Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis Lions, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

1. Considérons un système dont l'état est fourni, pour une fonction contrôle $v = v(t)$ donnée, par la solution $y = y(x, t ; v) = y(v)$ de l'équation parabolique

(1) $$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v(t)\, \delta(x - b), \quad x \in \Omega, \quad t \in (O, T)$$

(2) $$y = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Gamma = \text{frontière de } \Omega, \quad t \in (O, T)$$

(3) $$y = 0 \quad \text{si} \quad t = 0 ;$$

dans (1) b est donné dans Ω et $\delta(x - b)$ désigne la masse de Dirac au point b. Il s'agit donc d'un problème de contrôle *ponctuel* : on peut « agir sur le système » en un seul point b (naturellement tout s'étend sans aucune difficulté au cas où l'on peut agir sur le système en un nombre fini de points).

On veut, par exemple, choisir v, *dans une classe fonctionnelle convenable,* de façon à minimiser la *fonction coût*

(4) $$J(v) = \int_\Omega [y(x, T ; v) - z_d(x)]^2\, dx + N \int_O^T v(t)^2\, dt,$$

où $T > 0$ est donné (l'horizon du problème), où z_d est un état « désiré », fonction donnée dans $L^2(\Omega)$, et où N est un facteur > 0, donné, prenant en compte le coût du contrôle v (si $N \to 0$, on dit que l'on a affaire à un contrôle « bon marché » - « cheap control »).

Naturellement il faut que (4) *ait un sens* ; le deuxième facteur de (4) impose de prendre

$$v \in L^2(O, T) \tag{5}$$

mais si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec $n > 1$, la condition (5) *n'entraîne pas* que $y(.,T;v) \in L^2(\Omega)$; on peut vérifier que, la solution de (1), (2), (3) étant définie de façon faible, alors $y(.,T;v)$ a un sens si $n \leqq 3$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (espace de Sobolev d'ordre -1, donc espace de distributions sur Ω) (tout cela s'étend au cas n quelconque, en introduisant des espaces « plus grands »). On est alors conduit à *définir l'espace* $\mathcal{U}$ par

$$\mathcal{U} = \{v \mid v \in L^2(O,T),\ y(.T;v) \in L^2(\Omega)\}. \tag{6}$$

C'est un espace de *Hilbert* pour la norme

$$\left(\|v\|^2_{L^2(O,T)} + \|y(.,T;v)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} = \|v\|_{\mathcal{U}}. \tag{7}$$

On peut montrer que cet espace est indépendant de b, indépendant de Ω et également indépendant des conditions aux limites (par exemple on peut dans (2) remplacer la condition de Dirichlet par celle de Neumann) ; c'est l'espace des $v \in L^2(O,T)$ telles que, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$

$$\int_O^T \int_O^T \left(2T - (t+s)\right)^{-n/2} v(t)v(s)\,dt\,ds < \infty. \tag{8}$$

On peut également remplacer dans (1) l'opérateur $-\Delta$ par un opérateur elliptique du 2^e ordre à coefficients $a_{ij}(x,t)$ tels que

$$a_{ij}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in L^\infty(\Omega \times]O,T[).$$

On peut encore définir $\mathcal{U}$ par (6) et on retrouve *le même espace* $\mathcal{U}$ (résultat dû à Li Ta Tsien, cf. Bibliographie).

On peut alors considérer le problème

$$\text{inf. } J(v), \tag{9}$$

$$v \in \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } \mathcal{U}.$$

Ce problème admet une solution unique u, qui peut être *caractérisée* par un *système d'optimalité*, généralisant les systèmes d'optimalité usuels (*) et

(*) J.-L. Lions, *Sur le contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,* Dunod, Gauthier-Villars, 1968.

faisant intervenir l'espace $\mathcal{U}'$ dual de $\mathcal{U}$ (lorsque $L^2(O, T)$ est identifié à son dual).

