**Théorie des équations différentielles et fonctionnelles**

M. Jean LERAY, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours a repris l'étude des solutions asymptotiques de Maslov : le traité de Maslov (traduit chez Dunod) et l'exposé que le cours en avait fait deux ans auparavant employaient un choix particulier de coordonnées pour construire des notions, qui se révèlent finalement indépendantes de ce choix.

Le cours de cette année a libéré cette théorie d'un tel choix en employant — au lieu du groupe fini engendré par les transformations de Fourier opérant chacune sur l'une des coordonnées — une représentation unitaire $Sp_2$ du revêtement à deux feuillets du groupe symplectique Sp.

Cette représentation $Sp_2$ fut employée par D. Shale et V. C. Bouslaev, qui développaient tous deux des notions introduites en théorie quantique par I. Segal. Cette représentation $Sp_2$ est l'un des groupes algébriques d'opérateurs unitaires qu'A. Weil relie aux travaux de théorie des nombres de K. Siegel. Mais aucun de ces auteurs n'énonce les propriétés de $Sp_2$ qu'emploie la théorie des solutions asymptotiques.

Voici ce nouvel aspect de cette théorie, que résume moins sommairement l'exposé du cours fait au Colloque de Nice (mai 1974) « Opérateurs intégraux de Fourier et équations aux dérivées partielles » (à paraître chez Springer : Lecture Notes).

INDICE D'INERTIE ET INDICE DE MASLOV. — Notons Z l'espace $\mathbf{R}^{2l}$ muni d'une structure symplectique $[.,.]$. Nommons plan lagrangien de Z tout sous-espace de Z, de dimension $l$, sur lequel la forme bilinéaire alternée $[.,.]$ s'annule identiquement. Notons $\Lambda(Z)$ la grassmannienne lagrangienne de Z, c'est-à-dire l'ensemble de ses plans lagrangiens. *I. Arnold* a prouvé que son groupe fondamental est $\mathbf{Z}$ ; $\Lambda(Z)$ possède donc un seul revêtement, $\Lambda_q(Z)$, à q feuillets ($q = 1, 2, ..., \infty$).

Soient $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda'' \in \Lambda(Z)$, deux à deux transverses ; la condition

$$z \in \lambda,\quad z' \in \lambda',\quad z - z' \in \lambda''$$

définit un isomorphisme

$$\lambda \ni z \mapsto z'(z) \in \lambda'$$

d'où une forme quadratique de z :

$$\lambda \ni z \mapsto [z,z'(z)] \in \mathbf{R} ;$$

son indice d'inertie sera noté :

$$\mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) = \ldots = l - \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda'',\lambda') \in \{0, \ldots, l\}.$$

Soient $\lambda_q$, $\lambda'_q$, $\lambda''_q \in \Lambda_q(Z)$ de projections naturelles $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ sur $\Lambda(Z)$ ; il existe une fonction et une seule

$$m : (\lambda'_q,\lambda_q) \mapsto m\,(\lambda'_q,\lambda_q) \in \mathbf{Z}_q$$

définie pour $\lambda_q,\lambda'_q$ non transverses (c'est-à-dire $\lambda,\lambda'$ non transverses), localement constante et telle que

(1) $$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) \equiv m(\lambda''_q,\lambda_q) - m(\lambda'_q,\lambda_q) + m(\lambda'_q,\lambda''_q) \mod. q ;$$

c'est l'*indice de Maslov* ; on a

(2) $$m(\lambda_q,\lambda'_q) + m(\lambda'_q,\lambda_q) \equiv l \mod. q ;$$

(3) $$m(\lambda'_q,\lambda_q) \equiv m(\lambda'_\infty,\lambda_\infty) \mod. q.$$

VARIÉTÉS LAGRANGIENNES ET REPÈRES SYMPLECTIQUES. — Une *variété lagrangienne* V de Z est une variété de dimension $l$ dont les $l$-plans tangents sont lagrangiens ; cette condition s'énonce :

(4) $$d[z,dz] = 0 ;$$

sur le revêtement universel $\check{V}$ de V existe donc une fonction, nommée phase, $\varphi : \check{V} \to \mathbf{R}$ telle que

(5) $$d\varphi = \frac{1}{2}\,[z,dz].$$

Munir d'une q-orientation V, ($q = 1,2,\ldots,\infty$) sera définir une application continue $V \to \Lambda_q(Z)$ qui, composée avec la projection naturelle $\Lambda_q(Z) \to \Lambda(Z)$

soit l'application de chaque point z de V sur la direction de son $l$-plan tangent.

