Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Nous avons étudié dans le cours des deux années précédentes, les problèmes d'inégalités aux dérivées partielles auxquels conduisent la théorie de contrôle optimal par temps d'arrêt ou par contrôle impulsionnel.

De manière générale, on a une équation d'état qui est une équation différentielle ordinaire ou stochastique ; dans le cas stochastique

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} dy = g(y)ds + \sigma(y)dw(s), \ s > t \\ y(t) = x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

où w est un processus de Wiener standard dans $\mathbb{R}^n$, g est régulière de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ avec $\sigma\sigma^*$ définie positive ; « la variable de contrôle » est soit un temps d'arrêt pour (1), soit une famille de sauts ou « impulsions », dont les instants, la longueur et même le nombre sont à notre disposition (avec des contraintes éventuelles) ; à l'état et au contrôle on associe une fonction coût qui dépend donc de x,t et du contrôle ; la valeur minimum de cette fonction coût par rapport à tous les contrôles admissibles est donc une fonction u(x,t). On a démontré que u(x,t) est *caractérisée* par un ensemble d'Inéquations aux dérivées partielles, étudiées par les techniques des Inéquations Variationnelles (I.V.) ou des Inéquations Quasi Variationnelles (I.Q.V.). La connaissance de u permet *de construire un contrôle optimal.*

Les résultats précédents donnent donc une *représentation* de *la solution de certaines* I.V. *ou* I.Q.V., représentation qui est une généralisation des formules classiques du type Feynman-Kac relatives aux cas *sans contrôle.*

2. Ces formules de représentation ainsi obtenues donnent donc une formule explicite pour la solution, et l'on peut alors songer à l'application suivante : supposons que (1) soit remplacée par une famille d'équations dépendant d'un paramètre ε (scalaire ou vectoriel) ; donc

$$(2) \qquad dy^\varepsilon = g^\varepsilon(y)ds + \sigma^\varepsilon(y)dw(s), \ y^\varepsilon(t) = x.$$

Cela donne, toutes choses égales par ailleurs, des fonctions coût minimum $u^\varepsilon(x,t)$. On peut étudier u^ε en fonction de ε à partir de l'étude correspondante de (1).

3. Nous avons considéré pour commencer — pour des raisons expliquées ci-après — le cas de fonctions g^ε, σ^ε *très rapidement oscillantes.* On est ainsi conduit à des problèmes dont *le plus simple* est le suivant : soit Y un parallélotope de $\mathbb{R}^n$, $Y = \Pi\,]0,y_i^o[$, et des fonctions

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} a_{ij}(y),\ a_o(y) \text{ données dans } L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ Y \text{ périodiques (i.e. de période } y_i^o \text{ en } y_i), \\ a_{ij}(y)\ \xi_i\ \xi_j \geqq \alpha\ \xi_i\xi_i,\ \alpha > 0, \text{ p.p. dans } Y, \\ a_o(y) \geqq \alpha_o > 0 \text{ pp. dans } Y\,; \end{array}\right.$$

on leur associe l'opérateur A^ε donné par

$$(4)\qquad A^\varepsilon\varphi = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) + a_o\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi$$

et l'on désigne par u_ε *la* solution de l'I.V.

$$(5)\quad \left|\begin{array}{l} A^\varepsilon u_\varepsilon - f \leqq 0,\ u_\varepsilon \leqq 0, \\ (A^\varepsilon u_\varepsilon - f)u_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n, \end{array}\right.$$

$$(6)\quad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma = \text{frontière de } \Omega\,;$$

que peut-on dire de u_ε *lorsque* $\varepsilon \to 0$?

Nous avons d'abord, avec Bensoussan et Papanicolaou [1] étudié ce type de problème par usage de (2). Puis nous nous sommes aperçus que, par usage d'autres méthodes (dont nous allons donner un bref aperçu), on pouvait obtenir des résultats valables pour des opérateurs *d'ordre quelconque, linéaires ou non.*

Le type de résultat que l'on obtient est qu'il existe un *opérateur aux dérivées partielles* $\mathcal{A}$, *elliptique* (dans le cas particulier (3) (4), à coefficients constants), tels que $u_\varepsilon \to u$ *dans un espace de Sobolev faible* ($H_0^1(\Omega)$ faible) *lorsque* $\varepsilon \to 0$, *où* u *est la solution* du *problème* (analogue à (5) (6) avec $\mathcal{A}$ au lieu de A^ε) :

$$(7)\quad \left|\begin{array}{l} \mathcal{A}u - f \leqq 0,\ u \leqq 0, \\ (\mathcal{A}u - f)u = 0 \text{ dans } \Omega, \end{array}\right.$$

$$(8)\quad u = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est appelé *homogénéisé* de A^ε. *Disons tout de suite que* $\mathcal{A}$ *n'est pas construit en prenant simplement les moyennes de coefficients dans* (4) !

