Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Iistitut
(Académie des Sciences), professeur

1. On a étudié le comportement asymptomatique de la solution de problèmes aux limites dans des milieux perforés de manière périodique, lorsque la « dimension » ε de la cavité est « petite » par rapport au domaine où l'on considère le problème.

On a introduit un « ansatz » ou représentation asymptotique de la solution cherchée qui est une adaptation convenable des représentations introduites et étudiées dans les cours des deux années précédentes.

2. Si l'on désigne par Y le cube unité ouvert et par $\mathcal{O}$ un ouvert contenu dans Y, avec $\overline{\mathcal{O}} \subset Y$, les cavités consistent en l'intersection de tous les translatés de $\varepsilon \overline{\mathcal{O}}$ (de longueurs multiples entiers de ε) avec Ω, Ω_ε étant ce qui reste après avoir enlevé ces ensembles ; la frontière $\partial \Omega_\varepsilon$ de Ω_ε comprend deux parties : une partie Γ_ε contenue dans $\Gamma = \partial \Omega$ et une partie constitué de l'union des bords des cavités intérieures à Ω, soit S_ε.

Les problèmes modèles, servant de point de départ, sont les suivants : on cherche u_ε dans Ω_ε, solution de

$$(1) \qquad -\Delta u_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon$$

où f est une fonction donnée dans Ω, avec les conditions aux limites

$$(2) \qquad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon$$

et

$$(3) \qquad u_\varepsilon = 0 \text{ sur } S_\varepsilon$$

ou

$$(4) \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } S_\varepsilon \quad (\nu = \text{normale à } S_\varepsilon)$$

L'ansatz évoqué au 1 est le suivant : on cherche u_ε sous la forme

$$u_\varepsilon = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + \ldots, \quad y = x/\varepsilon \tag{5}$$

où

$$\left| \begin{array}{l} u_j(x,y) \text{ est définie pour } x \in \Omega,\ y \in Y \setminus \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{Y} \\ u_j(x,y) \text{ est périodique en } y \end{array} \right. \tag{6}$$

et où, *dans le cas* (3)

$$u_j(x,y) = 0 \text{ si } x \in \Omega,\ y \in S \tag{7}$$

et *dans le cas* (4)

$$\left| \begin{array}{l} \nu_i(y) \dfrac{\partial u_0}{\partial y_i}(x,y) = 0 \text{ si } x \in \Omega,\ y \in S \\ \nu_i(y) \dfrac{\partial u_j}{\partial y_i}(x,y) + \nu_i(y) \dfrac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i}(x,y) = 0 \text{ si } x \in \Omega,\ y \in S \end{array} \right. \tag{8}$$

(où $\{\nu_i(y)\}$ est le vecteur normal à S dirigé vers l'intérieur de $\mathcal{O}$ pour fixer les idées).

Un calcul par identification permet d'obtenir *tous* les termes du développement formel, si f est assez régulière.

Dans les cas (3), si f est régulière et est *nulle* sur Γ ainsi que chacune de ses dérivées d'ordre suffisant, on trouve que $u_0 = u_1 = 0$ et que

$$\| u_\varepsilon - (\varepsilon^2 u_2 + \ldots + \varepsilon^m u_m) \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leqq C_m \varepsilon^m \tag{9}$$

[on ne peut enlever le terme $\varepsilon^m u_m$ dans (9)].

Dans le cas (4), u_0 n'est pas nul mais est solution d'un problème elliptique dit « homogénéisé ». Ce résultat avait été obtenu par une méthode d'énergie par D. Cioranescu dans sa thèse, Paris, 1977.

L'analogue de (9) n'est pas vrai ; on ne peut espérer obtenir un résultat du type (9) (avec les termes d'ordre 0 et d'ordre 1) qu'en rajoutant des couches limites, dont la structure n'est pas connue.

3. Ces techniques ont été appliquées à divers problèmes elliptiques, paraboliques, hyperboliques, et en particulier aux écoulements de Navier Stokes ;

on retrouve ainsi, entre autres, la loi de Darcy dans la formulation donnée par Ene et Sanchez Palencia et par Th. Levy et Sanchez Palencia.

Travaux liés au cours

S. Kesavan et S. Vanrninnathan (chercheurs du Tata Institute, boursiers à Paris) ont étudié divers problèmes *spectraux* dans des milieux perforés ou pour des opérateurs elliptiques à coefficients très oscillants (milieux composites).

B. Desgraupes a étudié pour des milieux perforés des problèmes aux limites pour opérateurs elliptiques qui peuvent dégénérer et M^{lle} Saint Jean Paulin des cas où les conditions aux limites sur les bords des cavités ont une structure différente.

F. Mignot et D. Puel ont étudié des problèmes d'homogénéisation et de bifurcation.

O. Pironneau, en collaboration avec Perrier, a appliqué les idées de l'homogénéisation à des problèmes de turbulence.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été donnés par J.-P. Aubin, I. Masuda, P. Grisvard, P. Lax, H. Antosiewicz, B. Nicolaenko, H. Brezis, M. Schatzman, C. Bardos, M. Viot, L. Tartar, J. Nohel, D. Joseph, F. Browder. H. Bereztycki.

Distinction

M. J.-L. Lions a été élu Membre Etranger de l'Istituto Lombardo (Academia di Scienze e lettere de Milano).

Missions et conférences

Des conférences ont été données à

— Wurzburg (Congrès I.F.I.P.), septembre 1977.

— Katovice (Pologne), Congrès de Mathématique et Mécanique, septembre 1977.

— Lisbonne, 30 janvier - 3 février 1978.

— Khartoum (Colloque Mathématique et Développement), mars 1978.

— Le Caire.

— Ispahan (Iran), Congrès Annuel des Mathématiciens Iraniens, mars 1978.

— Montréal, Minneapolis, Los Angeles (U.S.C. et U.C.L.A.), 24 avril - 6 mai 1978.

— Rome (Symposium sur l'analyse non linéaire), mai 1978.

— Erice (sur l'œuvre de G. Stampacchia), 19 juin 1978.

— Lima (Pérou), cours à la 4e Ecole Latino-Américaine de Mathématiques, 10-25 juillet 1978 et conférences à Rio de Janeiro.

— Participation au Congrès International des Mathématiciens d'Helsinki, en tant que Secrétaire Général de l'Union Mathématique Internationale.

Publications

Livre de A. Bensoussan, G. Papanicolaou et J.-L. Lions, « *Asymptotic Methods in Periodic Structures* », North Holland, juin 1978.

Articles avec A. Bensoussan aux Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1977, dédiés à J. Leray et à H. Lewy.

Cours de Rio de Janeiro (1977), chez Springer.

Livre de A. Bensoussan et J.-L. Lions, « *Contrôle optimal et temps d'arrêt* », Dunod, 1978.