**Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle**

M. Jacques-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Considérons un système dont l'état est donné par la solution d'une équation aux dérivées partielles (système distribué) ; formellement soit

$$Ay = f + Bv \tag{1}$$

cette équation, où A est un opérateur différentiel, stationnaire ou d'évolution, linéaire ou non ; dans (1), v représente le *contrôle* ; c'est une fonction, soumise éventuellement à des contraintes (traduites par $v \in \mathcal{U}_{ad}$, $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble des contrôles admissibles) ; cette fonction peut apparaître dans le domaine où l'on résout (1), ou bien sur la frontière ; l'écriture (1) est formelle : on doit y rajouter les conditions aux limites, et, dans les cas d'évolution, les conditions initiales.

Si y(v) désigne la solution de (1) (supposée exister et être définie de façon unique), on associe à chaque $v \in \mathcal{U}_{ad}$ un *coût* (ou *critère*)

$$J(v) = \Phi(y(v)) + \Psi(v) \tag{2}$$

où $\Phi$ et $\Psi$ sont deux fonctionnelles définies sur les espaces (ou les ensembles) appropriés.

Le *problème de contrôle optimal* associé est de trouver

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \tag{3}$$

et de trouver, s'il(s) existe(nt) le (ou les) élément(s) réalisant le minimum (*contrôles optimaux*).

Les problèmes abordés dans le cours ont été :

i) l'étude de la théorie des perturbations dans le cadre ci-dessus ;

ii) l'étude préliminaire (qui sera poursuivie dans le cours de l'année prochaine) des nouveaux espaces fonctionnels qu'il convient d'introduire dans certains cas.

2. *Perturbations*

Comme il est classique dans de nombreuses modélisations, l'équation (1) contient souvent un paramètre $\varepsilon$ qui est petit devant les autres constantes intervenant dans (1).

On écrit alors :

$$A_\varepsilon y_\varepsilon(v) = f + Bv \tag{4}$$

et (2) et (3) deviennent

$$J_\varepsilon(v) = \Phi(y_\varepsilon(v)) + \Psi(v) ; \tag{5}$$

$$J_\varepsilon = \inf J_\varepsilon(v). \tag{6}$$

Le problème est alors de trouver le comportement de $J_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Si le minimum est atteint dans (6) en $u_\varepsilon$, on peut également chercher le comportement asymptotique de $u_\varepsilon$ en fonction de $\varepsilon$.

Les cas étudiés jusqu'ici dans la littérature sont relatifs au cas où, dans (4), *pour* v *fixé,* $y_\varepsilon(v)$ converge (dans une topologie convenable) vers, disons $y_0(v)$, solution de

$$A_0 y_0(v) = f + Bv, \tag{7}$$

*et* où, dans ces conditions, on a

$$J_\varepsilon(v) \to J_0(v) = \Phi(y_0(v)) + \Psi(v). \tag{8}$$

La première observation a été de montrer que l'on peut développer la théorie (au moins partiellement) *même lorsque* $y_\varepsilon(v)$ *et* $J_\varepsilon(v)$ *ne convergent pas, pour* v *fixé.*

*Exemple*

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\Gamma$. Soit $y_\varepsilon(v) = y_\varepsilon(x ; v)$ donné par

$$-\varepsilon \Delta y_\varepsilon(v) + y_\varepsilon(v) = v \text{ dans } \Omega \tag{9}$$

(10) $$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}(v) = 0 \text{ sur } \Gamma$$

(problème de Neumann) et soit $J_\varepsilon(v)$ donné par

(11) $$J_\varepsilon(v) = \int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Omega v^2 dx$$

où $N > 0$, et où $z_d$ est donné dans $L^2(\Gamma)$.

