Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Dans la théorie du contrôle des systèmes distribués (i.e. des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles) on rencontre *trois situations.*

Dans *la première situation* (la seule étudiée jusqu'ici systématiquement dans la littérature) on a une *équation d'état,* écrite formellement

(1) $$\mathcal{A} y = \mathcal{B} v$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel, linéaire ou non, stationnaire ou d'évolution et où v désigne *le contrôle ;* la variable de contrôle v varie dans un espace de Banach $\mathcal{U}$ (voir plus loin) et l'opérateur $\mathcal{B}$ applique $\mathcal{U}$ dans l'ensemble des deuxièmes membres ou conditions aux limites (cela doit, bien sûr, être précisé dans chaque situation particulière) ; on ajoute également à (1) les conditions initiales si $\mathcal{A}$ est d'évolution. Dans la « première situation » on suppose

(H1) | lorsque $v \in \mathcal{U}$, l'équation (1) admet une solution unique (faible ou forte) dans un espace Y.

On note alors y (v) *la* solution de (1) ; c'est *l'état* du système.

On donne ensuite *une fonction coût* de la forme

(2) $$J(v) = \Phi(y(v)) + \Psi(\|v\|_{\mathcal{U}})$$

où Φ est une fonctionnelle de $Y \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \rightarrow \psi(\lambda)$ est continue dans $\lambda \geqq 0$, $\psi(\lambda) \rightarrow +\infty$ si $\lambda \rightarrow +\infty$. Il faut bien noter que les données sont (1) et (2) ; la forme de (2) impose le choix de $\mathcal{U}$ et il faut alors voir si (1) est soluble avec $v \in \mathcal{U}$.

La deuxième hypothèse de la première situation est

(H2) $y \to \Phi(y)$ est continue (ou différentiable) de $Y \to \mathbb{R}$.

On cherche alors à minimiser $J(v)$ et à trouver des conditions nécessaires (ou nécessaires et suffisantes) satisfaites par un *contrôle optimal* u, solution de

(3) $$J(u) = \inf.\ J(v), \qquad v \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U}, \qquad u \in \mathcal{U}_{ad}$$

($\mathcal{U}_{ad}$ = sous-ensemble de $\mathcal{U}$ constituant les contrôles admissibles).

Comme on a dit, cette première situation a été étudiée systématiquement, les problèmes essentiels encore ouverts étant relatifs au cas où

$$v \to \Phi(y(v))$$

n'est pas différentiable sur $\mathcal{U}$, soit que Φ ne le soit pas, soit que $v \to y(v)$ ne soit pas différentiable (ce qui est le cas assez général dans les problèmes de contrôle de phénomènes de frontière libre).

Dans la deuxième situation on a encore (H1) *mais l'on n'a plus* (H2) ; il faut donc restreindre J à des sous-espaces (ou ensembles) de $\mathcal{U}$ qui font intervenir *à la fois* J et $\mathcal{A}$. Des exemples de cette situation ont été étudiés dans le cours de 1979-1980.

Dans la troisième situation qui a *commencé* à être étudiée dans le cours de cette année, *on n'a plus l'hypothèse* (H1). On ne peut plus alors parler de $y(v)$ et il faut changer le point de vue, de la façon suivante.

2. On considère donc maintenant l'ensemble des couples $\{v, z\}$ avec

(4) $$v, z \in \mathcal{U} \times Y$$

et qui vérifient, dans un sens convenable

$$\mathcal{A}z = \mathcal{B}v.$$

On se donne $\Phi(y)$ continue de $Y \to \mathbb{R}$ et $\Psi(\lambda)$ comme ci-dessus et on considère *la fonction coût*

(6) $$J(v, z) = \Phi(z) + \Psi(\|v\|_{\mathcal{U}}).$$

Il s'agit alors de minimiser $J(v, z)$ sur l'ensemble des v, z vérifiant (4) (5) avec éventuellement des contraintes

(7) $$v \in \mathcal{U}_{ad}, \qquad z \in Y_{ad}.$$

Les questions qui se posent sont :

(i) y a-t-il existence de solution (s) ?

(ii) peut-on encore donner des conditions nécessaires (ou nécessaires et suffisantes) caractérisant *un couple optimal* $\{u, y\}$ (s'il existe), i.e. tel que

$$J(u, y) = \inf. J(v, z), \qquad v \in \mathscr{U}_{ad}, \qquad z \in Y_{ad} \tag{8}$$

(iii) trouver des algorithmes numériques d'approximation.

3. Des questions de cette nature se posent

(i) pour des raisons méthodologiques

(ii) pour le contrôle optimal des systèmes instables, à bifurcation, etc.

Des applications à (ii) sont en cours de vérification en collaboration avec J.-P. Kernevez à l'Université de Technologie de Compiègne.

4. Le cours de cette année a étudié le problème (ii) du N° 2.

4.1. On considère d'abord

$$(9) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} + \Delta z = v \quad \text{dans} \quad \Omega \times]O, T[= Q \\[2ex] v, z \in L^2(Q) \times L^2(Q) \end{array} \right.$$

avec

$$z(x, 0), \qquad z = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]O, T[, \qquad \Gamma = \partial \Omega \tag{10}$$

(il faut vérifier, utilisant des résultats de trace convenables, que les conditions (10) *ont un sens !*).