2. De très nombreux problèmes du type de ceux présentés ci-dessus se rencontrent dans un certain nombre d'applications, soit que le *contrôle,* soit que *l'observation,* soient *ponctuels.*

Par exemple la *théorie du filtrage* conduit à un problème du type suivant (*) : pour $v \in L^2(\Omega)$ donnée, on désigne par $y = y(x, t ; v)$ la solution de

$$(10) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = 0 \text{ dans } \Omega \times]O, T[$$

$$(11) \qquad y = 0 \text{ sur } \Gamma \times]O, T[,$$

$$(12) \qquad y(x, 0) = v(x) \text{ sur } \Omega.$$

Alors, pour b donné dans Ω, $y(b, t ; v)$ a un sens comme fonction de t mais n'est pas dans $L^2(O, T)$ en général. Si donc l'on considère la *fonction coût :*

$$(13) \qquad J(v) = \int_O^T [y(b, t ; v) - z_d(t)]^2 dt + N \int_\Omega v^2 dx,$$

z_d donnée dans $L^2(O, T)$, N donné > 0, on doit alors introduire l'espace

$$(14) \qquad \mathcal{H} = \{v \mid v \in L^2(\Omega),\ y(b, . ; v) \in L^2(O, T)\} ;$$

$\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert pour la norme (du graphe)

$$[\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_O^T y(b, t ; v)^2 \, dt]^{1/2}.$$

On peut vérifier que cet espace $\mathcal{H}$ ne dépend pas des conditions aux limites et « ne dépend pas de Δ » : on peut, sans changer $\mathcal{H}$, remplacer Δ par un opérateur elliptique à coefficients variables (holdériens). L'espace $\mathcal{H}$ coïncide avec l'espace des $v \in L^2(\Omega)$ tels que

$$(15) \qquad \int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{v(x)\, v(\xi)}{(|x - b|^2 + |\xi - b|^2)^{n-1}} \, dx \, d\xi < \infty, \quad \Omega \subset \mathbb{R}_n.$$

On peut encore obtenir le système d'optimalité, utilisant l'espace $\mathcal{H}'$, dual de $\mathcal{H}$ (lorsque $L^2(\Omega)$ est identifié à son dual).

(*) Cf. A. Bensoussan et J.-L. Lions, article à paraître.

3. Des problèmes analogues se posent avec les systèmes ***hyperboliques ;*** les résultats généraux s'appliquent, les espaces analogues à $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}$ ci-dessus, étant introduits « abstraitement » ; la caractérisation explicite des espaces $\mathcal{U}$, $\mathcal{H}$, etc., semble être en général un problème ouvert ; plusieurs conjectures à cet effet ont été indiquées dans le cours.

4. Quelques extensions ont été données dans le cas d'équations d'états non linéaires. Mais il ne s'est agi là que de résultats très partiels.

5. Quelques problèmes asymptotiques ont également été étudiés dans le cours, dans le cadre général de la question fondamentale de la « *réduction de la complexité* ». Des cours ultérieurs reviendront sur ce thème.

J.-L. L.

Publications liées au cours

J.-L. Lions :

1) Note C.R.A.S., Paris, septembre 1979.

2) Cours à l'Université Fédérale de Rio de Janeiro. Lecture Notes : *Function spaces and optimal control of distributed systems,* Rio de Janeiro, 1980.

Li Ta Tsien :

1) Note C.R.A.S., Paris, décembre 1979.

2) Notes C.R.A.S., Paris, mai 1980.

S.C. Shi :

1) Note C.R.A.S., Paris, mai 1980.

S.C. Shi et J. Simon :

1) Note C.R.A.S., Paris, mai 1980.

[Ces notes étudient les espaces analogues à ceux du N° 1 ci-dessus lorsque b = b(t) dépend de t et, en particulier, peut tendre vers le bord de Ω lorsque $t \to T$].

Autres publications

A. Bensoussan et J.-L. Lions, à paraître au *J.A.M.O.*

A. Bensoussan, J.-L. Lions et L. Chow, à paraître.

Missions et conférences

Septembre 1979. Colloque I.F.I.P. Varsovie, Conférence : Foundations of optimal control of distributed systems.

Octobre 1979. I.I.M.A.S., Mexico.

Mars 1980. Conférence à l'Université de Pavie. Conférences à l'Université de Naples (Colloque S.A.F.A. IV) : Quelques problèmes liés aux équations de Navier Stokes.

Avril 1980. Conférences à l'Université de Dakar.

Mai 1980. Conférencier du Groupement des Universités d'Edinburgh, Dundee, Glasgow, Manchester.

Mai 1980. Conférences à Tunis.

Mai-juin 1980. Conférences aux Universités de New York, de Chicago et de Madison (Colloque).

Août 1980. Conférencier de l'Union Mathématique Brésilienne à Brasilia, Sao Paulo et conférences à Rio de Janeiro.