Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. On a poursuivi l'étude du contrôle optimal *des systèmes distribués singuliers* c'est-à-dire des systèmes dont l'équation d'état est une équation aux dérivées partielles (avec des conditions aux limites et, s'il s'agit d'un problème d'évolution, des conditions initiales, convenables) *singulière ;* singulière signifie ici : pouvant ne pas admettre de solutions, pouvant admettre une infinité de solutions, pouvant « bifurquer », etc.

On a étudié cette année dans ce cadre des problèmes hyperboliques *instables,* des problèmes hyperboliques *mal posés* et des problèmes paraboliques ou hyperboliques *périodiques en temps* pouvant admettre une infinité de solutions.

2. On a commencé par donner un résultat de régularité très simple mais qui semble nouveau : si l'on considère dans un cylindre

$$Q = \Omega \times]O,T[$$

l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = f$$

avec $f \in L^2(Q)$, avec $\Phi(x,O) = \Phi_t(x,O) = 0$ dans Ω et $\Phi = 0$ sur $\Sigma = \Gamma \times]O,T[$, Γ = frontière de Ω, alors (supposant Γ *régulière*) la dérivée normale $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ prise sur Σ vérifie :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma).$$

Ce résultat a été utilisé pour résoudre un problème non homogène avec donnée au bord irrégulière — problème utile pour l'étude du problème de contrôle que voici : on suppose que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 et Γ_1 étant distinctes (cf. fig. 1) ; on considère le couple « *contrôle-état* » $\{v,z\}$ vérifiant

$$(1)\quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z = 0 \text{ dans } Q, \\[2ex] z = v_0,\ \dfrac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \text{ sur } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]O,T[,\ v = \{v_0, v_1\}, \\[2ex] z\,(x,O) = z_t(x,O) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

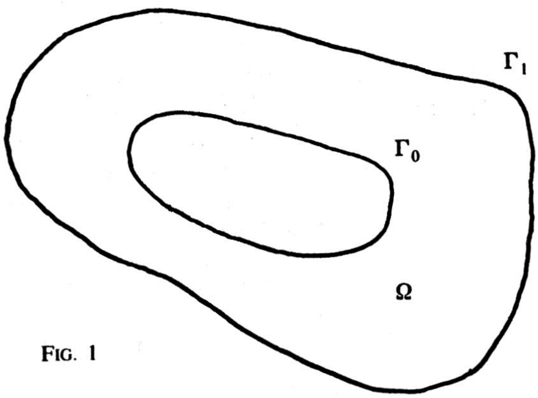

FIG. 1

Ce système est *singulier :* v_0, v_1 étant donnés dans $L^2(\Sigma_0)$, *il n'existe pas, en général, de* z vérifiant (1). On considère donc a priori l'ensemble des couples $\{v,z\}$ tels que

$$(2)\qquad v \in L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0),\quad z \in L^2(Q)$$

et vérifiant (1).

Il faut pouvoir introduire *des contraintes* sur v. Soit donc

$$(3)\qquad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(\Sigma_0) \times L^2(\Sigma_0).$$

On définit alors *l'ensemble des couples* $\{v,z\}$ *admissibles* par

$$(4)\qquad v \in \mathcal{U}_{ad},\ z \in L^2(Q) \text{ et (1) a lieu.}$$

On fait *l'hypothèse* que cet ensemble *n'est pas vide ;* on a donné des conditions suffisantes simples pour qu'il en soit ainsi.

On définit ensuite *la fonction coût*

(5) $$J(v,z) = \frac{1}{2}\int_Q (z - z_d)^2\, dx\, dt + \frac{N_0}{2}\int v_0^2\, d\Sigma_0 + \frac{N_1}{2}\int_{\Sigma_0} v_1^2\, d\Sigma_0$$

où z_d est donné dans $L^2(Q)$ et où N_0, N_1 sont donnés > 0, et l'on cherche

(6) Inf $J(v,z)$, v,z parcourant l'ensemble (4) des couples admissibles.

Ce problème admet une solution unique $\{u,y\}$ *(couple optimal)*. On a donné *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\{u,y\}$ *soit le couple optimal.* Il s'agit du *Système d'Optimalité Singulier,* que l'on n'explicite pas ici.

3. On a ensuite (après des rappels techniques sur des résultats d'unicité et sur la méthode de convexité logarithmique pour l'étude d'instabilités) considéré le système suivant :

(7) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z - z^3 = v \text{ dans } Q, \\ z(x,O) = z_t(x,O) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{array}\right.$$

On considère a priori *l'ensemble des couples admissibles :*

(8) $$\left|\begin{array}{l} v \in \mathcal{U}_{ad},\ \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé non vide de } L^2(Q), \\ z \in L^\alpha(Q),\ \alpha \text{ donné} \geqq 3, \\ v \text{ et } z \text{ vérifiant (7) (dans un sens faible).} \end{array}\right.$$

On *suppose* cet ensemble *non vide* (noter, en effet, que pour v donné dans $L^2(Q)$, (7) *peut* ne pas admettre de solution dans $L^\alpha(Q)$).

