Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le *cours* a d'abord résumé les cours antérieurs qui avaient explicité la notion de solution asymptotique d'équations aux dérivées partielles, due à V. I. Maslov ; ils l'avaient étendue à des *équations pseudo-différentielles formelles* et rattachée à la notion de *solution lagrangienne.*

RAPPELS. — Soit Z l'espace $\mathbf{R}^{2l}$ muni d'une structure symplectique [.,.], c'est-à-dire d'une forme bilinéaire, antisymétrique, à valeurs réelles, de rang maximal. Soit

$$\nu \in i\, \dot{\mathbf{R}}_+,$$

$\dot{\mathbf{R}}_+$ étant l'ensemble des nombres réels > 0.

Des cours antérieurs ont défini, un opérateur pseudo-différentiel a par la donnée sur Z d'une fonction ν-formelle a^o, à valeurs matricielles :

$$a^o(\nu,z) = \sum_{j \in \mathbf{N}} \nu^{-j}\, a^o_j(z),$$

cette somme étant formelle et ayant pour coefficients des fonctions C^∞

$$a^o_j : Z \to \mathbf{C}^{k\times k}.$$

L'opérateur a est *self-adjoint* si la matrice $\nu^{-j}\, a^o_j(z) \in \mathbf{C}^{k\times k}$ est self-adjointe pour tout j et tout z.

Ces opérateurs opèrent sur les *fonctions lagrangiennes* U ; une telle fonction lagrangienne a été définie, dans un repère R, par une ν-série formelle U_R, dont les coefficients sont des fonctions C^∞, à valeurs vectorielles :

$$V \to \mathbf{C}^k,$$

V étant une *variété lagrangienne* de Z, c'est-à-dire une variété sur laquelle

$$d\,[z,\ dz] = 0,$$

ce qui implique dim V $\leqq l$; nous choisissons dim V $= l$.

Une *solution lagrangienne* de l'équation

$$a\,U = 0$$

est une fonction lagrangienne vérifiant cette équation.

Tout solution lagrangienne U de a définit dans chaque repère R *une solution asymptotique* U_R de l'expression a_R de a dans R et vice-versa. L'emploi de la notion de solution lagrangienne montre que les *singularités des solutions asymptotiques ne sont qu'apparentes.* (L'optique géométrique consiste à employer des solutions asymptotiques des équations de Maxwell ; elles ont des singularités sur les caustiques, c'est-à-dire sur l'enveloppe des rayons lumineux).

La construction des solutions lagrangiennes U d'un opérateur a s'effectue par le processus suivant *quand la matrice* a^o_o *est self-adjointe* et que

$$H(z) = \text{dét}\ a^o_o\,(z)$$

n'est pas identiquement nul ; la fonction, à valeurs réelles, H, est alors nommée *hamiltonien de l'opérateur a.*

1) On construit *les variétés lagrangiennes* V appartenant à l'hypersurface W : H(z) = 0 ; cette construction équivaut à celle des solutions d'une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du premier ordre : les équations de V s'obtiennent en annulant H et $l - 1$ autres intégrales premières du *système d'Hamilton* :

$$\frac{dz}{dt} = H_z(z),$$

où H_z est le champ de vecteurs de Z tel que

$$dH = [H_z,\ dz]\ ;$$

les courbes de Z vérifiant ce système d'Hamilton sont nommées *caractéristiques de Maslov* ou m-caractéristiques ; V est engendré par une famille de m-caractéristiques.

2) Sur le revêtement universel $\check{V}$ de V, on construit la fonction

$$\varphi : \check{V} \to \mathbf{R}$$

telle que

$$d\varphi = \tfrac{1}{2} [z, dz] ;$$

on la nomme *phase de V*.

3) On *détermine* U *par intégration,* le long des m-caractéristiques engendrant V, d'une suite de systèmes différentiels linéaires.

