Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

CONTROLE IMPULSIONNEL ET ÉQUATIONS QUASI VARIATIONNELLES

Contrôle impulsionnel : un exemple

Soit à gérer une quantité (un bien) représentée par un nombre y (*l'état du système*) fonction du temps s et d'une « stratégie de commande » ou « *contrôle* », noté v, sachant que

1) à l'instant t on a $y(t) = x$ (x = stock à l'instant t) ;

2) on a une demande *déterministe* : soit $\mu > 0$ la demande par unité de temps.

Le contrôle v est de la forme

(1) $$v = \{\theta^1, \xi^1 ; \theta^2, \xi^2 ; \dots \theta^N, \xi^N\}$$

où $t \leqq \theta^1 < \dots < \theta^N \leqq T$,
θ^i = $i^{\text{ème}}$ instant de commande,
T = horizon fini ou infini,
ξ^i = quantité commandée à l'instant θ^i, donc $\theta^i > 0$.

On suppose que la livraison est instantanée, cas peu réaliste mais hypothèse dont on peut s'affranchir (cf. les publications en référence).

L'état $y(s;v)$ à l'instant s si l'on applique le contrôle v donné par (1) est :

(2) $$\left| \begin{array}{l} y(s;v) = x - \mu(s - t) \text{ pour } t \leqq s < \theta^1, \\ y(s;v) = x - \mu(s - t) + \xi^1 \text{ pour } \theta^1 \leqq s < \theta^2, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

La fonction coût tient compte des trois facteurs suivants :

(i) *coût fixe* $k > 0$ *attaché à toute commande* ;

(ii) coût de stockage ;

(iii) coût de rupture de stock.

Supposant, pour fixer les idées, que $T < \infty$, le coût attaché à un contrôle v est donc de la forme :

$$J(v) = \int_t^T f(y(s;v),s)ds + kN(v) \tag{3}$$

(où N(v) désigne le nombre de commandes de v, donc $N(v) = N$ dans (1)).

L'objectif de l'étude est de caractériser la fonction

$$u(x,t) = \text{inf.}\ J(v), \tag{4}$$

où v parcourt l'ensemble des contrôles (1), de donner des procédés de calcul, théoriques et numériques, de u et d'en déduire la stratégie optimale de commande ou *contrôle optimal.* Il est évident que l'on n'a à considérer que les contrôles comportant un *nombre fini* d'instants de commande, d'où la terminologie « *contrôle impulsionnel* ».

Extensions

Naturellement la situation précédente, que l'on n'a détaillée que pour donner un exemple, doit être étendue dans de nombreuses directions :

1) on aura en général n *biens,* $n >> 1$; on remplacera alors $x \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{R}^n$ [l'étude du contrôle impulsionnel de systèmes distribués — donc de systèmes en dimension infinie — conduit à des inéquations aux dérivées partielles *et* fonctionnelles, sur lesquelles on reviendra] ;

2) on a généralement *des contraintes sur l'état* y(s;v) ;

3) il faut tenir compte des délais de livraison ;

4) on rencontre d'autres structures de coût ; par exemple en général le coût d'une commande ξ sera de la forme $k_0 + K_1\xi$;

5) (c'est le point le plus important) *la demande est généralement aléatoire,* pouvant être modélisée par un processus de Wiener ou de Wiener et de Poisson ; dans ce cas, le contrôle et l'état sont des variables aléatoires et la formule (3) doit alors être remplacée par

$$J(v) = E\{\int_t^T f(y(s;v),s)ds + kN(v)\}, \tag{5}$$

Dans *tous les cas* on introduit u par (4).

Inéquations aux dérivés partielles satisfaites par u

On commence par montrer que si la fonction u est assez régulière (ce qui, en général, ne sera démontré que plus loin, par les techniques des Inéquations Quasi Variationnelles) alors elle est caractérisée par

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial u}{\partial t} + Au - f \leqq 0, \\ u - M(u) \leqq 0, \\ (-\dfrac{\partial u}{\partial t} + Au - f)\,(u - M(u)) = 0 \end{array}\right.$$

où :

A = opérateur elliptique du 2[e] ordre (générateur infinitésimal du processus), comportant un terme intégral dans le cas de processus poissoniens, et se réduisant à un opérateur du premier ordre dans le cas déterministe [(1)],

