Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. On a poursuivi l'étude du contrôle optimal des systèmes distribués instables, ou mal posés, ou à états multiples.

Commençons par un exemple de cette dernière situation.

Dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière (régulière) Γ, on considère un système dont « l'état » est « donné » par l'équation

(1) $$-\Delta z - z^3 = v \quad \text{dans} \quad \Omega$$

où

(2) $$z = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

et où v est (pour l'instant) donné dans $L^2(\Omega)$. — En réalité l'équation aux dérivées partielles non linéaires (1), (2) admet (au moins pour un ensemble dense de fonctions v de $L^2(\Omega)$ et, peut être, pour toute fonction v — résultat et conjecture de A. Bahri) *une infinité de solutions.* On ne peut donc parler de *l'état* du système mais de *l'ensemble* des états pour une valeur donnée de la fonction (de contrôle) v. De manière précise, on est ainsi conduit à introduire *l'ensemble des couples* $\{v, z\}$ avec

(3) $$v \in L^2(\Omega), \qquad z \in L^6(\Omega)$$

tels que (1) et (2) aient lieu. C'est ce qu'on appelle un *système à états multiples.*

Remarque

Le choix de l'espace $L^6(\Omega)$ pour la fonction z est fait seulement pour des raison de commodité. On peut remplacer $L^6(\Omega)$ par $L^\alpha(\Omega)$ pourvu que $\alpha > 3$. Si $\alpha = 3$ des difficultés supplémentaires apparaissent.

On considère ensuite

(4) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(\Omega)$

et on fait *l'hypothèse* (inutile si la conjecture de Bahri est vérifiée) :

(5) il existe un couple $\{v_0, z_0\}$ satisfaisant à (1), (2), (3) avec $v_0 \in \mathcal{U}_{ad}$.

Soit la *fonction coût* donnée par

(6) $$J(v, z) = \frac{1}{6}\|z - z_d\|^6_{L^6(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et on cherche

(7) $\inf J(v, z)$, $\{v, z\}$ avec (1), (2), (3) et $v \in \mathcal{U}_{ad}$.

Il est facile de voir *qu'il existe toujours une solution* (non nécessairement unique) $\{u, y\}$, appelée *couple optimal.*

Le point essentiel est de voir si l'on peut construire *un système d'optimalité,* ensemble de conditions nécessaires pour que $\{u, y\}$ soit un couple optimal.

Le résultat suivant a été démontré dans le cours. On suppose que

(8) Il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $\mathcal{U}_{ad}$ contienne *toutes* les fonctions indéfiniment différentiables dans Ω et à support compact dans ω.

Dans ces conditions *si* $\{u, y\}$ *est un couple optimal, il existe un triplet* $\{u, y, p\}$ *tel que*

(9) $$\left|\begin{array}{l} -\Delta y - y^3 = u, \\ -\Delta p - 3y^2 p = (y - z_d)^5 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ y = p = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \\ \int_\Omega (p + Nu)(v - u)\,dx \geqq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad},\ u \in \mathcal{U}_{ad}, \\ D^\alpha y \in L^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leqq 2, \\ D^\alpha p \in L^{6/5}(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leqq 2. \end{array}\right.$$

On peut démontrer (F. Murat) un résultat analogue à (9) si, sans avoir (8), on a :

(10 $$\mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(\Omega),\ v \geqq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\}.$$

On peut également (P. Rivera) démontrer encore (9) sans autre hypothèse que $0 \in \mathcal{U}_{ad}$ *si* z_d *est de norme assez petite dans* $L^6(\Omega)$.

Le résultat (9) donne des informations sur la régularité de tout contrôle optimal ; (9) est le point de départ des *méthodes d'approximation,* méthodes qui seront étudiées dans le cours de l'an prochain.

2. Le cours a d'autre part complété l'étude des *systèmes instables,* dont l'état est « donné » par

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - z^3 = v \quad \text{dans} \quad \Omega \times]O, T[, \tag{11}$$

ou bien par

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z - z^3 = v \quad \text{dans} \quad \Omega \times]O, T[, \tag{12}$$

avec des conditions aux limites et initiales convenables.

Divers cas de *contrôle frontière* ont également été étudiés.

3. Un certain nombre d'applications (indiquées par J.P. Kernevez) conduisent à l'étude du contrôle des systèmes (instables) (11) ou (12), pour les solutions *périodiques en* t. Le système d'optimalité n'a pas encore été établi dans le cas général pour ce problème.

Ces questions, les problèmes de perturbation et toutes les questions d'approximation feront l'objet du cours de l'an prochain.

J.-L. L.

Missions

Octobre 1981. — A l'invitation du Gouvernement Japonais, participation au Colloque sur les Ordinateurs de la 5e génération, Tokyo.

15-19 février. — Conférences à New York University.

2-3 mars. — Conférences à Obervolfach.

8-13 mars. — Conférences à l'Université d'Illinois, Urbana (G.A. Miller visiting professor).

22-31 mars. — Conférences aux Universités de Tokyo et de Kyoto. — Colloque sur les grands ordinateurs.

16-23 avril. — Mission à Tokyo, suivie de conférences à l'Academia Sinica, à Pékin (Colloque Franco-Chinois d'Analyse Numérique).

24-29 mai. — Conférences au Colloque National d'Analyse Numérique, Belgodère, Corse.

7-10 juin. — Conférence au Colloque en l'honneur de L. Amerio, à Milan et Conférence à Pavie.

28 juin. — Conférence au Congrès I.F.A.C. à Toulouse.

13-16 septembre. — Conférence au Colloque à la mémoire de C. Miranda, à Naples.

Publications

Edition anglaise du livre de A. Bensoussan et J.-L. Lions publié chez Dunod en 1978 : *Applications of variational inequalities in stochastic control.*

Préparation de la publication de la 2e édition, complétée, du livre de A. Bensoussan, G. Papanicolaou et J.-L. Lions, publié chez North Holland, *Asymptotic Analysis for periodic structures.*

Publication du livre « *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control* », Science Press, Beijing 1981 (édition chinoise en 1982).

Distinction

Professeur honoraire à l'Institut de la Science des Systèmes de l'Academia Sinica, Pékin.