4) Ce processus n'aboutit à la construction de U que si une suite de conditions d'uniformité sur V se trouve vérifiée ; dans ces conditions figure l'indice de Maslov : ce sont *les conditions quantiques de Maslov.*

Note 1.1. — Si l'on définit U mod $\frac{1}{\nu^N}$, c'est-à-dire si on limite le processus précédent à ses N premiers pas (une condition banale étant imposée à U mod $\frac{1}{\nu^{N+1}}$ si $k > 1$), alors

$$(1.6) \qquad a\, U \equiv 0 \bmod \frac{1}{\nu^{N+1}} ;$$

on dit que U est solution d'ordre N.

Note 1.2. — Supposons

$$H_z \neq 0 \quad \text{pour} \quad H = 0.$$

Soit V une variété lagrangienne appartenant à l'hypersurface W : $H(z) = 0$; pour qu'existe sur V au moins *une solution lagrangienne* U *d'ordre* 1, il faut et suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) V possède au moins *une mesure régulière, invariante par le champ de vecteurs* H_z, qui est tangent à V ;

2) *la condition de Maslov d'ordre* 1, qui ne concerne que V, *est vérifiée.*

L'intégration à effectuer, le long des m-caractéristiques engendrant V, pour obtenir U mod $\frac{1}{\nu}$ est banale.

L'étude des solutions lagrangiennes d'une équation aux dérivées partielles diffère donc essentiellement de celle des solutions de cette équation au sens de l'analyse fonctionnelle : cette étude emploie la *géométrie symplectique,* les propriétés des *équations d'Hamilton,* l'invariant *topologique* appelé *indice de Maslov* et son expression par des procédés de *géométrie différentielle, les conditions quantiques de Maslov.* Ces notions étaient celles qu'employait *la première mécanique quantique,* à cela près que les conditions quantiques de Maslov ont une définition générale, qu'impose la notion de solution lagrangienne, tandis que la première théorie quantique emploie des conditions quantiques, de nature arithmétique, qui n'ont de sens que dans des cas particuliers.

Les solutions des *équations de Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac* ne sont pas, en physique, des grandeurs observables : du point de vue physique, il n'est pas absurde de chercher pour quelles valeurs de leur paramètre, l'énergie, elles possèdent des *solutions lagrangiennes, définies sur des variétés lagrangiennes compactes ;* on retrouve *les niveaux d'énergie de la mécanique ondulatoire,* c'est-à-dire les niveaux d'énergie pour lesquels ces équations possèdent des solutions (au sens de l'analyse fonctionnelle) à gradients de carrés sommables.

La notion de solution lagrangienne permet donc un nouvel emploi de ces équations, s'accordant avec les résultats expérimentaux et s'apparentant étroitement avec la mécanique corpusculaire.

Ces équations ont pour *hamiltonien* celui de l'*électron de l'atome d'hydrogène,* placé dans un *champ magnétique uniforme,* de carré négligeable.

Notations. — E^3 est l'espace euclidien de dimension 3 ; $X = X^* = E^3$; un repère privilégié de Z est choisi, identifiant Z à $X \oplus X^*$; un vecteur z de Z est donc un couple (x,p) de vecteurs de E^3 ; on note

$$R = |x|,\ P = |p|,\ L = |x \wedge p|,\ Q = \langle p,x \rangle,\ M = x_1\, p_2 - x_2\, p_1,$$

en sorte que

$$P^2\, R^2 = L^2 + Q^2,\ |M| \leqq L.$$

Notons Φ, Ψ, Θ les angles d'Euler du repère orthonormé de E^3 dont les premier et troisième axes contiennent x et $x \wedge p$; on a donc : $M = L \cos \Theta$.

Nous choisissons :

$$\nu = i$$

UNE ÉQUATION DU TYPE SCHRÖDINGER, KLEIN-GORDON. —

Il s'agit de l'équation

(1) $\qquad a\, U = 0,$

où l'opérateur a est défini par a^o = H, indépendant de ν, et

$$(2) \qquad H(x,p) = H\,[L,M,Q,R].$$

Nous cherchons à quelle condition cette équation (1) possède des solutions lagrangiennes U, d'ordre 1, à support compact. C'est chercher à quelle condition l'hypersurface de Z

$$(3) \qquad W : H\,[L,M,Q,R] = 0$$

contient au moins une variété lagrangienne, à support compact, vérifiant les conditions quantiques de Maslov.