M est un opérateur non linéaire et non local attaché à la structure du coût ; dans le cas d'un coût fixe $k > 0$ à la commande, on a :

$$(7)\qquad Mv(x) = k + \inf_{\xi_i \geqq 0} v(x + \xi).$$

S'il n'y a pas de contraintes sur l'état y(s;v) du stock, (6) a lieu pour $x \in \mathbb{R}^n$ (et $t \in [0,T]$) ; il faut rajouter la condition

$$(8)\qquad u(x,T) = 0.$$

S'il y a des contraintes sur l'état du stock se traduisant par l'appartenance de y(s;v) à un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, alors (6) a lieu pour $x \in \mathcal{O}$ (et $t \in [O,T]$) et il faut rajouter à (6) et (8) (qui a lieu pour $x \in \mathcal{O}$) *des conditions aux limites* telles que, par exemple

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} \leqq 0,\ u - M(u) \leqq 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}\,(u - M(u)) = 0 \\ \text{sur } \partial\mathcal{O} \times]O,T[\end{array}\right.$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \nu_A}$ = dérivée conormale associée à A.

---

(1) Dans le cas de l'Exemple du début, $Au = \mu \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Remarque : Les conditions (9) supposent que l'on est dans le cas stochastique ; les conditions aux limites à imposer dans le cas déterministe ne sont pas encore totalement élucidées.

Le cas stationnaire

Le problème stationnaire correspondant à (6) (8) (9) est

$$(10)\qquad \left|\begin{array}{l} Au - f \leqq 0,\ u - M(u) \leqq 0, \\ (Au - f)(u - M(u)) = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \end{array}\right.$$

avec les conditions aux limites

$$(11)\qquad \frac{\partial v_A}{\partial v_A} \leqq 0,\ u - M(u) \leqq 0,\ \frac{\partial u}{\partial v_A}(u - M(u)) = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}.$$

(Naturellement dans le cas où $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, on suppose dans la définition (7) que $x + \xi \in \mathcal{O}$).

Le problème (10) (11) *comme problème à frontière libre*

D'après (10) il y aura dans $\mathcal{O}$ deux régions :

S = région où $u = M(u)$ (région de saturation)

C = région où $u < M(u)$ et où $Au = f$ (ensemble de continuation)

la frontière entre S *et* C *n'étant pas connue a priori* et constituant en fait *l'une des inconnues fondamentales du problème.*

On a évidemment le même type de remarque dans les cas *d'évolution.*

Il s'agit donc d'un problème « analogue » aux problèmes à frontière libre rencontrés en Physique mathématique : problèmes de Stefan, matériaux élastoplastiques, fluides de Bingham, problèmes d'infiltration, mécanique unilatérale, etc., mais avec ici une *différence essentielle* due (entre autres) à la *non localité de l'opérateur* M.

Les inéquations quasi variationnelles [2] *stationnaires*

Supposons que A est donné par

$$(12)\qquad Av = -\Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + \Sigma a_j(x)\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_o(x)v,$$

$$\Sigma a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \alpha\, \Sigma \xi_i^2,\ a_o(x) \geqq \alpha > 0,\ \text{p.p.},$$

$$a_{ij},\ a_j,\ a_o \in L^\infty(\mathcal{O}).$$

(2) Notées en abrégé I.Q.V.

Posons, pour $u,v \in H^1(\mathcal{O})$ (espace de Sobolev d'ordre 1)

(13)

$$a(u,v) = \sum_{i,j} \int_{\mathcal{O}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{j} \int_{\mathcal{O}} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx + \int_{\mathcal{O}} a_0 uv \, dx.$$

Alors (10) (11) équivalent à la recherche de $u \in H^1(\mathcal{O})$ avec

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} u \leqq M(u), \\ a(u,v-u) \geqq (f,v-u) \ \forall v \in H^1(\mathcal{O}), \ v \leqq M(u), \end{array} \right.$$

où $(f,v) = \int_{\mathcal{O}} fv \, dx.$

Remarques

1) Si l'on remplace dans (14) M(u) par une fonction *connue* ψ on obtient une *Inéquation variationnelle* :

$$(15) \qquad a(u,v-u) \geqq (f,v-u) \ \forall v \leqq \psi, \ u \leqq \psi;$$

la différence essentielle entre (14) et (15) réside dans le caractère « implicite » de la condition « $u \leqq M(u)$ » dans (14) par rapport au caractère « explicite » de « $u \leqq \psi$ » dans (15).