Notons $Z_q$ la donnée de Z et de $q \in \{1,2,...,\infty\}$ ; convenons que dans $Z_q$ les seules orientations des variétés lagrangiennes utilisées seront des 2q-orientations.

Pour définir *des repères* de $Z_q$, notons $X = \mathbf{R}^l$ et $X^*$ son dual ; $Z(l)$ désigne $X \oplus X^*$ muni de la structure symplectique

(6) $$[z,z'] = \langle p,x' \rangle - \langle p',x \rangle$$

où $$z = x + p,\ z' = x' + p' ;\ x,x' \in X ;\ p,p' \in X^* ;$$

soit $\Lambda(l)$ la grassmannienne lagrangienne de $Z(l)$.

Un repère R de $Z_q$ est constitué par

— un isomorphisme $j_R : Z \to Z(l)$ respectant la structure symplectique ;

— un homéomorphisme $h_R : \Lambda_{2q}(Z) \to \Lambda_{2q}(l)$

ayant pour projection naturelle l'homéomorphisme $\Lambda(Z) \to \Lambda(l)$ induit par $j_R$.

Soient deux repères

$$R = j_R \times h_R,\ R' = j_{R'} \times h_{R'}.$$

Notons

$$s_R^{R'} = j_R\, j_{R'}^{-1} ;$$

évidemment

$$s_R^{R'} \in Sp(l),$$

$Sp(l)$ désignant le groupe des automorphismes de $Z(l)$, c'est-à-dire le groupe symplectique réel. Or le groupe fondamental de $Sp(l)$ est $\mathbf{Z}$ ; son revêtement à q feuillets $Sp_q(l)$ opère transitivement et effectivement sur $\Lambda_{2q}(l)$. Puisque $h_R\, h_{R'}^{-1}$ est un homéomorphisme de $\Lambda_{2q}(l)$ sur lui-même ayant pour projection l'homéomorphisme de $\Lambda(l)$ sur lui-même induit par $s_R^{R'}$, il existe un élément et un seul $S_R^{R'}$ de $Sp_q(l)$ ayant les propriétés suivantes :

la projection naturelle de $S_R^{R'}$ sur $Sp(l)$ est $s_R^{R'}$ ;

$S_R^{R'}$ induit l'homéomorphisme $h_R\, h_{R'}^{-1}$ de $\Lambda_{2q}(l)$ sur lui-même.

Nous identifierons donc $S_R^{R'}$ au changement de repère

$$R\, R'^{-1} = j_R\, j_{R'}^{-1} \times h_R\, h_{R'}^{-1}$$

et nous écrirons :

$$R = S_R^{R'} R', \text{ où } S_R^{R'} \in Sp_q(l) ; R \text{ pour } j_R \text{ ou } h_R.$$

Une *coordonnée locale* de $z \in V$, à savoir la composante

$$x \in X \text{ de } Rz \in X \oplus X^*,$$

est définie par chaque repère R, quand le plan tangent à V en z est transverse à $R^{-1} X^*$ ; l'ensemble des points de V ne vérifiant pas cette condition est noté $\Sigma_R$ ; c'est « le contour apparent » de V relativement à R.

Un changement de repère $S_R^{R'}$ définit donc au voisinage de chaque point de $V \setminus \Sigma_R \cup \Sigma_{R'}$ une bijection $x' \mapsto x(x')$, dont le déterminant fonctionnel en z est noté $\dfrac{d^l x}{d^l x'}$ ; supposons la variété V munie d'une 2q-orientation ; soit $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(Z)$ son plan tangent en z ; soit $X^*_{2q} \in \Lambda_{2q}(l)$, de projection naturelle $X^*$ sur $\Lambda(l)$ ; notons

$$m_R(z) \equiv m(R^{-1} X^*_{2q}, \lambda_{2q}) \text{ mod. } 2q ;$$

*cet indice de Maslov sert à définir :*

$$\text{(7)} \qquad \arg \frac{d^l x}{d^l x'} \equiv \pi[m_{R'}(z) - m_R(z)] \text{ mod. } 2q\pi$$

et

$$\text{(8)} \qquad \arg d^l x \equiv - \pi\, m_R(z) \text{ mod. } 2q\pi.$$

Cette définition est employée par (18) qui explicite la structure des « fonctions lagrangiennes ».