4. Bien entendu le choix fait au n° 3 est seulement l'un de ceux possibles dans un ensemble assez vaste. Nous avons commencé par ce cas parce que les opérateurs du *type* (4) apparaissent dans la modélisation des problèmes aux limites dans les *matériaux composites* (matériaux à structure inhomogène périodique avec une période très petite au regard des dimensions du domaine).

Les résultats du type de ceux du n° 3 sont donc utiles du point de vue des applications, numériques en particulier.

5. *Méthode des échelles multiples*

Considérons d'abord le simple problème de Dirichlet,

$$\left| \begin{array}{l} A^\varepsilon u_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \tag{9}$$

On introduit $y = x/\varepsilon$ et l'on considère dans les calculs intermédiaires x et y comme variables indépendantes, remplaçant y par x/ε dans le résultat final.

On cherche alors

$$u_\varepsilon = w_0(x,y) + \varepsilon w_1(x,y) + \varepsilon^2 w_2(x,y) + \ldots \tag{10}$$

où les $w_i(x,y)$ doivent être Y-périodiques en y.

L'opérateur A^ε s'écrit

$$A^\varepsilon = \varepsilon^{-2}A_1 + \varepsilon^{-1}A_2 + \varepsilon^0 A_3, \tag{11}$$

$$A_1 = -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

$$A_2 = -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - a_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_i},$$

$$A_3 = -a_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a_0(y).$$

Alors un calcul d'identification conduit à

$$w_0(x,y) = u(x), \tag{12}$$

$$w_1(x,y) = -\chi^j(y)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \tilde{w}_1(x), \tag{13}$$

où χ^j est la solution Y-périodique, définie à une constante additive près, de

$$A_1(\chi^j - y_j) = 0. \tag{14}$$

Le terme en ε^o donne

(15) $$A_1 w_2 + A_2 w_1 + A_3 w_0 = f$$

et le calcul de w_2 n'est possible que si

$$\int_Y (A_2 w_1 + A_3 w_0) dy = \int_Y (f(x)dy = f(x)|Y|, |Y| = \text{volume de } Y,$$

et remplaçant w_0 et w_1 par (12) (13) on trouve

(16) $$\mathscr{A} u = f,$$

(17) $$\mathscr{A} u = - q_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \overline{a_o}\, u,$$

$$q_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (a_{ij}(y) - a_{ik}(y) \frac{\partial \chi^i}{\partial y_k}(y)) dy, \quad \overline{a_o} = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_o(y) dy.$$

L'opérateur $\mathscr{A}$ défini par (17) est l'opérateur homogénéisé évoqué au nº 3.

La *jusitfication* de ce fait suppose des hypothèses de régularité assez fortes sur les coefficients.

6. *Extensions et variantes*

D'autre part, comme a remarqué L. Tartar [1], une méthode énergétique permet de justifier le calcul du nº 5 sous les hypothèses minima (3).

On a ensuite (Bensoussan-Lions-Papanicolaou [2] [3] [4]) étendu les résultats du type précédent :

— aux opérateurs d'évolution,

— aux opérateurs à coefficients

$$a_{ij} \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}, \ldots, \frac{x}{\varepsilon^N} \right),$$

— aux opérateurs elliptiques d'ordre quelconque et aux systèmes,

— à des opérateurs non linéaires, et à des I.V. stationnaires et d'évolution.

Les méthodes que l'on vient d'évoquer permettent de reprendre, en la généralisant, la théorie des moyennes (« averaging ») de Bogoliubov.

Bibliographie sommaire

A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS et G. PAPANICOLAOU :

[1] C.R.A.S., Paris, t. 281, 1975, p. 89-94.

[2] id., p. 317-322.

[3] id., décembre 1975.

[4] id., 1976.

[5] Livre en préparation, à paraître à North Holland.

L. TARTAR [1] C.R.A.S., 1976.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Conférences à Pékin, Shanghai, Canton, septembre 1975.

Conférence au Colloque de Rome du C.N.R., décembre 1975.

Chaire Aisenstadt au Centre de Recherche mathématique de Montréal, série de conférences en janvier et en mai 1976. Conférences à Québec et à Sherbrocke.

Série de conférences sur le Contrôle optimal des Systèmes distribués à l'Université de Maryland en mai 1976 et conférence à New York University.

Conférences à Madrid (Docteur Honoris Causa, Université Complutenca de Madrid), janvier 1976.

Conférences à Rabat, fin janvier 1976.

Conférence à la Société royale des Sciences de Liège, 19 février 1976.

Conférences en Israël (Jérusalem, Weizmann Institute, etc.), fin mars 1976.

Conférences à l'Université de Wales (Réunion de la Société mathématique anglaise) et à l'Université de Warwick, avril 1976.

Conférences à Novosibirsk, Tachkent et Tbilissi (U.R.S.S.), juin 1976.

Conférence sur les méthodes numériques en Mécanique, Université de Twente, fin juin 1976.

Conférences à Durham, juillet 1976 et à Dublin, août 1976.

Cours à Liège, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, septembre 1976.

Conférences à Tokyo, Kyoto en septembre 1976 dans le cadre d'un Colloque franco-japonais.