On considère la *fonction coût* donnée par

(9) $$J(v,z) = \frac{1}{\alpha}\int_Q |z - z_d|^\alpha\, dx\, dt + \frac{N}{2}\int_Q v^2\, dx\, dt,$$

z_d donné dans $L^\alpha(Q)$ et N donné > 0. On cherche alors

(1) inf $J(v,z)$, $\{v,z\}$ satisfaisant à (8).

Pour fixer les idées on suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. (Les résultats sont un peu différents si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1,2$). On a *existence d'un couple optimal,* i.e. de $\{u,y\}$ admissible avec

$$J(u,y) = \inf J(v,z) \tag{1}$$

si $\alpha > {}^{18}/_5$ (le problème de l'existence est ouvert si $3 \leqq \alpha \leqq {}^{18}/_5$).

On a pu établir *l'existence d'un système d'optimalité singulier* (c'est-à-dire, en fait, d'un multiplicateur de Lagrange) *seulement dans le cas* $\alpha = 6$.

4. On a ensuite considéré *le système parabolique périodique en temps :*

$$(12)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z - z^3 = v \text{ dans } Q = \Omega \times]0,T[, \\ z(x,0) = z(x,T) \text{ dans } \Omega \text{ (condition de périodicité)}, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{array}\right.$$

avec

$$(13)\quad \left|\begin{array}{l} v \in \mathcal{U}_{ad} \ (\mathcal{U}_{ad} \text{ comme ci-dessus}) \\ z \in L^\alpha(Q),\ \alpha > 3. \end{array}\right.$$

Ce système peut admettre, pour v donné, *une infinité de solutions,* puisque si $v(x,t) = v(x)$, il existe en général une infinité de solutions indépendantes de t (et donc périodiques en t !) — L'étude du *nombre de solutions* de (12) pour $v = v(x,t)$ est un problème qui donne lieu à diverses recherches en cours et à des expériences numériques (cela sera exposé dans le cours de l'an prochain). On considère ensuite la fonction coût donnée par (9), avec $\alpha = 6$, et on cherche

$$\inf J(v,z),\ v,z \text{ vérifiant (12), (13).} \tag{14}$$

On a obtenu l'existence d'un *système d'optimalité singulier* dans le cas où $\mathcal{U}_{ad}$ contient *toutes* les fonctions à support dans un « tube tordu » $\mathcal{O}$ de Q, tel que l'intersection de $\mathcal{O}$ avec le plan $t = s$ soit, pour $0 < s < T$, un ouvert non vide. La démonstration repose sur un théorème d'unicité établi, à cet effet, par J.-C. SAUT et B. SCHEURER.

PUBLICATIONS

J.-L. LIONS, *Contrôle optimal des Systèmes distribués singuliers,* Paris, Dunod, 1983.

PUBLICATIONS LIÉES AU COURS

Thèse de docteur Ingénieur de F. BONNANS.

Notes aux C.R.A.S. de A. BENSOUSSAN et de B. HARAUX, F. MURAT et L. TARTAR.

Thèse d'Etat de J. BLUM sur le contrôle de la fusion (Tokomak), (travail effectué en liaison avec les physiciens du Tokomak).

MISSIONS ET CONFÉRENCES

13-15 septembre 1982. — Conférence au Colloque dédié au Professeur C. MIRANDA, Naples.

29-30 septembre 1982. — Conférence au Mittag Leffler Institute, Colloque Crawfoord, Stockholm.

18-22 septembre 1982. — Conférences à l'Institut Polytechnique de Madrid, à l'Université Computense de Madrid et à l'Université de Saint-Jacques-de-Compostelle.

27 novembre-2 décembre 1982. — Conférences au Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore et Bombay.

Mai 1983. — Conférences aux Universités de Moscou, Leningrad, Kiev.

Juin 1983. — Conférence à l'Université Chalmers.

27 juin-2 juillet 1983. — Cours à l'Ecole C.E.A.-I.N.R.I.A.-E.D.F. Cours sur l'homogénéisation.

Juillet 1983 — Conférences à l'Ecole d'Eté sur les Equations aux dérivées partielles non linéaires, Berkeley.

Août 1983. — Participation au Congrès International des Mathématiciens, Varsovie.

Distinctions

Docteur Honoris Causa de l'Université Polytechnique de Madrid et de l'Université de Technologie de Chalmers (Suède).

Membre Etranger de l'Académie des Sciences d'U.R.S.S.