$1 < \gamma < \mu / (\mu - 1) \; [1 < \gamma \text{ si } \mu = 1] ;$$

alors u est de classe de Gevrey γ ;

2) les *caractéristiques sont simples* ($\mu = 1$), les dérivées de v et w d'ordres $\leqq m + n$ sont bornées.

Note. — V ne dépend que de a, X, X′, D″, γ.

Note. — Quand S′ est vide, ce théorème donne des résultats moins précis que la théorie des opérateurs hyperboliques (stricts ou non), exposée par des cours antérieurs ; quand S′ n'est pas vide, il complète cette théorie.

⁂

Le Séminaire a consisté en les exposés suivants :

B. MALGRANGE, *Intégrales asymptotiques et monodromie* ;

R. GERARD, *Mesure de l'irrégularité en un point singulier d'un système différentiel* ;

J. VAILLANT, *Solutions asymptotiques d'un système à caractéristiques d'ordre de multiplicité variable* ;

H. BREZIS, *Etude d'écoulements parfaits et symétriques à l'aide d'inéquations variationnelles* ;

B. SIMON, *Theory of hypercontractive semigroups* ;

C. GOULAOUIC, *Problèmes de Cauchy caractéristiques* (d'après Baouendi - Goulaouic) ;

P. KREE, *Equations aux dérivées partielles sur les espaces de Hilbert* ;

P. MALLIAVIN, *Processus de diffusion et formes harmoniques* ;

P. RABINOWITZ, *Non linear eigenvalue problems for elliptic partial differential equations.*

PUBLICATIONS

— Edition ronéotypée du Séminaire.

— Rédaction du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

— S. DELACHE et J. LERAY, *Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux et de l'opérateur de Tricomi-Clairaut, hyperbolique d'ordre* 2. Bull. soc. math. France, 99, p. 313-336.

— Y. CHOQUET-BRUHAT et J. LERAY, *Sur le problème de Dirichlet, quasi linéaire, d'ordre* 2. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 81-85.

MISSIONS

Exposés sur :

— *la théorie de Maslov des solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles,* au Convegno internazionale Metodi valutativi nella fisica-matematica, Accad. Naz. dei Lincei, Rome ; à la R.C.P. 25 (Réunion de Physiciens et Mathématiciens à Strasbourg) ; aux Universités de Montréal (5 exposés), Kingston, Nantes et à l'Université Laval de Québec (2 exposés) ;

— *la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov,* au Colloque de géométrie symplectique de Rome ; à la R.C.P. 25 ;

— *sur le problème de Cauchy analytique à données singulières* à l'Université de Sherbrooke et aux Regii Colloquia de Montréal ;

— *la théorie des résidus* aux Universités de Toronto et d'Ottawa.