Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. On a poursuivi l'étude du contrôle optimal *des systèmes distribués,* c'est-à-dire des systèmes dont l'équation d'état est une équation aux dérivées partielles.

On a étudié des situations où l'équation d'état, et les conditions aux limites, ou bien conduisent à des problèmes « *mal posés* » au sens de J. HADAMARD, ou bien *ne sont pas suffisantes* pour déterminer l'état (systèmes à données incomplètes, très fréquents dans de nombreuses applications).

2. On a d'abord considéré, dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est divisée en deux parties :

$$\partial \Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

l'équation

(1) $$\Delta z = 0 \quad \text{avec} \quad z \in L^2(\Omega)$$

(fonctions harmonique *de carré sommable*), avec *les données de Cauchy*

(2) $$z = v_0, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} = v_1 \quad \text{sur } \Gamma_0 ;$$

le problème (1) (2) est le plus classique des problèmes « mal posés » au sens de HADAMARD : (1) (2) n'admet pas en général de solution dans les espaces « usuels » de distributions et, lorsqu'il a une solution, elle dépend de manière discontinue des données v_0, v_1 dans toute topologie « raisonnable ».

Rien n'empêche néanmoins de considérer *a priori les triplets* $\{v_0, v_1, z\}$ dans $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Omega)$ vérifiant (1) (2).

Si $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble convexe fermé de $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$, on suppose qu'*il existe* $\{v, z\}$, $v = \{v_0, v_1\}$, avec (1) (2) *et* $v \in \mathcal{U}_{ad}$; si ensuite v, z $\rightarrow$ J (v, z) est une fonction de $L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, on considère le problème

(3) $$\inf J(v, z),\ v \in \mathcal{U}_{ad},\ \{v, z\} \text{ avec } (1)\ (2).$$

On a montré que, sous certaines hypothèses sur J (v, z), on peut donner un ensemble *de conditions nécessaires satisfaites par un couple optimal* {u, y} (réalisant le minimum dans (3)).

Ces conditions (le système d'optimalité singulier) font intervenir un multiplicateur de Lagrange qui est une *fonctionnelle analytique.*

De manière générale, si A est un opérateur différentiel dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, avec des conditions aux limites homogènes sur $\partial\Omega$ exprimées par l'appartenance au domaine D (A) de A, on introduit l'espace

$$D(A^\infty) = \{\varphi \mid \varphi \in D(A),\ A\varphi \in D(A), \ldots\} \quad \text{puis l'espace}$$

$$F(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in D(A^\infty),\ \Sigma \, \| A^k \varphi \|^2_{L^2(\Omega)} \frac{1}{(2k+1)!} < \infty\}.$$

Si A est à coefficients analytiques dans Ω, l'espace F (Ω) est composé de certaines fonctions analytiques dans Ω (et même dans $\overline{\Omega}$ si les coefficients de A sont analytiques jusqu'au bord, et si $\partial\Omega$ est analytique). Le multiplicateur de Lagrange est alors dans des espaces *du type* « dual de F (Ω) » (i.e. un espace de fonctionnelles analytiques).

3. Dans le même ordre d'idées, on a étudié des problèmes de contrôle pour l'équation de la chaleur *rétrograde*

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \Delta z = v \text{ dans } \Omega \times]0, T[$$

avec z (x, 0) = 0 dans Ω et z = 0 sur $\Sigma = \partial\Gamma \times]0, T[$, autre exemple classique de problème mal posé (dans les espaces « usuels »).

4. On a considéré ensuite des systèmes à informations incomplètes.

Le premier problème de ce type que l'on a étudié est celui de l'équation

(4) $$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[,$$

avec

(5) $$z = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[$$

mais *sans que la donnée initiale soit connue.* A un instant t_1, $0 < t_1 < T$, on a une information du type

(6) $\quad z(x, t_1) \in$ ensemble donné d'un espace fonctionnel sur Ω.

On cherche parmi tous les $z \in L^2(\Omega \times]0, T[)$ et qui vérifient (4) (5) (6) celui *de norme minimum.* Soit y. Cet élément y peut-être caractérisé par un système d'optimalité qui fait encore intervenir un multiplicateur de Lagrange qui est une fonctionnelle analytique.

5. On a ensuite considéré l'équation des ondes

$$
(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Delta z = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[\\ z \in L^2(\Omega \times]0, T[) \end{cases}
$$

avec comme *seule* information supplémentaire

(8) $\quad z(b, t) \in$ ensemble donné d'un espace fonctionnel sur $]0, T[$, où b est donné dans Ω.

La fonction de norme L^2 minimum dans l'ensemble des z vérifiant (7) (8) peut être caractérisée par un système d'optimalité d'un type nouveau.

On a remarqué que les problèmes analogues stationnaires :

$$
(9) \quad \begin{cases} -\Delta z = 0, z \in L^2(\Omega), \\ z(b) \text{ donné} \end{cases}
$$

conduisent à de nouvelles démonstrations d'anciens résultats de S. ZAREMBA.

6. On a enfin abordé des systèmes hyperboliques à contrôle ponctuel, un sujet sur lequel de très nombreux problèmes restent ouverts.

PUBLICATIONS

Some remarks on the optimal control of singular distributed systems. Proceedings du Colloque de l'A.M.S. de Berkeley, juillet 1983.

Noyau reproduisant et système d'optimalité. Dédié à L. NACHBIN.

Missions et conférences

10-24 octobre 1983. — Conférences dans les Universités principales de Taiwan, à la Math. Society de Hong Kong et à l'Université de Séoul.

28 novembre - 3 décembre 1983. — Visite des centres de recherches Schlumberger et I.B.M. à New York et à l'Université de Maryland.

6 décembr 1983. — Conférences à l'Université Libre de Bruxelles et au Congrès Belge sur la Gestion.

14 décembre 1983. — Conférence au Colloque de Versailles sur l'Analyse Numérique.

23-28 janvier 1984. — Conférences au IIASA (Vienne) et à l'Université de Graz (Autriche).

28 février 1984. — Conférence au Séminaire Goulaouic-Schwartz de l'Ecole Polytechnique.

8 mars 1984. — Conférence inaugurale de l'Accademia Lombarda, Milan.

11-17 mars 1984. — Conférencier du « Graduate Program » de l'Université d'Etat de Pennsylvania et conférences à l'Université de Chicago.

9-14 avril 1984. — Conférences à l'Université de Rabat (Maroc).

27-31 août 1984. — Conférences au Colloque d'Analyse Numérique de Sofia (Bulgarie).

18 septembre 1984. — Conférence au Colloque d'Optimisation d'Erice (Italie).