*Note.* — L'emploi de cette définition recourt aux notions suivantes :

$\Sigma(l)$, ensemble des $s \in Sp(l)$ tels que $sX^*$ et $X^*$ ne soient pas transverses ;

$\Sigma_q(l)$ la partie de $Sp_q(l)$ se projetant sur $\Sigma(l)$ ;

$$\text{Inert}(s,s's'') = \text{Inert}(s',s'',s) = \dots = l - \text{Inert}(s''^{-1},s'^{-1},s^{-1}) = \dots$$
$$= \text{Inert}(s^{-1}X^*,X^*,s'X^*) = \dots \in \{0,\dots,l\}$$

défini pour : $s\, s'\, s'' = I$ ; $s,s'$ et $s'' \in Sp(l) \setminus \Sigma(l)$ ;

$$m(s_q) = l - m(s_q^{-1}) = m(X^*_{2q}, s_q\, X^*_{2q}) \in \mathbf{Z}_{2q},$$

défini pour : $s_q \in Sp_q(l) \setminus \Sigma q(l)$ et vérifiant

$$\mathrm{Inert}(s,s',s'') = m(s_q) - m(s'^{-1}_q) + m(s''_q) \bmod 2q\,;$$

$$\mathrm{Inert}(s,\lambda,\lambda') = \mathrm{Inert}(s^{-1}\, X^*,X^*,\lambda') = \mathrm{Inert}(X^*,sX^*,\lambda)$$

(9) $$\equiv m(s_q) - m(X^*_{2q},\lambda_{2q}) + m(X^*_{2q},\lambda'_{2q}) \bmod 2q,$$

défini pour : $s \in Sp(l) \setminus \Sigma(l)$, $\lambda$ et $\lambda'$ transverses à $X^*$, $\lambda_{2q} = s_q\, \lambda'_{2q}$.

LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE $Mp(l)$, plus précisément son sous-groupe $Sp_2(l)$, permettra de définir « les fonctions lagrangiennes » sur les variétés lagrangiennes de $Z_4$. Notons $\mathcal{H}(X)$ l'espace de Hilbert des fonctions $f : X \to \mathbf{C}$ de carrés sommables et $\mathcal{S}'(X) \supset \mathcal{H}(X)$ l'espace des distributions tempérées sur X. Soit $\nu$ un nombre imaginaire pur, non nul :

$$\nu \in i\dot{\mathbf{R}}\,;$$

les opérateurs x et $\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial x}$ sont self-adjoints sur X, de même que leurs combinaisons linéaires à coefficients réels $a(x, \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial x})$, qui sont les éléments d'un espace vectoriel $\mathcal{A}$ ; $\mathcal{A}$ s'identifie à $Z(l)$. Ceux des automorphismes S de $\mathcal{S}'(X)$ qui transforment les $a \in \mathcal{A}$ en $SaS^{-1} \in \mathcal{A}$ constituent évidemment un Groupe $G(l)$ ; tout $S \in G(l)$ a donc pour image un automorphisme $a \mapsto SaS^{-1}$ de $\mathcal{A} = Z(l)$, qui est nécessairement un élément s de $Sp(l)$. D'où un morphisme

$$G(l) \to Sp(l).$$

Son noyau $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des S consistant en la multiplication des éléments de $\mathcal{S}'(X)$ par un nombre complexe non nul. Ce morphisme est un épimorphisme ; donc

$$G(l) \,/\, \dot{\mathbf{C}} = Sp(l).$$

Chaque élément de $G(l)$ est le produit $S_4\, S_3\, S_2\, S_1$ de quatre éléments de $G(l)$ du type suivant :

$$S_1 \text{ et } S_4 : v \mapsto u = e^{iq}\, v$$

où u et $v \in \mathcal{S}'(X)$, q est une forme quadratique réelle $X \to R$.