Nous imposons à (L,M) les deux conditions :

$$|M| \leqq L\,;$$

la courbe du demi-plan $(Q,R > 0)$

$$(4) \qquad \Gamma\,(L,M) : H\,[L,M,Q,R] = 0,$$

est compacte et n'a pas de singularité.

Sur cette courbe définissons un paramètre t par :

$$(5) \qquad \frac{dR}{R\,H_Q} = -\frac{dQ}{R\,H_R} = dt\,;\ \text{soit}\ c = \int_\Gamma dt\,;$$

sur W nous employons les coordonnées

$L,M,\quad t \bmod c,\quad \Phi \bmod 2\pi,\quad \Psi \bmod 2\pi$

et les fonctions $\omega,\lambda,\mu,\varrho,\sigma,\tau$ de (L,M,T), à valeurs réelles, définies par les équations :

$$(6) \qquad \begin{aligned} d\omega &= Q\,\frac{dR}{R} + \lambda\,dL + \mu\,dM \\ d\lambda &= -\,H_L\,dt + \varrho\,dL + \sigma\,dM \\ d\mu &= -\,H_M\,dt + \sigma\,dL + \tau\,dM. \end{aligned}$$

Notons : $\Delta\omega = \omega\,(L,M,t+c) - \omega\,(L,M,t)$, etc. ; nous avons, en définissant

$$(7) \qquad N\,(L,M) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(L,M)} Q\,\frac{dR}{R},$$

$$(8) \qquad \Delta\omega = 2\pi\, N\,(L,M),\ \Delta\lambda = 2\pi\, N_L,\ \Delta\mu = 2\pi\, N_M,$$
$$\Delta\varrho = 2\pi\, N_{L^2},\quad \Delta\sigma = 2\pi\, N_{LM},\ \Delta\tau = 2\pi\, N_{M^2}.$$

La valeur des dérivées $\varrho_t\,(L,M,t)$, σ_t, τ_t est donnée par la condition :

$$(9) \quad \begin{cases} \varrho_t\,\dot{L}^2 + 2\,\sigma_t\,\dot{L}\,\dot{M} + \tau_t\,\dot{M}^2 + H_{L^2}\,\dot{L}^2 + H_{M^2}\,\dot{M}^2 + H_{Q^2}\,\dot{Q}^2 \\ + 2\,H_{MQ}\,\dot{M}\,\dot{Q} + 2\,H_{LQ}\,\dot{L}\,\dot{Q} \;+ 2\,H_{LM}\,\dot{L}\,\dot{M} = 0 \end{cases}$$

pour tout $(\dot{L},\dot{M},\dot{Q})$ tel que $H_L\,\dot{L} + H_M\,\dot{M} + H_Q\,\dot{Q} = 0.$

D'une part les m-caractéristiques sont les courbes :

$$(10) \qquad C : \begin{cases} L = \text{const},\ M = \text{const}, \\ \Psi + \lambda\,(L,M,t) = \text{const},\ \Phi + \mu\,(L,M,t) = \text{const} \end{cases}$$

D'autre part, à la traversée du contour apparent de V, le long d'une m-caractéristique orientée dans le sens $dt > 0$, le saut $\pm\, 1$ de l'indice de Maslov est le signe de

$$(11) \qquad \varrho_t\,\dot{L}^2 + 2\,\sigma_t\,\dot{L}\,\dot{M} + \tau_t\,\dot{M}^2 - H_L\,\frac{(L\,\dot{M} - \dot{L}\,M)^2}{(L^2 - M^2)\,\sin^2\Psi}$$

Ces formules permettent d'établir les résultats suivants, dont le premier est aisé et n'emploie pas ϱ,σ,τ :

Il existe trois types V_1, V_2, V_3 de variétés lagrangiennes compactes V, appartenant à W :

1) Une variété V_3 est un tore de dimension 3 :

$$T^3\,(L,M) : L = \text{const},\ M = \text{const}\,;$$

elle vérifie la condition quantique de Maslov quand :

$$(12) \qquad L + \tfrac{1}{2} \equiv 0,\ M \equiv 0,\ N\,(L,M) + \tfrac{1}{2} \equiv 0 \bmod 1\ ;\ |M| \leqq L.$$