2) Dans le cas *d'évolution*, on obtient l'I.Q.V. d'évolution :

$$(16) \quad \left| \begin{array}{l} -(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u) + a(u,v-u) \geqq (f, v-u) \ \forall v \leqq M(u) \\ u \leqq M(u), \ u(T) = 0. \end{array} \right.$$

Quelques résultats

On a montré dans le cours l'existence d'une solution « maximum » $\geqq 0$ de (14) sous l'hypothèse $f \in L^\infty(\mathcal{O})$, $f \geqq 0$. On a donné divers procédés d'approximation de la solution maximum.

Dans des cas particuliers où M applique $H^1(\mathcal{O})$ dans lui-même [(3)], on a donné un procédé d'approximation de la solution minimum et on a vu que solutions minimum et maximum pouvaient être distinctes.

(3) R. Temam a montré que cela n'est pas le cas pour M donné par (7), si $n > 1$. Mais d'autres situations conduisent à des cas où l'hypothèse est vérifiée.

Suivant L. Tartar (cf. Bibliographie plus loin) on a montré en général, par un procédé non constructif, l'existence de solutions maximum et minimum et on a montré qu'il y avait unicité dans les cas importants pour les applications.

On a donné divers résultats de régularité et de perturbations singulières.

On a donné quelques indications sur les I.Q.V. « doubles » où dans (14) on a

$$M_1(u) \leqq u \leqq M_2(u), \ M_1(u) \leqq v \leqq M_2(u).$$

Puis on a donné quelques résultats d'existence et de régularité pour les I.Q.V. d'évolution (16), dont l'étude sera poursuivie dans le cours de l'an prochain. *Les détails des démonstrations* des résultats précédents seront inclus dans un ouvrage en préparation de A. Bensoussan et l'A.

PUBLICATIONS

A. BENSOUSSAN et J.-L. LIONS, Notes au C.R.A.S. Paris, 1) t. 276, 1973, p. 1189-1192 ; 2) id., p. 1333-1338 ; 3) 3 Notes au C.R.A.S. en mars, avril 1974.

— Article *à la mémoire du Professeur Petrowski* (*Ouspechi Mat. Nauk,* 1973).

— *Colloque d'Analyse convexe de Grenoble : I.Q.V. et points de Nash* (*Lectures Notes,* Springer).

— Article dans *Applicable Analysis,* 1973, p. 267-294.

— Article *en hommage à I. M. Nikolski* (*Ouspechi Math. Nauk,* 1974).

— Article dans le *Journal of Optimization and Applied Math.,* 1974.

A. BENSOUSSAN, M. GOURSAT et J.-L. LIONS, Note au C.R.A.S. Paris, t. 276, 1973, p. 1279-1284.

Autres travaux sur les I.Q.V. :

L. TARTAR, Note au C.R.A.S., avril 1974.

M. GOURSAT, C. LEGUAY et MAURIN, Rapports *Laboria.*

Les I.Q.V. sont, semble-t-il, un outil utile dans des problèmes de frontière libre venant de la mécanique ; ainsi C. BAIOCCHI, dans une note aux C.R.A.S., 1974, a-t-il pu compléter son étude de l'infiltration dans les digues, en utilisant, entre autres, les techniques des I.Q.V.

C. BAIOCCHI, Note au C.R.A.S., avril 1974.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Codirection (avec les Prof. Benjamin, Marchouk et Stampacchia) du Cours de Trieste-Unesco sur les *Méthodes mathématiques et numériques en hydrodynamique,* et conférences sur les *Fluides de Bingham,* octobre-décembre 1973.

Conférences aux Universités de Nice et Bordeaux, février 1974.

Conférences à Tulane University, New Orleans (dans le cadre de l'année Equations aux dérivés partielles) ; à l'Université de l'Arizona, Tucson ; à l'U.C.L.A., Los Angeles ; à l'Université de Chicago et à Northwestern University, 19 mars - 4 avril 1974.

Conférence sur le *Contrôle optimal* à la réunion des Mathématiciens Hispano Portugais, 16-19 avril 1974, Université de Séville.

Conférences au Colloque d'Analyse fonctionnelle de Londres, 23-26 avril 1974.

Conférence au Colloque I.F.I.P. sur l'*Optimisation,* Novosibirsk, 1er-6 juillet 1974.

Conférence d'une heure au Congrès international des Mathématiciens, Vancouver, Canada, 21-29 août 1974.

Conférence au Colloque d'Analyse numérique et de mécanique non linéaire, Université du Texas, 23-25 septembre 1974.

Participation à la réunion du Conseil scientifique du Laboratoire d'Analyse mécanique de Pavie (Professeur Magenes), 20 juin 1974.