$S_2$ est une transformation de Fourier relative à toutes les coordonnées ou à quelques-unes d'entre elles ;

$S_3 : v \mapsto u$ est défini par $u(x) = K\, v(Tx)$, où T est une automorphisme de X et $K \in \mathbf{C}$.

$S_1$, $S_4$, $S_2$ sont donc unitaires sur $\mathscr{H}(X)$ ; $S_3$ aussi, si

(10) $\quad |K|^2 = |\text{dét } T|.$

Les éléments de $G(l)$ dont la restriction à $\mathscr{H}(X)$ est unitaire constituent donc un sous-groupe de $G(l)$ : c'est le groupe *métaplectique* $Mp(l)$ : on a

$$G(l) = Mp(l) \times \mathbf{R}_+ \,;\; \mathbf{C} = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}_+ \,;$$
$$Mp(l) \,/\, \mathbf{S}^1 = Sp(l)\,;$$

$\mathbf{R}_+$ étant le groupe multiplicatif des nombres positifs et $\mathbf{S}^1$ celui des nombres complexes de module 1.

En imposant à K la condition, plus stricte que (10)

(11) $\quad K = \pm \sqrt{\text{dét } T},$

nous obtenons des éléments $S = S_4\, S_3\, S_2\, S_1$ de $Mp(l)$ qui constituent encore un sous-groupe ; ce sous-groupe est le revêtement connexe à deux feuillets, $Sp_2(l)$, de $Sp(l)$ :

$$Sp_2(l) \,/\, \mathbf{S}^\circ = Sp(l), \text{ où } \mathbf{S}^\circ = \{1, -1\} \subset \mathbf{S}^1$$

Si $s \in Sp(l) \setminus \Sigma(l)$, alors il existe une forme quadratique réelle $A : X \oplus X \to \mathbf{R}$ telle que $s(x',p') = (x,p)$ s'énonce

$$p = A_x(x,x'),\ p' = -A_{x'}(x,x')\,;$$

$s \in Sp(l)$ est la projection de $\pm\ S \in Sp_2(l)$ définis comme suit : $u = Sv$ signifie

(12) $$u(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{l/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x,x')} v(x')d^l x',$$

où $\quad \Delta(A) = \pm \sqrt{\det_{jk} (A_{x_j x'_k})}.$

*Note.* — On a

(13) $\quad \arg \Delta(A) \equiv \dfrac{\pi}{2}\, m(S) \bmod 2\pi.$

FONCTIONS LAGRANGIENNES. — Donnons-nous dans l'espace symplectique $Z_2$ une variété lagrangienne lisse V, de phase $\varphi$.

Soit $R'$ un 2-repère de $Z_2$ ; définissons

$$\varphi_{R'} : \check{V} \to \mathbf{R} \text{ par } \varphi_{R'}(z) = \varphi(z) + \frac{1}{2} \langle p',x' \rangle,$$

où $z \in V$, $R'z$, $R'z = x' + p'$, $x' \in X$, $p' \in X^*$ ; donc $d\varphi_{R'}(z) = \langle p',dx' \rangle$.

Notons $U_{R'}$ une fonction de $z \in V \setminus \Sigma_{R'}$, fonction formelle de $\nu \in i\dot{\mathbf{R}}$, du type :

(14) $$U_{R'}(\nu,z) = \alpha_{R'}(\nu,z)\, e^{\nu\varphi_{R'}(z)}$$

où $\alpha_{R'}$ est la série formelle, à coefficients indéfiniment différentiables :

$$\alpha_{R'}(\nu{:}z) = \sum_j \nu^{-j}\, \alpha_{jR'}(z).$$

Soit R un autre 2-repère de $Z_2$ ; le changement de repère est

$$S_R^{R'} \in Sp_2(l).$$

Soit $f'$ une fonction de $(\nu,x')$ admettant, pour $\nu$ tendant vers $i\infty$, le développement asymptotique