2) Sur une variété V_2, L et M ne sont pas constants, mais sont fonction d'un même paramètre s ; V_2 est fibré par des tores T^2 (s) de dimension 2 ; toute caractéristique engendrant V_2 appartient à l'un de ces tores ; il en résulte que N_L et N_M sont liés par une relation affine à coefficients entiers ; ces entiers sont constants sur V_2. L'emploi de (9) et (11) permet d'expliciter sur V_2 une fonction F à valeurs réelles telle que :

— le contour apparent ait l'équation : $F \equiv O \mod 1$;

— l'indice de Maslov soit la partie entière de F.

La condition quantique de Maslov est vérifiée quand existent 6 entiers L_0,M_0,N_0,L_1,M_1,N_1 tels que :

$$(13)\quad \begin{cases} L_0\, L_1 + M_0\, M_1 + N_0\, N_1 = 0; \\ L_1,M_1,N_1 \text{ sont premiers dans leur ensemble;} \\ \text{sur } V_2 : (L_1,M_1,N_1) \wedge (L + \tfrac{1}{2},M,N\,(L,M) + \tfrac{1}{2}) = (L_0,M_0,N_0) \end{cases}$$

3) Une variété V_1 contient une partie ouverte V_0 sur laquelle L et M sont indépendants ; V_0 est fibrée par des m-caractéristiques fermées ; il en résulte que N_L et N_M sont rationnels et constants sur V_0. L'emploi de (9) et (11) permet d'expliciter sur V_0 une fonction F ayant les propriétés énoncées ci-dessus en 2). La condition quantique de Maslov est vérifiée quand existent 4 entiers L_1,M_1,N_1,N_0 tels que :

$$(14)\quad \begin{cases} L_1,M_1,N_1 \text{ sont premiers dans leur ensemble;} \\ \text{sur } V_0 : L_1\,(L + \tfrac{1}{2}) + M_1\, M + N_1\, N\,(L,M) = N_0. \end{cases}$$

D'où :

THÉORÈME 1. — *L'équation* (1) *ne peut posséder de solution lagrangienne d'ordre 1 à support compact que si, dans l'espace de coordonnées* (L,M,N) *la surface d'équation* [cf. (7)]

$$(15)\qquad N = N\,(L,M),\ |M| \leqq L$$

vérifie l'une des trois conditions suivantes :

1) *La surface* (15) *contient un point* (L,M,N) *tel que :*

$$(16)\qquad L - \tfrac{1}{2} \equiv M \equiv N + \tfrac{1}{2} \equiv 0 \mod 1$$

2) *Cette surface* (15) *contient un segment rectiligne d'équation.*

$$(17)\qquad (L_1,M_1,N_1) \wedge (L + \tfrac{1}{2},M,N + \tfrac{1}{2}) = (L_0,M_0,N_0),$$

où L_0,M_0,N_0,L_1,M_1,N_1 *sont entiers* (c'est-à-dire $\in \mathbf{Z}$), L_1,M_1,N_1 *étant premiers entre eux dans leur ensemble.*

3) *Cette surface* (15) *contient une partie ouverte d'un plan d'équation*

$$(18) \qquad L_1 (L + \tfrac{1}{2}) + M_1 M + N_1 (N + \tfrac{1}{2}) = N_0,$$

où L_1, M_1, N_1, N_0 *sont entiers* (c'est-à-dire $\in \mathbb{Z}$), L_1, M_1, N_1 *étant premiers dans leur ensemble.*

Quand la surface (15) *vérifie* 1), *alors l'équation* (1) *possède des solutions lagrangiennes définies sur le tore* T^3 (L,M).