Pour v fixé dans $L^2(\Omega)$, $y_\varepsilon(v) \to v$ dans $L^2(\Omega)$ et dans ces conditions, $\int_\Gamma |y_\varepsilon(v) - z_d|^2 \, d\Gamma$ *ne converge pas en général.*

Néanmoins *s'il existe* $v_0$ *dans* $\mathcal{U}_{ad}$ *tel que, par exemple*

(12) $$v_0 \in H^1(\Omega) \text{ (espace de Sobolev)}$$

alors, pour tel $v_0$, $y_\varepsilon(v_0) \to v_0$ dans $H^1(\Omega)$ est

(13) $$J_\varepsilon(v_0) \to \int_\Gamma |v_0 - z_d|^2 \, d\Gamma + N \int_\Omega v_0^2 \, dx.$$

Donc

(14) $$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J_\varepsilon(v) \leqq J_\varepsilon(v_0) \leqq \text{constante (d'après (13))}$$

et il est alors raisonnable d'étudier la limite de $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$.

Par exemple dans le cas $\mathcal{U}_{ad} = L^2(\Omega)$ (où (12) est évidemment satisfait) on vérifie que $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim C\varepsilon^{1/2}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, la constante pouvant être calculée.

On a étudié des situations plus générales, pour des problèmes « raides » (systèmes où les coefficients ont des ordres de grandeurs différents selon les régions) et pour des systèmes conduisant à des perturbations singulières.

On a mis en évidence un « principe général » qui semble éclairer la manière dont les calculs peuvent être conduits sur les exemples. Cela est trop technique pour être indiqué ici. L'idée est de prendre dans (4) des $v = v_\varepsilon$ *dépendant de* $\varepsilon$ et, plus précisément, de prendre

(15) $$v_\varepsilon = v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \ldots$$

(on peut également prendre dans (15) des puissances fractionnaires de $\varepsilon$, des puissances négatives, et ajouter, s'il y a lieu, des termes de couche limite) ;

puis on optimise de proche en proche en $v^0, v^1$. Ce procédé a été justifié sur un certain nombre d'exemples.

### 3. *Nouveaux espaces fonctionnels*

En général la fonction coût (2) se présente de la façon suivante : soit C un opérateur défini sur « l'espace des états » et à valeurs dans un espace de Banach E ; alors

$$J(v) = \Phi_0(Cy(v)) + \Psi(v) \tag{16}$$

où $\Phi_0$ est une fonction définie sur E à valeurs réelles.

Si $\Psi$ est une fonction définie sur un Banach F, alors l'espace (ou l'ensemble) $\mathcal{U}$ des contrôles est *défini* par l'ensemble des $v \in F$ tels que $Cy(v)$ « ait un sens » et $Cy(v) \in E$.

L'étude de $\mathcal{U}$ et son utilisation pour la théorie du contrôle a été commencée et sera poursuivie dans le cours de l'an prochain [les cas étudiés jusqu'ici dans la littérature concernent la situation où C est continu de l'espace des contrôles dans E, de sorte que $\mathcal{U} = F$].

J.-L. L.

## *Travaux directement liés aux cours*

Vanninathan (Tata Institute). Thèse, Paris, juin 1979.

— Travaux sur le comportement asymptotique du spectre dans des milieux perforés.

D. Henry

— Applications au contrôle de processus chimiques.

## Missions et conférences

2-7 octobre 1978. Conférence à la réunion de la Société Mathématique Allemande, Aix-la-Chapelle.

24 janvier - 7 février 1979. Leçons à la Summer School de la Société Mathématique d'Australie, Macquirie et exposé à l'Applied Math. Conference Leura (Australie).

19-20 mars 1979. Exposés au Von Karman Institute, Bruxelles.

27-28 mars 1979. Conférences à Pavie et Milan.

26-28 avril 1979. Conférence pour le 10e anniversaire du Centre de Rech. Math. Montreal ; conférence au Séminaire M.I.T., Boston.

Mai 1979. Conférences à Cologne, Bonn, et Aarhus (Danemark).

Fin mai 1979. Conférences à Singapour (French-South East Asia meeting) et conférences en Indonésie.

18-20 juin 1979. Conférence à Denver, 1979, J.A.C.C. (Joint Automatic Control Conference).

4-8 septembre 1979. Conférence au Congrès I.F.I.P., contrôle des systèmes, Varsovie.