Le problème (9) (10) est un classique problème « *mal posé* ». On ne peut donc pas (en général) parler de la solution $z = y(v)$ de (9) (10), mais on peut parler des couples $\{v, z\}$ avec (9) (10) (il en existe de différents de $\{0, 0\}$!).

On considère ensuite

$$J(v, z) = \int_Q (z - z_d)^2 \, dx \, dt + N \int_Q v^2 \, dx \, dt, \quad z_d \in L^2(Q), \ N > 0, \tag{11}$$

et l'on cherche

$$\text{(12)} \qquad \inf.\ J(v, z), \qquad v \in \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé de } L^2(Q)$$

Ce problème admet une solution unique $\{u, y\}$. Cette solution est *caractérisée* si $\mathcal{U}_{ad} = L^2(Q)$ par la solution du *système d'optimalité*

$$\text{(13)} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + \Delta y = u, \quad -\dfrac{\partial p}{\partial t} + \Delta p = y - z_d, \quad p + Nu = 0, \\ y(x, 0) = p(x, T) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega, \quad y = p = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma. \end{array} \right.$$

Le *découpage* de (13) conduit à de nouvelles équations integro différentielles non linéaires (du type Ricatti).

De très nombreuses variantes sont possibles : ordre supérieur, systèmes changeant de type, etc.

Si $\mathcal{U}_{ad} \subset L^2(Q)$ strictement, un intéressant résultat partiel a été obtenu par l'un des auditeurs du cours, P. Rivera [4].

4.2. Une autre situation étudiée a été celle du contrôle de *systèmes instables.* On considère

$$\text{(14)} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - z^3 = v \quad \text{dans} \quad Q, \\ v \in L^2(Q), \quad z \in L^6(Q), \\ z(x, 0) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega, \quad z = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \end{array} \right.$$

et

$$\text{(15)} \quad J(v, z) = \|z - z_d\|^6_{L^6(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)}, \qquad z_d \in L^6(Q), \qquad N > 0.$$

On peut encore montrer l'existence d'une solution et donner un système d'optimalité.

4.3. On considère le système

$$\text{(16)} \quad \left| \begin{array}{l} \Delta z = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ z = v_0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \subset \Gamma = \partial\Omega \\ v = \{v_0, v_1\} \in L^2(\Gamma_0)^2, \quad z \in L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

On peut encore considérer des problèmes de contrôle pour un système du type (16) bien que le problème (16) soit mal posé.

5. Le cours prochain donnera d'autres situations (optimum design, équations hyperboliques instables ou mal posées) et exposera les premiers résultats numériques.

J.-L. L.

PUBLICATIONS LIÉES AU COURS

[1] Chapitre 7 du livre de l'Auteur :
Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their control. Science Publications Company, BEIJING, 1981 (Edition en chinois, 1981).

[2] Optimal control of non well posed distributed systems and related non linear partial differential equations. Conférence au « Colloque non linéaire » de Los Alamos, 1981.

[3] Travail en préparation avec J.-P. KERNEVEZ.

[4] Travail en préparation de P. RIVERA.

AUTRES PUBLICATIONS

Suite des publications des résultats exposés dans le cours de 1978-1979 sur les phénomènes asymptotiques dans les *milieux à structure périodique ;* cela a donné lieu aux Chapitres 1 et 2 de [1] et à

[5] Article pour le « Fourth International Conference on Continuum Models of Discrete Systems, Stockholm, 29 juin - 4 juillet 1981.

[6] Article en cours de parution au J.M.P.A. avec E. SANCHEZ-PALENCIA.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Université de Manille, Hong-Kong (Chinese University), Tokyo, Kyoto, 1-10 octobre 1980.

Mission pour la N.S.F. à Washington, les 24 et 25 novembre 1980.

Conférences au Banach Center, Varsovie, 2-5 décembre 1980.

Conférence à l'Université de Bordeaux, 22 janvier 1981.

Conférence au Colloque non linéaire de Los Alamos. Conférences à Montréal et New York, 1-10 mars 1981.

Conférence à l'Université de Pavie, le 17 mars 1981.

Mission et Conférence au Yemen, 1-10 avril 1981 (Colloque ALECSO).

Conférence à Wurzburg, le 21 avril 1981, colloque du G.A.M.M.

Mission et Conférences en Chine, mai 1981. Conférences à Pékin, Wu han, Nankin, Hang-tcheou. Cours à Shanghai (base du livre [1]).

Conférences à Stockholm, 29 juin - 4 juillet 1981.

Conférence au Colloque International sur les Systèmes Dynamiques, Rio de Janeiro, fin juillet 1981.

Cours à S.A.F.A. V, sur le contrôle optimal, Catane, 20-24 septembre 1981.

Distinctions

Docteur *Honoris Causa* de l'Université de Liège, décembre 1980.

Professeur honoraire à l'Université de Wuhan et à l'Université Fudan à Shanghai, mai 1981.