(15) $$u'_{R'}(\nu,x') = \sum_{\{z|R'z \in x' + X^*\}} U_{R'}(\nu,z)\ ;$$

$S_R^{R'} f'$ est une fonction f de $(\nu,x)$ ; la méthode de la phase stationnaire montre que f admet un développement asymptotique

$$u_R(\nu,x) = \sum_{\{z|Rz \in x + X^*\}} U_R(\nu,z)$$

où $U_R$ est défini comme $U_{R'}$ l'est par (14) et est unique ; nous écrirons

(16) $$u_R = S_R^{R'}\, u_{R'},\ U_R = S_R^{R'}\, U_{R'}\ ;$$

$S_R^{R'}$ *opère localement sur* $u_{R'}$ *et* $U_{R'}$, *en conservant le support de* $U_{R'}$ :

$$\mathrm{Supp}\ U_{R'} = \bigcup_j \mathrm{Supp}\ \alpha_{jR'} \subset V.$$

Nous dirons que $U_R$ *et* $u_R$ *sont des fonctions* $\nu$*-formelles* définies respectivement sur V et X ; $u_R$ sera nommée : *projection* de $U_R$.

La donnée *sur* $V\setminus\Sigma_R$ *pour chaque* 2*-repère* R *d'une fonction* $\nu$*-formelle* $U_R$ *telle que*

(17) $$U_R = S_R^{R'}\, U_{R'}$$

constituera *une fonction lagrangienne* $U = \{U_R\}$ définie sur V ; $U_R$ sera son *expression* dans le repère R et $u_R$ sa projection sur X dans ce repère.

L'allure au voisinage de $\Sigma_R$ de l'expression $U_R$ de U peut être précisée : au voisinage d'un point z de $\Sigma_R$ n'appartenant pas à $\Sigma_{R'}$ on calcule

$$U_R = S_R^{R'} U_{R'}$$

au moyen de $U_{R'}$ par la méthode de la phase stationnaire ; elle introduit l'indice d'inertie d'un hessien ; cet indice s'identifie à

$$\text{Inert}\,(S_R^{R'},\ R\lambda_4,\ R'\lambda_4),$$

$\lambda_4$ étant le plan tangent à $\overset{\vee}{V}$ en z ; plus précisément, vu (13), cette méthode introduit

$$\text{Inert}\,(S_R^{R'},\ R\lambda_4,\ R\lambda_4) - m(S_R^{R'}) \bmod 4$$

c'est-à-dire, vu (9) et la définition (7), où $q = 2$,

$$\arg \sqrt{\frac{d^l x}{d^l x'}} \qquad \bmod 2\pi$$

On obtient ainsi *la structure des expressions* $U_R$ *des fonctions lagrangiennes* U :

$$(18) \qquad U_R(\nu,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu}\right)^j \left(\frac{\eta}{d^l x}\right)^{j+\frac{1}{2}} \beta_{Rj}(z)\, e^{\nu\varphi_R(z)},$$

où : $\eta$ est une *mesure régulière* $> 0$ sur V ;

$\sqrt{d^l x}$ est une demi-mesure, *définie sur* $\overset{\vee}{V}$ *par* (8), où $q = 2$ ;

les $\beta_R{}^j$ sont des fonctions $\overset{\vee}{V} \to \mathbf{C}$, *indéfiniment différentiables* ;

$\beta_{R0}$ *est indépendante* de R et est notée $\beta_0$.

Puisque $U_R(\nu,z)$ est une fonction $\nu$-formelle sur $V \backslash \Sigma_R$, chacun des termes de (18) doit être une fonction définie (donc uniforme) sur $V \backslash \Sigma_R$ ; autrement dit :

$$(19) \qquad \beta_{Rj}\, e^{\nu\varphi + (j+\frac{1}{2})\pi i\, m_R} \quad \textit{est uniforme sur } V\backslash\Sigma_R\,;$$

*si* V *est orientable* (au sens enclidien) (19) s'énonce :

$$(20) \qquad \beta_{Rj}\, e^{\nu\varphi + \frac{\pi}{2} i\, m_R} \quad \textit{est uniforme sur } V\backslash\Sigma_R.$$

OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS. — Soit $a^\circ$ une fonction $\nu$-formelle, définie sur Z et de phase nulle :

$$(21) \qquad a^\circ(\nu,z) = \sum_j \nu^{-j}\, a^\circ_j(z) \text{ (série formelle).}$$

Soit R un repère de Z ; notons $a^\circ_R$ la fonction $\nu$-formelle définie sur $Z(l)$ par

$$(22) \qquad \overset{o}{a}_R(\nu,x,p) = a^o(\nu,R^{-1}(x+p)) ;$$

donc

$$(23) \qquad \overset{o}{a}_R = \overset{o}{a}_{R'} \circ s^R_{R'} ;$$

soit

$$\overset{+}{a}_R(\nu,x,p) = e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}>}\ \overset{o}{a}_R(\nu,x,p) ;$$

si $\overset{o}{a}_R$ est un polynôme en $(\nu^{-1},x,p)$, alors $a_R = \overset{+}{a}_R(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux ; l'application

$$a^\circ \mapsto a_R = \overset{+}{a}_R(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$$

se prolonge par complétion en une application de l'ensemble des $a^\circ$ sur un ensemble d'opérateurs $a_R = \overset{+}{a}_R(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ ; $a_R$ est un endomorphisme de l'ensemble des $u_R$ et de l'ensemble des $U_R$ ; $a_R$ opère localement :

$$\operatorname{Supp} u_R \subset \operatorname{Supp} a_R\, u_R : \ \operatorname{Supp} U_R \subset \operatorname{Supp} a_R\, U_R.$$

$a_R$ est le transformé de $a_{R'}$ par $S^{R'}_R$ :

$$(24) \qquad a_R = S^{R'}_R\, a_{R'}\, S^R_{R'} ;$$

donc $\qquad a_R\, U_R = S^{R'}_R(a_{R'}\, U_{R'})$ si $U_R = S^{R'}_R\, U_{R'}$.

Etant donnée une fonction lagrangienne, $U = \{U_R\}$, il existe donc une fonction lagrangienne $aU = \{a_R\, U_R\}$.

L'opérateur

(25) $\quad a = \{a_R\} : U \to a\,U$

est nommé *opérateur pseudo-différentiel de* Z ; $a_R$ est son expression dans le repère R.

a U ne dépend que de U, qui est défini sur V, et du germe de $a^o$ sur V, c'est-à-dire des valeurs sur V de $a^o$ et de toutes ses dérivées.

Nous nommerons *solution lagrangienne* de l'équation pseudo-différentielle

$$a\,U = 0$$

toute fonction lagrangienne U vérifiant cette équation ; en général cette solution n'existera que pour certaines valeurs particulières de $\nu$.

*Note.* — Un cas important, où a est *self-adjoint*, est le suivant :

(26) $\quad a^\circ$ est indépendant de $\nu$, est à valeurs réelles et

$$< \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} > a^\circ(x,p) = 0 \text{ (donc } a^+ = a^\circ).$$

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES. — Soit, sur X, un opérateur différentiel $a_R(\nu, x, \frac{1}{\nu}, \frac{\partial}{\partial x})$ ; il est évidemment l'expression dans R d'un opérateur *pseudo-différentiel de* Z *unique :* a.

Soit $u_R(\nu,x)$ une solution asymptotique de l'équation

(27) $\quad a_R(\nu, x, \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x})\; u_R\;(\nu, x) = 0\,;$

c'est, par définition, une fonction $\nu$-formelle sur X vérifiant (27). Un calcul classique donne la phase $\varphi_R$ de $u_R$ par résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre [c'est-à-dire par construction d'une variété lagrangienne V de $Z(l)$ appartenant à une hypersurface donnée de $Z(l)$] et l'amplitude de $\alpha_R$ de $u_R$ par intégrations le long des caractéristiques de cette équation : $u_R$ est la projection d'une solution $\nu$-formelle $U_R$ sur $V\backslash\Sigma_R$ de l'équation

(28) $\quad a_R\; U_R = 0.$

La théorie précédente montre que localement, de chaque côté de $\Sigma_R$, $U_R$ a la structure (18), $\beta_{Rj}$ pouvant donc faire un saut à la traversée de $\Sigma_R$ ; en général $U_R$ *est indéterminé.*

On lève cette indétermination *en imposant à* $U_R$ *d'avoir la structure* (18), qui implique (19) ou (20) ; c'est imposer à $U_R$ d'être *l'expression dans* R *d'une fonction lagrangienne sur* V, U, *qui est évidemment solution lagrangienne de l'équation*

(29) $$a\,U = 0.$$

On peut dire que c'est imposer à $u_R$ de vérifier, en un certain sens, (27) même sur $\Sigma_R$.