LES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER ET DE KLEIN-GORDON. — Ces équations s'obtiennent en choisissant

$$(19) \qquad H(x,p) = \tfrac{1}{2} P^2 + \tfrac{1}{2} A(M) - \frac{B}{R} + \frac{C}{2R^2},$$

où A est fonction affine de M, B et C sont constants,

$$a^o = H,$$

$C = 0$ dans le cas Schrödinger ; $C < 0$ dans le cas Klein-Gordon (c'est-à-dire Schrödinger relativiste).

L'intégrale (7) se calcule aisément par résidus ; de ce calcul résulte ceci : les cas 2) et 3) du théorème 1 ne se présentent qu'en même temps que le cas 1) ; ce cas est celui où existent trois entiers

$$l = L - \tfrac{1}{2},\ m,\ n = L + N$$

tels que

$$(20) \qquad n = \frac{B}{\sqrt{A(m)}} + l + \tfrac{1}{2} - \sqrt{(l + \tfrac{1}{2})^2 + C}, \quad |m| \leqq l < n.$$

A dépend d'un paramètre E : *le niveau d'énergie de l'atome* ; l'équation (20) peut être résolue en E et définit une fonction à valeurs réelles

$$(l,m,n) \mapsto E(l,m,n)$$

du triplet d'entiers (l,m,n) tel que :

$$(21) \qquad |m| \leqq l < n$$

ces entiers sont les trois *entiers quantiques* ; les valeurs de E sont *les niveaux d'énergie quantiques.*

Le théorème 1 prouve le 1) du théorème 2.

THÉORÈME 2. — 1) *Les valeurs de* E *telles que l'équation a* $U = 0$ *possède des solutions lagrangiennes* U, *d'ordre* 1, *à support compact, sont les niveaux d'énergie quantiques.*

2) *Les valeurs de* E *telles que cette équation a* $U = 0$ *possède des solutions lagrangiennes* U (d'ordre ∞) *définies sur un tore* $T^3(L,M)$ *sont encore les niveaux d'énergie quantiques.*

3) *Les valeurs de* E *telles que l'équation a* $u = 0$ *possède une solution* u, *fonction à gradient de carré sommable, sont encore les niveaux d'énergie quantiques.*

L'ÉQUATION DE DIRAC. — Son inconnue est un couple (u',u'') de fonctions $E^3 \to C^2$; elle dépend du paramètre $E \in \mathbf{R}$, qui est le niveau d'énergie de l'atome ; elle contient trois 2×2 matrices, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, self-adjointes, de traces nulles, à coefficients $\in \mathbf{C}$, qui vérifient les relations :

$$\sigma_k^2 = 1, \quad \sigma_j \sigma_k = - \sigma_k \sigma_j \text{ si } j \neq k,$$
$$\sigma_2 \sigma_3 = i\, \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\, \sigma_2, \quad \sigma_1 \sigma_2 = i\, \sigma_3 ;$$

elle contient le potentiel électro-magnétique

$$(A_0,A_1,A_2,A_3) = \left(\frac{\alpha}{R}, - \beta x_2, \beta x_1, 0 \right) ; \tag{22}$$

β^2 *est négligeable* ; si l'on prend pour unités la masse de l'électron, la vitesse de la lumière et la constante de Planck $\hbar$, cette équation de Dirac s'écrit

$$\begin{aligned} &\left[(E + A_0) + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + A_k \right) \sigma_k \right] u' = u'' \\ &\left[(E + A_0) - \sum_{k} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} + A_k \right) \sigma_k \right] u'' = u' \end{aligned} \tag{23}$$

Cherchons ses *solutions lagrangiennes d'ordre 1 à support compact ; son hamiltonien est* H^2, où

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} (p_k + A_k)^2 - \tfrac{1}{2} (E + A_0)^2 + \tfrac{1}{2} \tag{24}$$

est, mod. β^2, du type (19).

Les variétés lagrangiennes compactes de l'hypersurface $W : H = 0$ sont les mêmes que ci-dessus. *Limitons-nous à l'étude* de celles d'entre elles qui sont des tores T^3 (L,M).

Le fait que l'hamiltonien H^2 s'annule deux fois sur W entraîne que les conditions quantiques de Maslov diffèrent de celles qui intervenaient ci-dessus ; ces conditions ne vont plus dépendre de V seulement ; la construction sur V d'une solution lagrangienne ne sera plus banale.

