

Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

On a poursuivi l'étude des *contrôles impulsionsnels*.

On avait montré dans le cours de l'année précédente comment ces problèmes se ramènent à des questions relatives à des ensembles *d'inégalités aux dérivées partielles*.

On avait introduit l'outil des *Inéquations Quasi Variationnelles (I.Q.V.)* selon Bensoussan et l'A.

On a d'abord apporté des compléments au cas stationnaire, exposant un résultat dû à Th. Laetsh donnant une condition suffisante *d'unicité*.

On a ensuite étudié les problèmes d'évolution.

On a commencé par démontrer un résultat dû à Mignot et Puel relatif à l'existence d'une *solution maximum* (plus grande que toutes les autres) sur l'inéquation variationnelle

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial u}{\partial t} + Au - f \leq 0, u - \psi \leq 0, \\ \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + Au - f \right) (u - \psi) = 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad u(x, T) = 0$$

où A est un opérateur elliptique du 2^e ordre ; si dans (1) (2), x est assujéti à demeurer dans un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^n , on ajoute à (1) (2) des conditions aux limites convenables.

On a montré que (1) (2) correspond à un problème de *temps d'arrêt optimal*, et cela « sans hypothèse » sur ψ ; c'est cela qui avait conduit à la

conjecture de l'existence d'une solution maximum pour (1) (2) sans hypothèse sur ψ (autre que l'hypothèse à peu près indispensable *qu'il existe* des fonctions v à intégrale de Dirichlet finie en x et de carré sommable en t qui soient $\leq \psi$), conjecture démontrée par Mignot et Puel.

On a ensuite utilisé ce résultat pour montrer l'existence d'une solution des I.Q.V. d'évolution.

On a ensuite étudié le problème des contrôles impulsionnels *lorsqu'il y a un retard* (connu) dans la « livraison » : une impulsion représentée par un vecteur ξ à l'instant θ ne change effectivement l'état du système (par le saut ξ) qu'à l'instant $\theta + \tau$, où $\tau > 0$ est le retard. On a montré comment les I.Q.V. s'adaptent à l'étude de cette situation :

a) dans le cas (markovien) où le contrôle est tel qu'on *ne peut pas* prendre de décision d'une nouvelle impulsion dans l'attente d'une livraison ;

b) dans le cas (non markovien), étudié par Bensoussan, Robin et l'A., où l'on peut prendre au plus N décisions de nouvelles impulsions dans l'attente d'une livraison.

On a montré comment l'interprétation de la solution de (1) (2) par les temps d'arrêt donne des démonstrations très intuitives de résultats dûs à Brézis et Friedman sur les supports des solutions des I.V.

On a également indiqué brièvement comment modifier les opérateurs intervenant dans les I.V. et les I.Q.V. lorsqu'on a un système stochastique avec *plusieurs types de contrôle* (« continu », temps d'arrêt, impulsionnel).

On a brièvement indiqué comment tous ces problèmes sont liés aux *problèmes à frontière libre* de la physique mathématique, point de vue qui sera approfondi dans le cours de l'an prochain.

PUBLICATIONS

J.-L. LIONS, Exposé au Congrès international des Mathématiciens (août 1974).

— Exposé au Congrès de Mécanique non linéaire, Austin (septembre 1974).

— Exposé au Congrès de Kyoto (janvier 1975).

— Exposé au Congrès de Maryland (mai 1975).

En collaboration avec A. BENSOUSSAN, Exposé au Congrès de Victoria, Canada (août 1974) : *Perturbations singulières dans les Inéquations variationnelles*.

— Exposé au Colloque de Phoenix, Arizona (novembre 1974) : *Jeux impulsionnels*.

— Note C.R.A.S. (21 avril 1975).

— Note C.R.A.S. (28 avril 1975).

— Article dans le *Journal of Applied Math. and Optimization* (1975).

Publications en liaison avec le cours

F. MIGNOT et J.-P. PUEL [1] (*C.R.A.S.*, Paris, novembre 1974).

J.-L. JOLY, U. MOSCO, TROIANIELLO [1] (*C.R.A.S.*, Paris, novembre 1974).

Edition

En collaboration avec R. GLOWINSKI, Lecture Notes (in *Computer Sciences*, vol. 10 et 11, Springer, 1974).

En collaboration avec A. BENSOUSSAN, Lecture Notes (in *Economics and Mathematical systems*, vol. 107, Springer, 1974).

MISSIONS

Japon (21-31 janvier 1975) : Conférence au Congrès international sur *Les problèmes mathématiques en Physique théorique*, Kyoto. Conférence au Département de Mathématiques de Kyoto, et l'Electrical Engineering de Kyoto. Conférence à l'Université de Tokyo et à la Société Mathématique du Japon.

Conférence à Zurich, février 1975.

Invitation de l'Accademia Nazionale dei Lincei auprès de l'Ecole Normale Supérieure de Pise, 8 conférences, une semaine en février 1975, une semaine en avril 1975.

Conférence à l'Université de Pavie, avril 1975.

Conférences à l'Université de Londres et à l'Imperial College en avril 1975.

Conférence au Congrès international sur les Méthodes numériques dans les Equations aux dérivées partielles. Université de Maryland, 19-24 mai 1975.

Série de quatre conférences à l'Ecole d'Eté sur les *Equations aux dérivées partielles*, Amsterdam, août 1975.

Conférence au Congrès international de Mécanique et Analyse fonctionnelle, Marseille, septembre 1975.

Mission en Chine (Pékin), septembre 1975.