C'est la *condition* que *Maslov* impose aux *solutions asymptotiques* (sans la justifier, puisqu'il n'emploie pas la notion d'opérateur pseudo-différentiel).

*Note.* — Dans le cas particulier où $a^\circ$ vérifie (26), $\beta_0$ est constant et cette condition s'énonce

(30) $$e^{\nu\varphi + \frac{\pi}{2} i\, m_R}$$ et les $\beta_{Rj}$ sont uniformes sur V.

LES APPLICATIONS DE CETTE THÉORIE n'ont pu être exposées cette année-ci. Elles semblent limitées à des équations très particulières.

L'une d'elles est *l'équation relativiste* stationnaire de *Schrödinger,* avec champ magnétique non nul ; cette équation vérifie (26). Elle dépend d'un paramètre : « l'énergie » ; l'ensemble des valeurs de l'énergie pour lesquelles elle possède une solution, d'ailleurs unique, est « le spectre ». Ce spectre se trouve être rigoureusement le même, qu'on impose aux solutions d'être des fonctions de carré sommable ou d'être des solutions asymptotiques, c'est-à-dire des fonctions $\nu$-formelles (ici, $\nu = \dfrac{i}{\hbar}$ où $2\pi\hbar$ = constante de Planck).

C'est également vrai de *l'équation de Dirac.*

Le spectre est repéré par des entiers : les nombres quantiques ; c'est seulement quand ces nombres sont grands que la solution fonction de carré sommable est approchée par la solution asymptotique. Celle-ci est toujours définie en première approximation par une trajectoire et une densité d'électrons relativistes. La notion de solution asymptotique donne donc une formalisation de la première théorie des quanta qui diffère de la mécanique ondulatoire, qui emploie cependant les équations de Schrödinger et de Dirac sans altérer leurs spectres.

***

Le Séminaire a consisté en les exposés suivants :

H. BREZIS, *Solutions à support compact d'inéquations variationnelles* ;

R. TEMAM, *Etude d'une fonction apparaissant dans la théorie de la turbulence d'U. Frisch et M. Lesieur* ;

U. FRISCH, *Dissipation à viscosité nulle en turbulence hydrodynamique* ;

PHAM THE LAI, *Noyaux d'Agmon (noyaux continus associés à des opérateurs réguliers d'espaces hilbertiens de fonctions)* ; 1er exposé : *introduction des noyaux d'Agmon et applications aux espaces de Sobolev* ; 2e exposé : *rapport avec l'interpolation* ; 3e exposé : *application aux opérateurs dégénérés* ;

J. VAUTHIER, *Cohomologie à croissance du d'' sur une variété de Stein* ;

P. MALLIAVIN, *Calcul des variations pour la géométrie riemannienne stochastique* ;

D. BREZIS, *Classes d'interpolation associées à un opérateur maximal monotone* ;

Mlle M.-F. BIDAUT, *Projection sur des ensembles non convexes dans les espaces de Banach.*

## PUBLICATIONS

— Edition ronéotypée du Séminaire.

— Rédaction du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

— J. LERAY, *Opérateurs partiellement hyperboliques* (*C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 276, p. 1685).

## MISSIONS

— Colloque sur les opérateurs intégraux de Fourier et les équations aux dérivées partielles (Nice, mai 1974) : exposé sur le groupe unitaire métaplectique et son application à la théorie de Maslov des développements asymptotiques.

— Colloque sur la géométrie symplectique et la physique mathématique (Aix-en-Provence, juin 1974) : exposé sur l'application de la théorie de Maslov des développements asymptotiques à l'équation de Schrödinger.