Cette construction se réduit à celle d'une fonction $v : T^3 (L,M) \rightarrow \mathbf{C}^2$, par intégration, le long des m-caractéristiques engendrant T^3 (L,M), de l'équation différentielle suivante, où

$\mathcal{E} = -\operatorname{grd} A_0$ est le champ électrique,

$\mathcal{H} = \operatorname{rot} (A_1,A_2,A_3)$ est le champ magnétique :

$$(25) \qquad \frac{1}{i}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\sum_k \mathcal{H}_k \sigma_k v - \frac{1}{2}\frac{1}{1+E+A_0}\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ p_1+A_1 & p_2+A_2 & p_3+A_3 \\ \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 \end{vmatrix} v = 0 ;$$

dans cette équation, le potentiel-vecteur magnétique (A_1,A_2,A_3) est négligeable.

L'expression (22) du potentiel conduit au changement d'inconnue

$$(26) \qquad v = e^{-\frac{1}{2}\Phi\sigma_3} w,$$

où la fonction à valeurs matricielles

$$(27) \qquad \Phi \mapsto e^{-\frac{1}{2}\Phi\sigma_3}$$

est définie sur un revêtement d'ordre 2 de T^3 (L,M) ; l'équation (25) devient :

$$(28) \qquad \frac{1}{i}\frac{dw}{dt} + \frac{\beta}{2}\sigma_3 w + \frac{\alpha}{2R^3}\frac{L}{1+E+A_0}(\sigma_1 \sin\Theta + \sigma_3\cos\Theta) w = 0.$$

Le coefficient de w est une fonction périodique de t, de période c, à valeurs dans l'espace des 2×2-matrices self-adjointes de trace nulle ; il existe donc $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ et deux solutions particulières w_+ et w_- de (28) telles que

(29) $$w_{\pm}(t + c) = e^{\pm 2\pi i \varepsilon}\, w_{\pm}(t) \text{ pour tout } t$$

Les fonctions (27), $w_{\pm}$ et la fonction N, définie par (7), valant

(30) $$N(L,M) = \frac{\alpha E}{\sqrt{1 + 2\beta M - E^2}} - \sqrt{L^2 - \alpha^2},$$

permettent d'expliciter la *condition quantique de Maslov* ; elle s'énonce comme suit :

(31) $$\begin{cases} \text{Il existe } \textit{trois entiers} \\ l = L - \frac{1}{2},\ m + \frac{1}{2} = M + \frac{1}{2},\ n \\ \textit{tels que} \\ 0 \leqq l < n,\ |m| \leqq l \pm \frac{1}{2} \\ n = l + \frac{1}{2} + N\left(l + \frac{1}{2}, m\right) \mp \varepsilon, \\ \text{les signes } \pm \text{ et } \mp \text{ étant opposés.} \end{cases}$$

Nommons *niveaux d'énergie quantiques* de l'équation de Dirac *les valeurs* de E *vérifiant cette condition* (32).

Nous avons ainsi prouvé le 1) du théorème suivant :

THÉORÈME 3. — 1) *Les valeurs de* E *telles que l'équation de Dirac possède une solution lagrangienne définie sur un tore* T^3 (L,M) *sont les niveaux d'énergie quantiques.*

2) *Ces niveaux sont très voisins des valeurs de* E *pour lesquelles l'équation de Dirac possède une solution qui soit un couple de fonctions, à valeurs dans* $\mathbf{C}^2$, *à dérivées premières de carrés sommables.*

Pour prouver 2), il suffit d'expliciter les niveaux d'énergie quantiques. Voici comment on peut le faire approximativement.

