

Théorie des équations différentielles et fonctionnelles

M. Jean LERAY, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours précédent avait défini un ensemble de notions nouvelles, inspiré par des travaux de V.P. Maslov, V.I. Arnold, V.C. Bouslaev, I.E. Segal ; il l'avait nommé « analyse lagrangienne » ; il avait annoncé que le cours de cette année-ci l'appliquerait ; ce ne peut l'être à des grandeurs observables, puisqu'il s'agit de notions formelles : mais ce peut l'être à des grandeurs non observables.

Il suffit de chercher quand l'équation de Schrödinger ou de Klein-Gordon possède, en première approximation, « une solution lagrangienne définie sur une variété lagrangienne compacte de l'espace de phase » pour retrouver très simplement les niveaux d'énergie définis par la recherche, bien classique en mécanique ondulatoire, des solutions de ces équations ayant un carré sommable, ainsi que leurs gradients ; ce résultat tient compte du champ magnétique, c'est-à-dire de l'effet Zeeman. Il reste vrai quand on recherche non plus la première approximation d'une solution lagrangienne, mais une solution lagrangienne rigoureuse ; un calcul bien plus compliqué est alors nécessaire : il a la complexité même de la résolution classique de ces équations ; il lui est analogue, mais en diffère essentiellement ; la parfaite coïncidence des niveaux d'énergie calculés par ces deux voies absolument distinctes est constatée mais n'est pas expliquée.

Résoudre en première approximation l'équation de Dirac est possible aussi bien en « analyse lagrangienne » qu'en analyse classique. Les deux modes de calculs sont cette fois singulièrement différents ; ils redonnent cependant les mêmes niveaux d'énergie, compte tenu du champ magnétique, à savoir non seulement de l'effet Zeeman, mais même de l'effet Paschen-Back.

Le Séminaire du Collège de France et l'I.R.M.A. de Strasbourg (R.C.P. 25), Rencontres de mathématiciens et de physiciens, ont publié chacun l'exposé de ces deux cours.

Le problème crucial est d'appliquer l'analyse lagrangienne au calcul des divers niveaux d'énergie des atomes et ions ayant plus d'un électron.

Le cas de deux électrons, c'est-à-dire de He, Li^+ , Be^{++} , fut l'objet d'une ultime leçon ; postérieure de plus de cinq mois aux précédentes, elle n'aboutit cependant pas à des conclusions décisives. Donnons-en le détail, puisqu'elle est inédite. Abstraction faite des effets magnétiques, l'analyse lagrangienne conduit à une description extrêmement simple de l'atome et des ions ayant un électron : celui-ci a une probabilité de présence connue η sur une variété lagrangienne V de l'espace de phase ; V est un tore, défini par les trois conditions que l'énergie de l'électron, la longueur du moment de sa quantité de mouvement et sa composante suivant le champ magnétique sont constantes ; « les conditions quantiques de Maslov » donnent ces trois constantes en fonction de trois « nombres quantiques » qui sont entiers, ou entiers à $1/2$ près ; elles expriment l'existence sur V d'une fonction lagrangienne, à amplitude lagrangienne constante, ayant une seule détermination dans le cas du spin 0 (Schrödinger, Klein-Gordon), mais deux déterminations dans le cas du spin $1/2$ (Dirac). La probabilité η de présence de l'électron sur V se définit aisément à l'aide de ces trois équations de V ; aucune grandeur non observable n'est donc finalement en jeu. L'orbitale, c'est-à-dire la projection de V sur l'espace physique est la partie de cet espace comprise entre deux sphères et extérieure à un cône de révolution centrés sur le noyau, l'axe du cône étant le champ magnétique.

Pour traiter de même l'atome et les ions à deux électrons, il suffit d'assimiler, sur l'orbitale de chaque électron, le potentiel électrique créé par la probabilité de présence de l'autre électron à un potentiel fonction seulement de la distance au noyau : c'est opérer comme Hartree l'a fait en mécanique ondulatoire classique. On obtient des résultats approchant les résultats expérimentaux moins bien que ceux de Hartree, alors que certains des résultats de la mécanique ondulatoire s'écartent excessivement des résultats expérimentaux. Il convient donc d'améliorer cette première tentative d'application de « la quantification de Maslov » aux atomes et ions à plusieurs électrons. Devrait-on tenir compte de l'énergie magnétique, que nous avons négligée, à l'instar de tous ceux qui, comme Hartree, emploient l'équation de Schrödinger ?

Il sera peut-être difficile de répondre à cette question ; il se trouve qu'elle ne s'apparente plus à l'enseignement que clôt cette ultime leçon.

J. L.

SEMINAIRE

Le séminaire a consisté en les exposés suivants :

— H. BREZIS, Quelques remarques sur des équations non linéaires du type Thomas-Fermi.

— P. MALLIAVIN, Intégrales de volume du type de Lusin-Calderon en analyse complexe.

— M^{me} Y. CHOQUET-BRUHAT, Sous-variétés maximales et sous-variétés de courbure extrinsèque moyenne constante dans une variété de Lorentz.

— P. DAZORD, Formulation géométrique globale de l'indice de Maslov-Arnold.

— P. MALLIAVIN, Approximation par une diffusion de la projection d'une diffusion.

— R. TEMAN, Equations de Navier-Stokes stationnaires et phénomènes successifs de bifurcation.

— S. MIYATAKE, Problèmes hyperboliques mixtes du second ordre.

— P. KREE, Calcul symbolique en théorie des champs (2 exposés).

— PHAM THE LAI, Valeurs propres d'une classe d'opérateurs de type Schrödinger dans R^n .

— B. GAVEAU, Intégrales harmoniques non abéliennes.

— Y. HAMADA, Singularité de la solution du problème de Cauchy holomorphe pour un opérateur à caractéristiques de multiplicité variable, d'après Y. Hamada et G. Nakamura.

— D. GOURDIN, Système hyperbolique à caractéristique de multiplicité variable.

— A. FOUGERES, Rôle des jauges conjuguées de J.-J. Moreau : coercivité, convexité, relaxation. Géométrie sous-différentielle (convexe). Structure topologique intrinsèque d'une fonction convexe. Application aux énergies intégrales et intégral-différentielles ; dualité de Köthe-Orlicz.

— A. FOUGERES, Comparaison des modèles mathématiques des lois de comportement associées à des énergies complémentaires de type intégral (Nayrolles) et de type intégral-différentiel (Duvaut-Lions).

L'équivalence entre la minimisation convexe intégrale sous contrainte différentielle et l'inéquation variationnelle sous-différentielle associée est un problème d'additivité de sous-différentiel.

— V. IORDACHESCU, Sur la stabilité des processus d'interaction non linéaire à trois ondes dans le système à plusieurs corps. Application au cas des bosons et des fermions.

PUBLICATIONS

J. LERAY. — *Analyse lagrangienne et mécanique quantique* (298 p.). (Séminaire du Collège de France et I.R.M.A. de Strasbourg, R.C.P. 25, Rencontres de mathématiciens et physiciens.)

— Présentation de notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

MISSIONS

Exposés au Séminaire de philosophie et de mathématiques de l'E.N.S., à l'Université de Provence (Marseille, mai 1978), à l'Université d'Athènes (septembre 1978) et au Colloque de Novosibirsk (septembre 1978) sur l'analyse lagrangienne et la mécanique quantique.

DISTINCTION

Elu Membre étranger de l'Académie polonaise des Sciences.