Dans (28), le coefficient de w est petit ; vu (24) et (6)

$$\beta = H_M = -\mu_t\,;$$

donc, vu (8)

$$\beta c = -2\pi N_M\,;$$

de même :

$$\int_t^{t+c} \frac{\alpha}{R^3}\,\frac{L}{1 + E + A_0}\,dt \simeq -2\pi\,(1 + N_L)\,;$$

d'où :

$$4\,\varepsilon^2 \simeq (1 + N_L)^2 + 2\,(1 + N_L)\,N_M \cos\theta + N_M^2,$$

$$\text{où } \cos\Theta = \frac{M}{L} = \frac{2m}{2\,l + 1}$$

La résolution approchée de $(31)_3$ en E, dont dépend N, introduit

— la fonction E (.,.) valant

$$E\,(L,n) = \left[1 + \frac{\alpha^2}{n - L + \sqrt{L^2 - \alpha^2}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

— sa dérivée E_L;

— *les triplets d'entiers*

$(31)_1$ $\qquad l,\ m + \frac{1}{2},\ n$

vérifiant

$(31)_2$ $\qquad 0 \leqq l < n,\ |m| \leqq l \pm \frac{1}{2};$

— *la fonction,* définie sur l'ensemble de ces triplets et ayant pour valeur :

$$(32) \qquad E\,(l + \tfrac{1}{2}, n) + \beta m \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{E_L + \frac{4m}{2\,l + 1}\,\beta E_L\,(l + \tfrac{1}{2}, n) + \beta^2},$$

les signes $\pm$ de $(31)_2$ et (32) étant les mêmes.

Les valeurs de cette fonction sont très voisines des niveaux d'énergie quantiques.

Or ces valeurs se trouvent être exactement les valeurs approchées des niveaux d'énergie que donnent les calculs classiques de la mécanique ondulatoire. C'est ce qu'énonce le 2) du théorème 3.

*
**

Le *séminaire* a consisté en les exposés suivants :

E. PARDOUX, *Equations aux dérivées partielles stochastiques ; formulation forte.*

M. VIOT, *Equations aux dérivées partielles stochastiques ; formulation faible* (2 exposés).

U. FRISCH, *Turbulence.*

G. PAPANICOLAOU, *Equations aux dérivées partielles stochastiques* (2 exposés).

G. PAPANICOLAOU, *Propagation des ondes en milieu aléatoire* (2 exposés).

C. BARDOS, *Résultats de régularité höldérienne, en dimensions 2 et 3, pour les équations d'Euler des fluides parfaits.*

Mlle H. AIRAULT, *Perturbations singulières et solutions stochastiques des d-Neumann-Spencer problèmes.*

P. GRISVARD, *Sommes d'opérateurs linéaires.*

PHAM THE LAI, *Valeurs propres des opérateurs dégénérés.*

A. CRUMEYROLLE, *Algèbres de Clifford symplectiques et indice de Maslov.*

PUBLICATIONS

— Edition ronéotypée du Séminaire.

— Rédaction du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

— Présentation de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

J. LERAY et C. PISOT, *Une fonction de la théorie des nombres* (*J. math. pures et appl.*, 53, 1974, p. 137-145).

J. LERAY, *Caractère non fredholmien du problème de Goursat* (*Ibidem*, p. 133-136).

J. LERAY, *Sul problema di Dirichlet quasi lineare del secondo ordine* (*Bolletino della Unione Matematica Italiana*, 9, 1974, p. 70-76 ; traduction d'une Note aux *C. R. Acad Sc., Paris*, de Mme Y. Choquet-Bruhat et J. Leray).

J. LERAY, *Le problème de Cauchy linéaire, analytique, à données singulières*, d'après Y. Hamada et C. Wagschal ; *l'hyperbolicité partielle* (en *russe* dans le t. 21, 1974, des *Uspeki mat. nauk,* consacré à la Mémoire de I. G. PETROWSKY).

Missions

Trois exposés à Varsovie et Cracovie sur la *Théorie des solutions asymptotiques.*

Un exposé à l'Université de Bordeaux et un exposé à la Société Mathématique de France (Section Paris - Ile de France) sur *Les solutions asymptotiques des équations de la mécanique.*

Un exposé au Symposium on trends of applications of pure mathematics to mechanics (Lecce) sur *Les solutions asymptotiques de l'équation de Dirac.*

Distinctions

Elu Membre associé de l'Accademia Nazionale dei XL.

Déclaré Docteur Honoris Causa de l'Université libre de Bruxelles.